Title: Ilm-e-Hiyat Kurvi

Author: Robert Ball

Translator: Muhammad Nazir-Ud-Din

Subject: Celestial Mechanics

سلسلۂ نصابات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

علم ہیئت کروی

حصہ دوم

تصنیف

سر رابرٹ بال ایم۔ اے، ایف۔ آر۔ ایس

ترجمہ

محمد نذیر الدین ایم۔ اے (عثمانیہ)
رکن سررشتہ تالیف و ترجمہ سرکار عالی

سنہ ۱۳۵۹ھ م سنہ ۱۳۴۹ف م سنہ ۱۹۴۰ء

دار الطبع جامعہ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

فہرست مضامین

علم ہیئت کروی

حصۂ دوم

گیارھواں باب

ضلالتِ نور

بارہواں باب

چاند کا ارض مرکزی اختلاف منظر

تیرہواں باب

سورج کا ارض مرکزی اختلاف منظر

چودھواں باب

سورج پر سے ایک سیّارہ کا مرور

پندرھواں باب

ستاروں کا سالانہ اختلافِ منظر

دفعہ صفحہ

سولہواں باب

چاند گرہن

سترھواں باب

سورج گرہن

اٹھارواں باب

صفحہ

فصل ستاروں کی ... ۱۹۴
... کی تحقیق ... ۱۹۶

انیسواں باب

چاند سے متعلق

بیسواں باب

مظہر ہیاروی ۲۳۹

دفعہ صفحہ

اکیسواں باب
تعمیمی آلہ

دفعہ صفحہ

بائیسواں باب

رصدگاہ کے اساسی آلات

(۲۳۸)

علم ہیئت کروی

حصۂ دوم

گیارھواں باب

ضلالت نور

۷۹ — تمہید۔

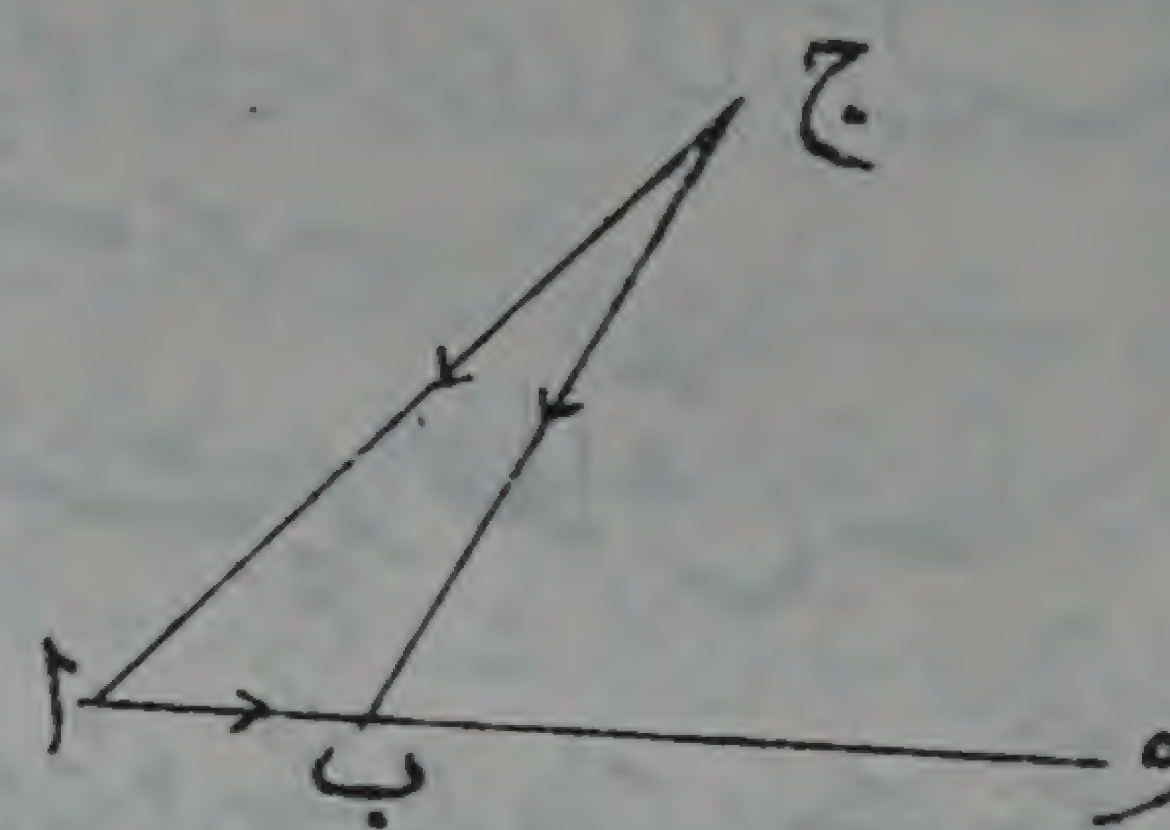
ہم اس سے پہلے پڑھ چکے ہیں کہ کرۂ ہوائی کے انعطاف کی وجہ سے کسی جرم فلکی کے اصلی مقام اور اس مقام میں جس کو جرم اختیار کرتا ہوا نظر آتا ہے بالعموم فرق ہوتا ہے۔ اب ہم یہاں کسی جرم فلکی کے مقام کے ایک اور ہٹاؤ پر غور کریں گے جس کا باعث یہ واقعہ ہے کہ نور کی رفتار اگرچہ بہت ہی بڑی ہے لیکن خود مشاہد کی حرکت کی رفتار کے مقابلہ میں زیادہ بڑی نہیں ہے۔ کسی جرم فلکی کے مقام میں کوئی ظاہری تبدیلی جو اس سبب سے پیدا ہو ضلالت سے موسوم کیجاتی ہے۔ پس کسی جرم فلکی کے اصلی محدد حاصل نہیں ہو سکتے جب تک کہ ان ظاہری محددوں میں جو راست مشاہدے سے معلوم ہوئے ہوں ضلالت کی بعض تصحیحیں عمل میں نہ لائی جائیں[1]۔ اب ہم ان تصحیحوں کی نوعیت کی تحقیق کریں گے۔

۸۰ — اضافی رفتار۔ (۲۴۹)

فرض کرو کہ ا ب (شکل ۶۹) ایک جسم ف کی رفتار کو مقدار اور سمت

[1] رویمر (Roemer.) نے یہ امر محسوس کیا جبکہ اس نے ۱۶۷۵ء میں نور کی تدریجی اشاعت کا انکشاف کیا۔ یہ اس خط سے معلوم ہوتا ہے جو اس نے ہیجنس کو لکھا تھا (Oeuvres completes de C. Huygens, T, viii. p. 53)- اگرچہ قطب تارے کے مقام کی دوری تبدیلی کو جس کا حقیقی سبب ضلالت ہے پیکرڈ (Picard) نے ۱۶۸۰ء میں مشتہر کیا تھا لیکن ضلالت کے عام مظہر کے انکشاف کا سہرا بریڈلی (Brad ley) کے ہی سر ہے جس نے اس کی صحیح توضیح بھی کی۔

دونوں میں تعبیر کرتا ہے۔ فرض کرو کہ اسی طرح ج ب دوسرے جسم ق کی رفتار کو تعبیر کرتا ہے۔



شکل (۶۹)

ف پر کوئی مشاہد خود اپنی حرکت کی وجہ سے ق کے ساتھ ایسی حرکت منسوب کرے گا جو ق کی اصلی حرکت سے مختلف ہوگی۔ اس لیے ہمیں ف کے لحاظ سے ق کی حرکت پر غور کرنا ہے۔

اگر دو نقطے مساوی رفتاروں سے متوازی سمتوں میں حرکت کر رہے ہوں تو ان کی کوئی اضافی حرکت نہیں ہوگی کیونکہ انکا درمیانی فاصلہ نہیں بدلتا اور نہ اس خط کی سمت بدلتی ہے جو انہیں ملاتا ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کوئی مساوی اور متوازی رفتاریں دو ذروں کی اصلی رفتاروں کے ساتھ ترکیب پا سکتی ہیں اور اس سے ان ذروں کی اضافی حرکت پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

شکل ۶۹ میں تیروں کی سمتوں کا مشاہدہ کیا جائے تو رفتاروں کے مثلث سے یہ ظاہر ہے کہ رفتار ج ب، دو رفتاروں ج ا اور ا ب میں تحلیل کی جا سکتی ہے۔ لیکن ف کی رفتار ا ب ہے۔ اگر ہم ف اور ق دونوں سے رفتار ا ب نکال دیں تو اس سے ان کی

اضافی حرکت نہیں بدلتی لیکن اس عمل سے ف ساکن ہوجائے گا اور یہ معلوم ہوگا کہ ق کی اضافی رفتار ج ا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ ف کے لحاظ سے ق کی اضافی رفتار اس طرح حاصل کی جاتی ہے کہ ق کی اصلی رفتار کے ساتھ ایک ایسی رفتار ترکیب دیجائے جو ف کی رفتار کے مساوی اور مخالف ہو۔

۸۱ — ضلالت پر اطلاق۔

اوپر جو کچھ ہم پڑھ چکے ہیں اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ کسی مُشاہد کو جو خود حرکت میں ہو کسی ستارے کی ظاہری سمت اِس طرح حاصل ہوگی کہ وہ ستارے سے آنے والی نور کی شعاعوں کی رفتار کو اپنی رفتار کے مساوی اور مخالف رفتار کے ساتھ ترکیب دے۔

مثلاً اگرچہ ستارہ ج کی اصلی سمت ب ج ہے (شکل ۶۹) (۲۵۰)
لیکن اس کی ظاہری سمت ا ج ہوگی اگر مُشاہد ا ب پر یکساں طور پر ایسی رفتار کے ساتھ حرکت کرے جو نور کی رفتار کے ساتھ نسبت ا ب / ب ج رکھتی ہو۔ زاویہ ا ج ب کو ضلالت کہتے ہیں اور اِسے صہ سے تعبیر کرتے ہیں۔ ہم اُس زاویہ ج ا و کو جو ستارہ کی ظاہری سمت ا ج اور مُشاہد کی حرکت کی سمت ا ب کے درمیان ہے سا سے تعبیر کریں گے۔ کرۂ سماوی پر کا نقطہ و جس کی طرف مُشاہد کی حرکت کی سمت ہے راس (Apex.) کہلاتا ہے۔

غرض کرو کہ مُشاہد کی رفتار و ہے اور نور کی رفتار مہ تو

$$\frac{\text{و}}{\text{مہ}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ب ج}}$$

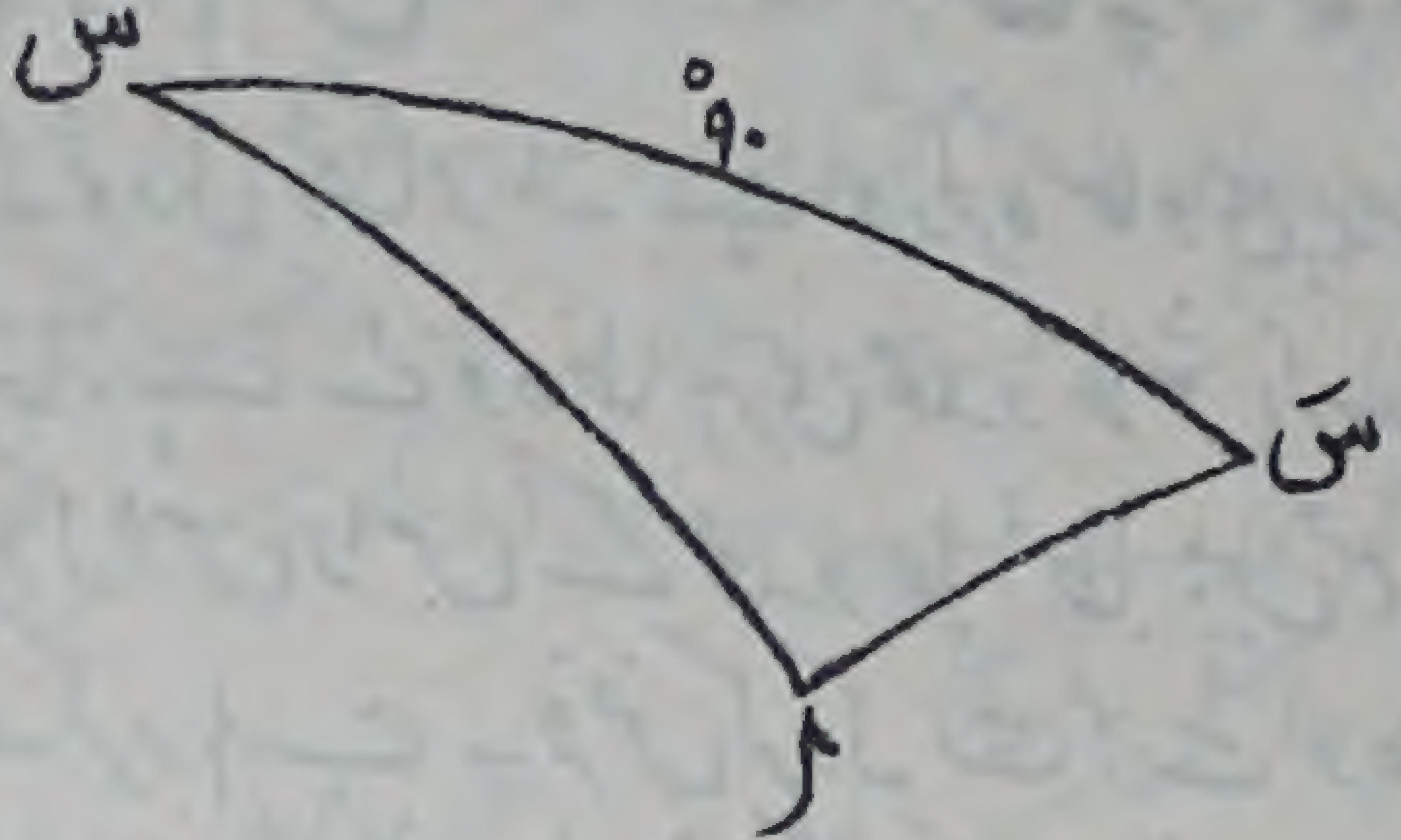
اس لیے جب صہ = و مہ ا جب سا

یہ مساوات ضلالت کے لیے اساسی مساوات ہے۔

زاویہ صہ وہ میلان ہے جو دوربین کی حقیقی سمت (جبکہ متحرک

مُشاہد اُسے ستارہ دیکھنے کے لیے لگاتا ہے) اور اُس اصلی سمت کے درمیان ہے جس میں دوربین کو قائم کرنا پڑتا اگر مُشاہد ساکن ہوتا۔ چونکہ صہ ہمیشہ چھوٹا ہوتا ہے اِس لیے اِس کی جیب کی بجائے اس کا دائری ناپ استعمال کیا جاسکتا ہے۔ ہم نے سادہ زاویہ لیا ہے جو ستارہ کے ظاہری مقام اور راس کے درمیان ہے۔ لیکن چونکہ مساوات میں جیب سا، $\frac{و}{مہ}$ سے مضروب ہے جو ایک چھوٹی مقدار ہے اس لیے ہم بغیر کسی قابل قدر خطا کے صہ کی قیمت میں سا کی بجائے وہ زاویہ اکثر استعمال کرسکتے ہیں جو ستارہ کے اصلی مقام اور راس کے درمیان ہو۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ اگر کسی ستارہ س کی ضلالت کو کسی سمت س سَ (شکل ۷۰) میں تحلیل کیا جائے تو جزو تحلیلی ک جم ا سَ ہے جہاں ا راس ہے، س سَ = ۹۰° اور ک = و/مہ۔



شکل (۷۰)

جم ا سَ = جیب ا س جم طہ،

ک جم ا سَ = ک جیب ا س جم طہ

لیکن ک جیب ا س ضلالت ہے اور اگر اُسے جم طہ سے ضرب دیا جائے تو سمت س سَ میں اس کا جزو تحلیلی حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ دو ستاروں کے اصلی مقامات س، س۱ ہیں،

س۱ س۲ کا نقطۂ وسطی و ہے اور زمین کے راستہ کا راس ا۔ ثابت کرو کہ ضلالت
س۱ س۲ کو بقدر ۲ک جب ½ س۱ س۲ جم و ا کے گھٹا دیتی ہے۔
بڑے دائرہ س۱ س۲ (ممدودہ) پر نقطے سَ۱، سَ۲، وَ ایسے لو کہ (۲۵۱)

س۱ سَ۱ = س۲ سَ۲ = و وَ = ۹۰°

تب مثال (۱) سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ ضلالت کے باعث س۱ س۲ میں تبدیلی حسب ذیل ہے

ک (جم ا سَ۱ - جم ا سَ۲) = ۲ک جب و سَ۱ جب وَ ا جم و ا

= ۲ک جب ½ س۱ س۲ جم و ا

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ ستارے جو ایک بڑے دائرہ کے محیط پر واقع ہوں ضلالت کی وجہ سے بظاہر ایک متصلہ چھوٹے دائرہ کے محیط پر منتقل ہوں گے اور یہ کہ ان دو دائروں کے مستوی متوازی ہوں گے۔

۸۲ — کسی جرم فلکی کے محددوں پر ضلالت کے اثرات۔

فرض کرو کہ نور کی رفتار م ہے اور کرۂ سماوی پر ستارہ کے اصلی محدد عا، طا ہیں۔ ستارے کے وہ ظاہری محدد تلاش کرنے ہیں جو ضلالت سے متاثر ہیں۔ فرض کرو کہ اُس راس کے محدد عاَ، طاَ ہیں جس کی طرف مشاہد رفتار و سے حرکت کر رہا ہے۔ فرض کرو کہ ت، تَ وہ لمحات ہیں جن پر ایک ساکن ستارہ سے آنے والی نور کی ایک شعاع اولاً دوربین کے دہانہ (Object-glass) میں سے اور ثانیاً چشمہ میں سے گذرتی ہے جبکہ یہ فرض کیا گیا ہو کہ دوربین خود اپنے متوازی حرکت کرتی ہے۔

فرض کرو کہ وقت ت پر چشمہ کے مرکز کے قائم محدد لا، ما، ہی ہیں جہاں حوالہ کے محور +لا، +ما، +ہی زمین کے مرکز اور ان نقطوں میں سے گذرتے ہیں جن کے کروی محدد علی الترتیب (۰°، ۰°)، (۹۰°، ۰°)، (۰°، ۹۰°) ہیں۔ اس لیے وقت تَ پر چشمہ کے محدد حسب ذیل ہونگے۔

لا + و (تَ - ت) جم طاَ جم عاَ، ما + و (تَ - ت) جب عاَ جم طاَ، ہی + و (تَ - ت) جب طاَ

فرض کرو کہ دُوربین کا طول یعنی اُس خط کا طول جو چشمہ کے مرکز سے
دہانہ کے مرکز تک کھینچا گیا ہے ل ہے۔ فرض کرو کہ کرہ سماوی پر اُس نقطہ
کے محدد عاَ، طاَ ہیں جن کی طرف اِس خط کی سمت ہے یعنی ستارہ کی ظاہری
کے مرکز کے محدد
سمت۔ اِس لیے وقت ت پر دہانہ
ل جم طاَ جم عاَ، ل جم طاَ جب عاَ، ل جب طاَ
ہیں۔ وقت (تَ - ت) میں نور کی شعاع نے وہ فاصلہ طے کیا ہے جو وقت
ت پر دہانہ سے وقت تَ پر چشمہ تک ہے۔ یہ طول مہ (تَ - ت)
ہے اور محوروں کے متوازی اس کے اجزائے ترکیبی
مہ (تَ - ت) جم عا جم طا، مہ (تَ - ت) جب عا جم طا، مہ (تَ - ت) جب طا
ہیں۔ لیکن اِن مقداروں کو اگر چشمہ کے مرکز کے متناظر محددوں میں جمع کیا
جائے تو دہانہ کے محدد حاصل ہونے چاہئیں۔ اِس لیے اگر ہم (۲۵۲)
مہَ = ل / (تَ - ت) لکھیں تو ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں
مہ جم طا جم عا = + مہَ جم طاَ جم عاَ - و جم طاَ جم عاَ، .... (۱)
مہ جم طا جب عا = + مہَ جم طاَ جب عاَ - و جم طاَ جب عاَ، .... (۲)
مہ جب طا = + مہَ جب طاَ - و جب طاَ، .... (۳)
(۲) کو جم عاَ سے ضرب دو اور (۱) کو جب عاَ سے ضرب دیکر اِس میں
سے تفریق کرو تو حاصل ہوگا
مہ جم طا جب (عاَ - عا) = - و جم طاَ جب (عاَ - عا)، ..... (۴)
(۲) کو جب ½ (عا + عاَ) سے ضرب دو اور اِس میں (۱) مضروب
جم ½ (عا + عاَ) کو جمع کرو اور پھر جم ½ (عاَ - عا) سے تقسیم کرو تو حاصل ہوگا
مہ جم طا = مہَ جم طاَ - و جم طاَ جم {عاَ - ½ (عا + عاَ)} قط ½ (عاَ - عا) ... (۵)
نیز (۳) کو جم طاَ سے ضرب دیکر اِسے (۵) مضروب جب طاَ میں سے
تفریق کرو تو حاصل ہوگا
مہ جب (طاَ - طا) = و جب طاَ جم طاَ
- و جم طاَ جب طاَ جم {عاَ - ½ (عا + عاَ)} قط ½ (عاَ - عا)، .... (۶)

اب چونکہ وَ ایک بہت چھوٹی مقدار ہے مساواتوں (۴) اور (۶) کو بہت مختصر کیا جا سکتا ہے۔ اِس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ عَا - عا چھوٹا ہے اور اِس لیے ہم (۴) کے بائیں رکن میں عَا کی بجائے عا رکھ سکتے ہیں اور اس طرح محدد عا پر ضلالت کا اثر شکل

عَا - عا = - و مۃ ا جم طا قط طا جب (عا - عا) ..... (۷)

میں حاصل ہوتا ہے۔ پس عَا - عا معلوم ہوتا ہے اور اس لیے عَا اکثر مقاصد کے لیے کافی طور پر صحیح معلوم ہو جاتا ہے۔ اگر مزید تقرب کی ضرورت ہو مثلاً اُس صورت میں جبکہ طا تقریباً ۹۰° ہو تو ہم عَا کی تقریبی قیمت کو مساوات بالا سے حاصل کر کے مساوات (۴) کی بائیں جانب درج کر سکتے ہیں اور پھر جب (عَا - عا) حاصل کر سکتے ہیں۔

اسی طرح (۶) سے طَا - طا معلوم ہو سکتا ہے۔ پہلا تقرب جو بیشتر صورتوں میں بہت کافی ہے بائیں جانب عَا اور طَا کی بجائے عا اور طا رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔ چنانچہ

طَا - طا = و مۃ ا {جب طا جم طا - جم طا جب طا جم (عا - عا)} ... (۸)

اگر مزید تقرب کی ضرورت ہو تو (۷) اور (۸) سے طَا اور عَا کی تقریبی قیمتیں حاصل کر کے انہیں (۶) کی بائیں جانب داخل کیا جا سکتا ہے۔ اگر ط وہ زاویہ ہو جس کی جیب التمام جب طا جب طا + جم طا جم طا جم (عا - عا) ہے تو و مۃ ا جب ط وہ فاصلہ ہے جتنا ضلالت نے ستارہ کو بظاہر ہٹایا ہے۔

ضابطے (۷) اور (۸) ضلالت کے لیے بنیادی نتیجے ہیں خواہ مشاہد کی حرکت سورج کے گرد زمین کی سالانہ حرکت ہو یا کسی دوسری قسم کی۔ (۵۳)

۸۳ - ضلالت کی مختلف قسمیں -

اُن جملوں سے جو دفعہ ۸۲ میں ہم نے حاصل کیے ہیں یہ معلوم ہوتا ہے کہ ضلالت راس کے محددوں عا، طا پر کس طرح منحصر ہے۔ اگر عا اور طا بدلیں تو ستارہ کے ظاہری مقام پر ضلالت کا اثر بھی بالعموم

بدلے گا۔ اگر عا اور طا دوری طور پر بدلیں تو ستارہ کے ظاہری مقام پر ضلالت کا اثر بھی دوری ہوگا۔ لیکن اگر عا اور طا نہ بدلیں تو ایسی ضلالت کے اثرات ہر ستارہ کے لیے مستقل ہوں گے۔ اِس قسم کی ضلالت بلا شبہ ستارہ کو اُس محل سے ہٹا دے گی جس میں وہ نظر آتا اگر کوئی ایسی ضلالت موجود نہ ہوتی، لیکن وہ ہمیشہ ایک ہی ستارہ کو ٹھیک ایک ہی طریقہ سے ہٹائے گی۔ جب صورت حال یہ ہو تو مشاہدہ سے ضلالت کی مقدار یا اُس کے خود وجود ہی کا انکشاف نہیں ہو سکتا کیونکہ یہ معلوم نہیں ہوتا کہ ستارہ کے محدد کیا ہیں اگر وہ ضلالت سے غیر متاثر ہو۔

جس قسم کی ضلالت کا حوالہ یہاں دیا گیا ہے وہ بلا شبہ موجود ہوتی ہے۔ یہ نظام شمسی کی بحیثیت مجموعی حرکت سے پیدا ہونی چاہئیے۔ جہاں تک ہمارے موجودہ علم کا تعلق ہے اس حرکت کے راس کا محل مستقل معلوم ہوتا ہے اور نیز اس مفروضہ کے خلاف کوئی امر معلوم نہیں ہوتا کہ حرکت کی رفتار یکساں ہے، کم از کم اِن چند صدیوں کی حد تک جن میں صحیح مُشاہدہ ممکن ہو چکا ہے۔ پس اس سبب سے ہر ستارہ کی ضلالت کی مقدار مستقل ہے اور اس کا اثر ستارہ کے مقام کے محددوں میں نا قابل تمیز ہے اور نہ ہم اس ضلالت کی مقدار محسوب کر سکتے ہیں کیونکہ ہم نظام شمسی کی رفتار نہیں جانتے اور نہ راس کا محل کافی صحت کے ساتھ معلوم ہے۔ ہم صرف یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہر ستارہ کا صعود مستقیم اور میل جو ہمیں نظر آتے ہیں اُس صعود مستقیم اور میل سے جو ضلالت کی عدم موجودگی کی صورت میں ہوتے مختلف ہیں اور یہ فرق نامعلوم مقداریں ہیں۔

علم ہئیت میں عملی اہمیت رکھنے والی ضلالتیں وہ ہیں جن میں مُشاہد کی حرکت ایسی ہو کہ کرۂ سماوی پر راس (Apex.) کی حرکت دوری ہو۔ اس طرح کسی ستارہ کے ظاہری محل میں ایک دوری تغیر ہوتا ہے جو بہت ہی اہم اور دل چسپ ہے۔ زمین کی سالانہ حرکت اپنے مدار میں ایسی دوری حرکتوں میں سے ایک ہے اور اس سے وہ ضلالت

(۴۵۲) پیدا ہوتی ہے جو سالانہ ضلالت کے طور پر موسوم ہے۔ دوسری ضلالت زمین کی، اپنے محور کے گرد، گردش سے پیدا ہوتی ہے اور یہ یومی ضلالت کے طور پر مشہور ہے۔ اِن میں سے پہلی بہت زیادہ اہم ہے اور جب کبھی لفظ "ضلالت" بغیر سابقہ "یومی" کے استعمال ہو تو اس سے ہمیشہ سالانہ ضلالت ہی مُراد لینی چاہئے۔

۸۴ — صعود مستقیم اور میل میں ضلالت۔

اب ہم دفعہ ۸۲ کے عام ضابطوں (۷) اور (۸) کو اُن جملوں کے حاصل کرنے میں استعمال کریں گے جو ایک ستارہ کے اُن مخصوص محددوں میں ضلالت کے لئے ہیں جن کو ہم صعود مستقیم اور میل کہتے ہیں۔ اگر کرہ سماوی پر نقطہ (۰°، ۰°)، ۲ ہو اور اگر (۹۰°، ۰°) وہ نقطہ ہو جس کا صعود مستقیم ۹۰° ہے اور (۰°، ۹۰°) شمالی قطب سماوی ہو تو عا، صعود مستقیم عہ ہے اور طا، میل ضہ ہے اور اِس لیے

عَہ - عہ = و مۃ اجم ضہ۔ قط ضہ جب (عہ - عہ)،......(۱)

ضَہ - ضہ = و مۃ {جب ضہ جم ضہ - جم ضہ جب ضہ جم (عہ - عہ)}...(۲)

اِن مساواتوں سے علی الترتیب صعود مستقیم اور میل پر ضلالت کا اثر معلوم ہوتا ہے۔

ہم فی الحال یہ مان لیتے ہیں کہ زمین کا مدار ایک دائرہ ہے۔ دوسرے لفظوں میں ہم زمین کی رفتار کو مستقل اور اُسے اصلی مدار میں اوسط رفتار کے مساوی فرض کر رہے ہیں۔ نسبت و/مہ کو ضلالت کا مستقل کہتے ہیں اور اُسے حسب سابق ک سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ سورج کا طول بلد ٥ ہے تو چونکہ زمین مدار کے مماس کی سمت میں حرکت کر رہی ہے اور طول بلد سورج کی ظاہری حرکت کی سمت میں بڑھتے ہیں اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ راس (Apex.) کا طول بلد ٥ - ۹۰° ہے اور راس کا عرض بلد صفر ہے۔ اِس کی تمثیل کے لیے فرض کرو کہ انقلاب گرما پر وقت ظہر کا ہے۔ چونکہ ظاہری سالانہ حرکت سورج کو ستاروں میں مغرب سے مشرق کی طرف

لیجاتی ہے اِس لیے زمین کی اصلی حرکت جو اِس ظاہری شمسی حرکت کا باعث ہے مشرق سے مغرب کی طرف ہونی چاہیے۔ انقلاب گرمائیں ۷ بوقت ظہر افق کے مغربی نقطہ میں ہے۔ یہ راس ہے اور اِس کا طول بلد صفر ہے لیکن سورج کا طول بلد °۹۰ ہے۔

(۲۵۵) فرض کرو کہ ۷ (شکل ۱۷) راس الحمل کا نقطہ ہے، ا راس ہے اور س سورج۔ تب ۷ س = ہ اور ۷ ا = ہ - °۹۰۔ خط استواء ۷ پ پر عمود ا پ کھینچو۔ تب ا پ = ضہ اور ۷ پ = عہ۔

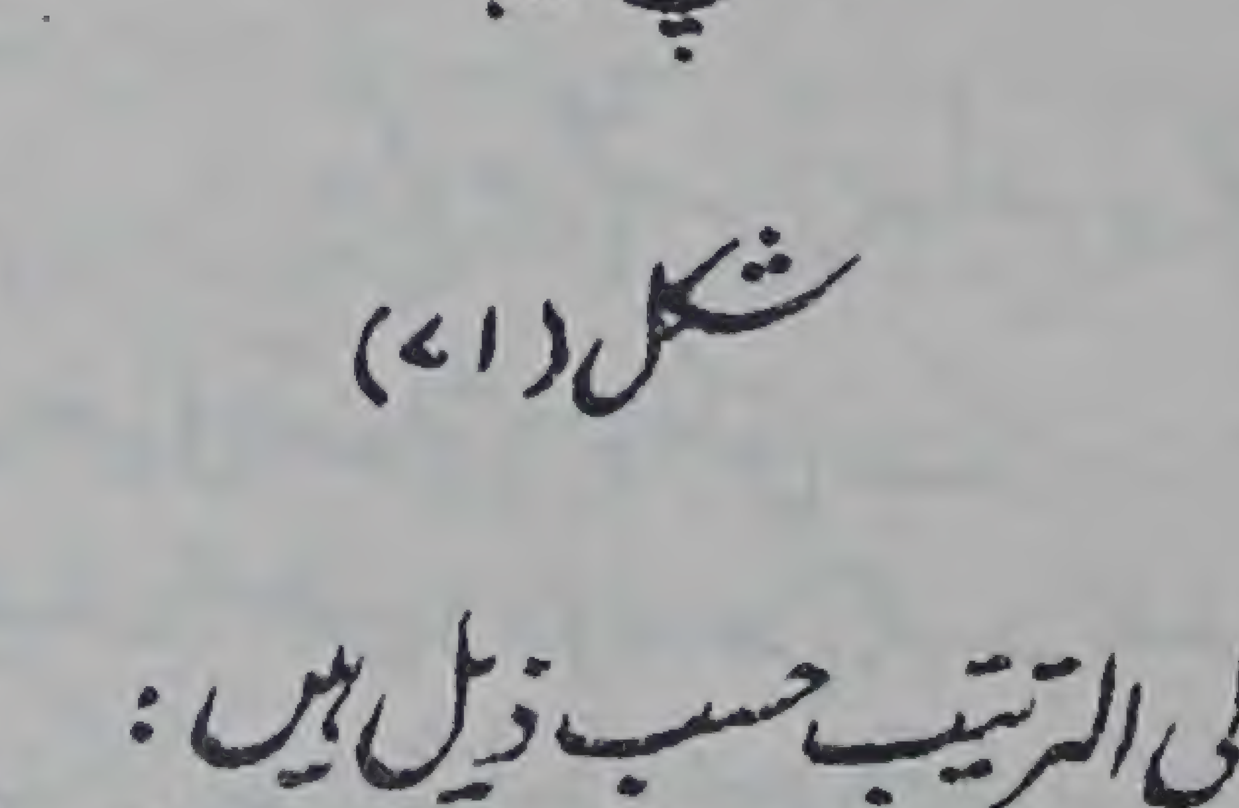
اب قائم الزاویہ مثلث ۷ ا پ سے

جب ضہ = - جم ہ جب سہ،

جم ضہ جم عہ = جب ہ

جم ضہ جب عہ = جم ہ جم سہ

(۱) میں اِن اندراجات کو عمل میں لانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ایک ستارے کے اصلی صعود مستقیم اور میل عہ اور ضہ ہوں، ضلالت کا مستقل ک اور سورج کا طول بلد ہ ہو تو ضلالت سے متاثر ظاہری



شکل (۱۷)

صعودِ مستقیم اور میل علی الترتیب حسب ذیل ہیں:

عہ - ک قط ضہ (جب عہ جب ہ + جم عہ جم سہ جم ہ)، ... (۳)

ضہ - ک (جم ضہ جب سہ جم ہ + جب ضہ جم عہ جب ہ - جب ضہ جب عہ جم سہ جم ہ)، ... (۴)

مثال ۱۔ اگر ایک ستارہ کی ضلالت صعود مستقیم میں غیر متغیر ہو تو ثابت کرو کہ ستارہ کا صعود مستقیم سورج کے صعود مستقیم کے مساوی ہے، اور اگر راس کا صعود مستقیم عہ ہو تو

مس عہ مس عہ + جم^{2} سہ = ۰

جہاں سہ طریق الشمس کا میلان ہے اور عہ ستارہ کا صعود مستقیم۔

اگر صعود مستقیم میں ضلالت غیر متغیر ہے تو (۳) کے تفرقی سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

جب عہ جم ⊙ = جم عہ جم سہ جب ⊙

اس لیے مس عہ = جم سہ مس ⊙ جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ عہ سورج کا بھی صعود مستقیم ہونا چاہیئے۔ بالعموم راس کا صعود مستقیم اور میل یعنی عہ اور ضہ حسب ذیل ہوتے ہیں:

مس$^{-1}$ (مم ⊙ جم سہ)، جب$^{-1}$ (جم ⊙ جم سہ)

اور جب صعود مستقیم میں ضلالت غیر متغیر ہوتی ہے تو مس عہ مس عہ،

مس ⊙ جم سہ مم ⊙ جم سہ = ـ جم^{2} سہ

ہو جاتا ہے۔ نیز اسی صورت میں،

جب ضہ = ـ جم عہ جم سہ جب سہ / (جب^{2} عہ + جم^{2} عہ جم^{2} سہ)$^{\frac{1}{2}}$،

جم ضہ جم عہ = جب عہ / (جب^{2} عہ + جم^{2} عہ جم^{2} سہ)$^{\frac{1}{2}}$،

جم ضہ جب عہ = ـ جم عہ جم^{2} سہ / (جب^{2} عہ + جم^{2} عہ جم^{2} سہ)$^{\frac{1}{2}}$،

اس لیے آسانی سے اس کی تصدیق ہو سکتی ہے کہ

جب ضہ جم ضہ مس (عہ ـ عہ) جم عہ مس سہ = ۱

مثال ۲ ـ اگر ایک ستارہ کا صعود مستقیم اور میل عہ، ضہ ہوں اور اگر سورج کا طول بلد ⊙ اور طریق الشمس کا میلان سہ ہو تو ثابت کرو کہ جب ستارہ کی ضلالت میل میں بڑی سے بڑی ہو تو (۲۵۶)

مس ٥ (جب سہ جم ضہ - جم سہ جب ضہ جب عہ) = جب ضہ جم عہ

دفعہ ۸۱ مثال ا کی رو سے س (شکل ۱۷) کے میل میں ضلالت ک جم ا سَ ہے جہاں ا راس ہے اور س سَ (= °۹۰) قطب ق میں سے گذرتا ہے۔ اگر ا سَ اقل ہے تو اُس کو سَ سے طریق الشمس پر نقطہ ا پر عمود ہونا چاہیئے اور اس لیے اس میں طریق الشمس کا قطب ک ہونا چاہیئے، پس مثلث سَ ک ق سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۳ — ثابت کرو کہ جب میل میں ضلالت اپنی بڑی سے بڑی عددی قیمت پر دَوران سال میں پہنچتی ہے تو کرۂ سماوی پر کی وہ قوسیں جو ستارہ کو سورج سے اور خط استواء کے قطب سے ملاتی ہیں علی القوائم ہوتی ہیں۔

مثال ۴ — ثابت کرو کہ سورج کے ایک دیئے ہوئے محل کے لیے خط استواء پر کے ایک ستارہ کے صعود مستقیم میں ضلالت کم سے کم ہوگی جبکہ

مس عہ = مس ٥ قط سہ

جہاں ستارہ کا صعود مستقیم عہ ہے، سورج کا طول بلد ٥ اور طریق الشمس کا میلان سہ۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ وہ سب ستارے جن کی ضلالت صعود مستقیم میں اُس وقت اعظم ہو جبکہ اِن کی ضلالت میل میں معدوم ہوتی ہے دوسرے رتبہ کے ایک مخروط پر واقع ہیں جس کی دائری تراشیں طریق الشمس اور استواء کے متوازی ہیں یا وہ دائرہ انقلابین پر واقع ہیں۔
[Math. Trip]

چونکہ میل میں ضلالت صفر ہے اس لیے

مس ضہ جم (عہ - عہ) = مس ضہ = مس سہ جب عہ،

اس لیے مس عہ = مس ضہ جم عہ / (مس سہ - مس ضہ جب عہ)،

مس ضہ = مس سہ مس ضہ جم عہ / (مس۲ سہ + مس۲ ضہ - ۲ مس سہ مس ضہ جب عہ)½

لیکن چونکہ صعود مستقیم میں ضلالت اعظم ہے اس لیے بموجب مثال (۱)

جب ضہ جم ضہ مس (عہ - عہ) جم عہ مس سہ = ۱

اور عہ، ضہ کو ساقط کرنے اور تحویل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(مس۲ سہ - ۲ مس سہ مس ضہ جب عہ + مس۲ ضہ) (۱ + مس سہ مس ضہ جب عہ) = ۰

پہلا جزو ضربی صرف اُسی وقت معدوم ہو سکتا ہے جبکہ

جب عہ = ± ۱ اور مس ضہ = جب عہ مس سہ

اس لیے دائرہ انقلابین پر دو نقطے ہیں جو اِس شرط کو پورا کرتے ہیں۔

اگر ہم لا = رجم ضہ جم عہ، ما = رجم ضہ جب عہ، ی = رجب ضہ رکھ کر دوسرے جزو ضربی کو تحلیل کریں تو حاصل ہوتا ہے

لا۲ + ما۲ + ی ما مس سہ = ۰

اِسے لکھہ سکتے ہیں لا۲ + ما۲ + ی۲ - ی (ی - ما مس سہ) = ۰

جو ایک مخروط کی مساوات ہے جس کی دائری تراشیں،

ی = ۰ اور ی - ما مس سہ = ۰

کے متوازی ہیں یعنے خط اُستوا اور طریق الشمس کے متوازی ہیں۔

(۲۵۷) **مثال ۶** ـ ثابت کرو کہ ایک ستارہ کے کسی محدد پر سالانہ ضلالت کا اثر شکل

ا جم (٥ + ۱)

میں بیان کیا جا سکتا ہے جہاں سورج کا طول بلد ٥ ہے اور ا، ۱ مستقل ہیں جو ستارہ کے محل پر منحصر ہیں۔

۸۵ ـ طول بلد اور عرض بلد میں ضلالت۔

دفعہ ۸۲ کا ضابطہ اِس صورت پر لگانے میں ہمیں عا = ٥ - ۹۰° اور طا = ۰ رکھنا چاہیئے۔ اب طول بلد لہ اور عرض بلد بہ علی الترتیب عا اور طا کی جگہ لیتے ہیں اور اسلئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ضلالت ستارہ کے طول بلد کو بقدر

ـ ک قط بہ جم (٥ - لہ)

کے بڑھاتی ہے اور اُس کے عرض بلد کو بھی بقدر

ـ ک جب بہ جب (٥ - لہ)

کے بڑھاتی ہے۔

یہ یاد رہے کہ اِن بیانوں میں یہ مان لیا گیا ہے کہ زمین کا مدار دائری ہے۔

مثال ۱ — دو ستاروں کے درمیان جن کا عرض بلد بہ وہی ہے زاوئی فاصلہ طہ ہے۔ اِن کے طول بلدوں کا اوسط فہ ہے۔ ثابت کرو کہ ضلالت کے باعث طہ میں اضافہ

۲ک مس ½ طہ جب (فہ - ○) (جم² بہ - جب² ½ طہ)^½

[Math. Trip.I.]

ہوگا جہاں ○ سورج کا طول بلد ہے۔

اگر بہ اُس نقطہ کا عرض بلد ہو جو اِن دو ستاروں کی درمیانی قوس کی تنصیف کرتا ہے تو طہ کا اضافہ (دفعہ ۱۸ مثال ۲) ۲ک جب ½ طہ جم بہَ جب (فہ - ○) ہے اور مساوات جب بہ = جب بہَ جم ½ طہ کی مدد سے بہَ کو ساقط کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۲ — ثابت کرو کہ دو ستاروں کا درمیانی فاصلہ جن کے محدد علی الترتیب بہ، لہ اور بہَ، لہَ ہیں ضلالت کی وجہ سے نہیں بدلتا اگر سورج کا طول بلد ○ مساوات

جم بہ جب (○ - لہ) + جم بہَ جب (○ - لہَ) = ۰

کو پورا کرے۔

مثال ۳ — ایک ستارہ کا ظاہری طول بلد اور عرض بلد لہَ اور بہَ دئے گئے ہیں۔ اگر زمین کے مدار کو دائری لیا جائے تو ثابت کرو کہ عرض بلد اور طول بلد میں ضلالتوں کی وہ رقمیں جو ک کے مربع پر منحصر ہیں یہ ہیں

½ ک² جب ۱َ مس بہَ جم ۲ (○ - لہَ)

اور ½ ک² جب ۱َ مس² بہَ جب ۲ (○ - لہَ)

جہاں ○ سورج کا اصلی طول بلد ہے۔ کن ستاروں پر اِن تصحیحوں کا اطلاق ہوگا؟

[Math. Trip. I.]

مثال ۴ — اگر ایک ستارہ کی سمتی جیوب التمام قائم محوروں کے حوالہ سے (لا، ما، ی) ہوں اور اُس نقطہ کی سمتی جیوب التمام جس کی طرف زمین سفر کر رہی ہے (ل، م، ن) ہوں تو ثابت کرو کہ ستارہ کے ظاہری مقام (ضلالت سے متاثر) کی جیوب التمام لا + ک (ل - لا جم طہ) اور دو مشابہ

جملے ہیں جہاں ک = و\مہ (صفحہ ۴) اور جم طہ = ل لا + م ما + ن ی ۔

اگر ایک بڑے دائرہ پر تین نقطے ک۱، ک۲، ک۳ دائرہ پر کے ایک مبداء (۲۵۸)
سے علی الترتیب فاصلوں غہ۱، غہ۲، غہ۳ پر لیے جائیں اور اگر کرہ کے مرکز سے
ک۱، ک۲، ک۳ کی سمتی جیوب التمام علی الترتیب لا۱، ما۱، ی۱؛ لا۲، ما۲، ی۲؛ لا۳، ما۳، ی۳ ہوں تو

لا۱ جب (غہ۲ - غہ۳) + لا۲ جب (غہ۳ - غہ۱) + لا۳ جب (غہ۱ - غہ۲) = ۰،

ما۱ جب (غہ۲ - غہ۳) + ما۲ جب (غہ۳ - غہ۱) + ما۳ جب (غہ۱ - غہ۲) = ۰،

ی۱ جب (غہ۲ - غہ۳) + ی۲ جب (غہ۳ - غہ۱) + ی۳ جب (غہ۱ - غہ۲) = ۰

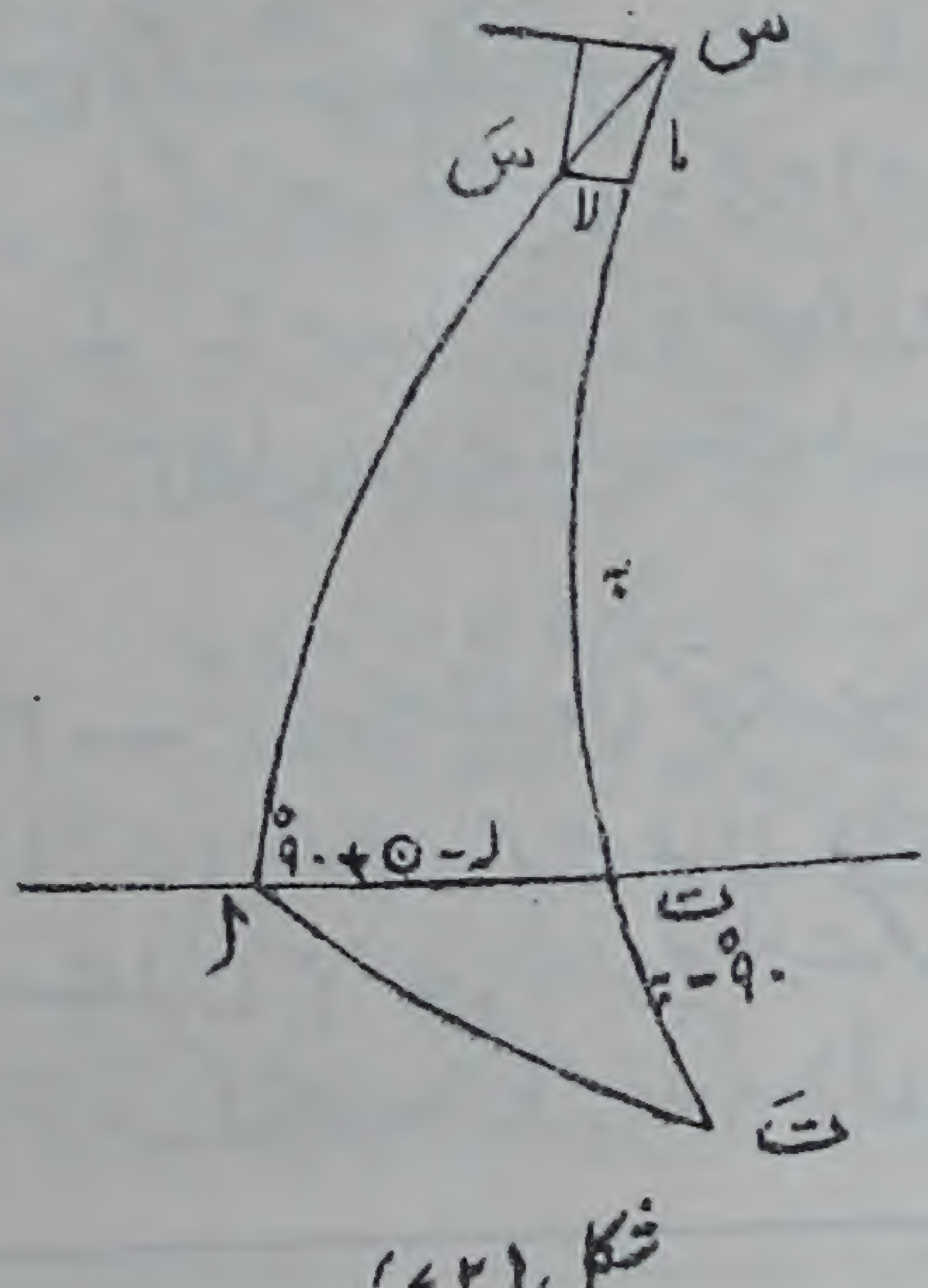
اِسے موجودہ صورت پر لگانے کے لیے ہم رکھتے ہیں

غہ۲ - غہ۳ = ک جب طہ، غہ۳ - غہ۱ = - طہ، غہ۱ - غہ۲ = طہ - ک جب طہ

۸۶ ـــ سالانہ ضلالت کی ہندسی تعبیر۔

اب ہم اُس چھوٹے بند منحنی کی شکل معلوم کریں گے جسکو ستارہ کرۂ سماوی پر ضلالت کی وجہ سے مرتسم کرتا نظر آتا ہے۔

فرض کرو کہ ستارہ کے اصلی مقام س سے طریق الشمس ا ت پر عمود س ت ہے جہاں ا راس[1] ہے (شکل ۷۲)۔ ت کو تَ تک اتنا خارج کرو کہ



شکل (۷۲)

[1] Apex. راس

س ت = ۹۰°

فرض کرو کہ س َ وہ نقطہ ہے جہاں ستارہ ضلالت کی وجہ سے ہٹا ہے تو چونکہ س س َ چھوٹا ہے ہم س َ کے طریق کو ایک مستوی منحنی سمجھ سکتے ہیں۔ اگر س َ کے قائم محدد لا، ما ہوں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے تو دفعہ ۸۱ کی رو سے حاصل ہوتا ہے

ما = ک جم ا ت َ = ک جب (ه - لہ) جب ب،

اور لا = ک جب س ا ب ا س ت = ک جم (ه - لہ)،

اس لیے لا² = ما² قم² ب = ک²

(۲۵۹) پس کسی ستارہ کے ظاہری مقام پر سالانہ ضلالت کے اثر کے متعلق حسب ذیل نتیجے حاصل ہوتے ہیں :-

سالانہ ضلالت کے باعث ہر ستارہ کا ظاہری مقام ایک سال کی مدت میں ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جو ضلالت کے قطع ناقص کے طور پر موسوم ہے۔ اس قطع ناقص کا مرکز ستارہ کا اصلی مقام ہے۔

قطع ناقص کا محور اصغر طریق الشمس پر عمود ہوتا ہے۔

قطع ناقص کا محور اعظم ضلالت کا مستقل ہے اور اس لیے سب ستاروں کے لیے وہی ہوتا ہے۔

اگر ستارہ طریق الشمس پر ہو تو یہ قطع ناقص ایک خط مستقیم ہو جاتا ہے۔

اگر ستارہ طریق الشمس کے قطب پر ہو تو قطع ناقص دائرہ ہو جاتا ہے۔ عام صورت میں قطع ناقص کا محور اصغر ستارہ کے عرض بلد کی جیب اور ضلالت کے مستقل کا حاصل ضرب ہوتا ہے۔

مثال ۱ — یہ مان کر کہ سورج کی حرکت یکساں ہے ثابت کرو کہ چار متصلہ زمانوں پر جو تین تین مہینوں کے وقفوں پر ہوں ستارہ کے ظاہری مقام ضلالت کے قطع ناقص کے مزدوج قطروں کے ایک زوج کے چار سروں پر یکے بعد دیگرے ہو ں گے۔

مثال ۲ — فرض کرو کہ ایک ستارہ کا عرض بلد ب ہے اور اس کا طول البلد لہ ہے۔ ہندسی طور پر ثابت کرو کہ ضلالت کے اثر سے ستارہ بقدر اس فاصلہ کے

ہسٹ جائے گا جو

$$\frac{1}{2} ک^2 \{ ۱ + جب^2 ب + جم^2 ب جم ۲ (ہ - لہ) \}$$

کا بجذر المربع ہے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ ضلالت کا قطع ناقص اُس مماس مستوی پر جو کرۂ سماوی کو ستارہ کے اصلی مقام پر مس کرتا ہے ایک دائرہ کا قائم ظل ہے جو طریق الشمس کے مستوی میں واقع ہے۔

مثال ۴۔ ثابت ستاروں کے ظاہری مقاموں پر سالانہ ضلالت کا اثر پیدا کیا جا سکتا ہے اگر ہر ستارہ، طریق الشمس کے مستوی کے متوازی ایک چھوٹے دائری مدار میں فی الواقع گردش کرے اور اگر زمین ساکن ہو۔

۸۷*[1]۔ زمین کی ناقصی حرکت کا اثر ضلالت پر۔

اب ہم یہ غور کریں گے کہ زمین کے مدار کے خروج المرکز کا اثر سالانہ ضلالت پر کیا ہے۔

فرض کرو کہ سورج کا ارض مرکزی طول بلد حسب معمول ہ ہے تو زمین کا شمس مرکزی طول بلد ۱۸۰° + ہ ہوگا۔ فرض کرو کہ حضیض کا طول بلد حہ ہے اور طہ اصلی بے قاعدگی ہے، اس طرح ہ + ۱۸۰° = حہ + طہ۔ زمین کا سمتی قطر ر ہے اور اگر و، ضہ، عہ کے وہی معنی ہوں جو قبل ازیں انہیں دیے جا چکے ہیں تو ہمیں حاصل ہونا چاہئے

$$\left.\begin{aligned} و جم ضہ جم عہ &= - \frac{فر}{فرت} (ر جم ہ)، \\ و جم ضہ جب عہ &= - \frac{فر}{فرت} (ر جب ہ جم سہ)، \\ و جب ضہ &= - \frac{فر}{فرت} (ر جب ہ جب سہ) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (۱)$$

ان میں سے پہلی مساوات خط ~ ۲ کے متوازی زمین کی رفتار کے (۲۶۰)

[1] جن دفعوں اور مثالوں پر یہ علامت ہے وہ ذرا اعلیٰ اور مشکل ہیں، اسلئے انکو مطالعہ اول میں چھوڑ دیا جا سکتا ہے۔

دو جملوں کو مساوی رکھنے سے حاصل کی گئی ہے۔ تیسری مساوات زمین کے قطبی محور کے متوازی زمین کی رفتار کے جملوں کو مساوی رکھنے سے حاصل کی گئی ہے اور دوسری مساوات اسی طرح اس محور سے حاصل کی گئی ہے جو متذکرہ صدر محوروں پر عمود ہے۔

مساواتوں (۱) سے استفادہ کرنے کے لئے ناقصی حرکت سے

$\frac{فرر}{فرت}$ اور ر $\frac{فر٥}{فرت}$ = ر $\frac{فرط}{فرت}$ کی قیمتیں حاصل کرلینی چاہئیں۔ کپلر کے دوسرے کلیہ سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$ر \frac{فرطہ}{فرت} \propto \frac{۱}{ر} \text{ ، } \quad \text{دفعہ ۵۰}$$

اور اس لیے قطع ناقص کی قطبی مساوات یعنی $ر = \frac{ا(۱ - ز^۲)}{۱ + ز جم طہ}$ سے حاصل ہوتا ہے

$$ر \frac{فرطہ}{فرت} = ج (۱ + ز جم طہ)$$

جہاں ج مستقل ہے۔ اسکو قطع ناقص کی قطبی مساوات کے لوکارثمی تفرقہ میں درج کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{فرر}{فرت} = ج \text{ ز جب طہ}$$

(۱) کو پھیلاؤ اور ان اندراجوں کو عمل میں لاؤ تو

$$و جم ضہ جم عہ = ج \{ - ز جب طہ جم ٥ + جب ٥ (۱ + ز جم طہ) \}$$

$$و جم ضہ جب عہ = ج جم سہ \{ - ز جب طہ جب ٥ - جم ٥ (۱ + ز جم طہ) \}$$

$$و جب ضہ = ج جب سہ \{ - ز جب طہ جب ٥ - جم ٥ (۱ + ز جم طہ) \}$$

اور چونکہ $۱۸۰° + ٥ = طہ + حہ$ اس لیے حاصل ہوتا ہے

د جم ضہ جم عہ = ج (جب ۰ - ز جب حہ)
د جم ضہ جب عہ = ج جم سہ (- جم ۰ + ز جم حہ)
د جب ضہ = ج جب سہ (- جم ۰ + ز جم حہ) .... (۲)

مساواتوں (۱) اور (۲) میں درج کرنے (دفعہ ۸۴) اور ج\مہ = ک رکھنے سے جو ضلالت کا مستقل کہلاتا ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

عَہ - عہ = ک قط ضہ (- جب عہ جب ۰ - جم عہ جم ۰ جم سہ)
+ ک ز قط ضہ (جب عہ جب حہ + جم عہ جم حہ جم سہ)،

اور ضَہ - ضہ = ک (جم سہ جب عہ جب ضہ جم ۰ - جب سہ جم ضہ جم ۰ - جم عہ جب ضہ جب ۰)
+ ک ز (+ جب سہ جم حہ جم ضہ + جب حہ جم عہ جب ضہ - جم سہ جم حہ جب عہ جب ضہ)

چونکہ ز صرف تقریباً ۱/۶۰ ہے یہ ظاہر ہے کہ زمین کے مدار کا خروج المرکز ضلالت پر صرف بہت ہی خفیف اثر رکھتا ہے۔ تاہم اس اثر کی مخصوص نوعیت قابل توجہ ہے۔ عَہ - عہ اور ضَہ - ضہ کے جملوں کی اُن رقموں میں جن میں ز آتا ہے ۰ شامل نہیں ہوتا۔ اس لیے یہ رقمیں دوران سال میں نہیں
بدلتیں اور فی الواقع صدیوں بعد ایسی رقموں میں کچھ قابل التفات تبدیلی (۲۶۱)
پیدا ہوتی ہے۔ اس لیے ان رقموں کا اثر ہر ستارہ کے صعود مستقیم اور میل میں ایسی تبدیلیاں پیدا کرنے کا ہوتا ہے جو اپنی نوعیت میں اس سالانہ اثر سے بالکل مختلف ہیں جو ضلالت کا خاص نتیجہ ہے۔ ہم ان تبدیلیوں کی رعایت اُن قیمتوں کو لیکر رکھ سکتے ہیں جو ابھی ہم نے معلوم کی ہیں لیکن چونکہ وہ متعدد صدیوں تک مستقل رہتی ہیں اس لیے سہولت اس میں ہے کہ ضلالت کے اس حصہ کو اختیار کردہ صعود مستقیم اور میل میں شامل کرلیا جائے۔ پس کیٹلاگ میں ستاروں کے اوسط محدد بہت ہی خفیف حد تک زمین کے مدار کے خروج المرکزی کی وجہ سے بگڑے ہوئے ہوتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک ستارہ کے ظاہری محل جبکہ زمین حضیض اور اوج میں ہو علی الترتیب ف اور ق ہیں۔ ثابت کرو کہ ستارہ کا اصلی محل ف ق میں ایک ایسے نقطہ م پر ہے کہ ف م : م ق = ۱ + ز : ۱ - ز جہاں ز زمین کا خروج المرکز

ہے۔ ثابت کرو کہ ف ق، قطع ناقص کے اُس قطر کا مزدوج ہے جو ناقص کے مرکز اور زمین کے مدار کے اوجین میں سے گذرتا ہوا ایک بڑا دائرہ کھینچنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۲ ۔ اگر اس مفروضہ کی بجائے کہ زمین کا مدار اوسط نصف قطر کا ایک دائرہ ہے یہ مفروضہ اختیار کیا جائے کہ اس کا مدار ایک قطع ناقص ہے تو ثابت کرو کہ ایک ستارہ کی صورت میں اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ (۱) طریق الشمس میں جو نقطہ سورج سے ۹۰° پیچھے ہے اُس طرف کے ہٹاؤ میں مستقل کی ترمیم کی جائے اور (۲) ایک مستقل ضلالتی ہٹاؤ کو ستارہ کے اوسط محل میں شامل سمجھا جائے جو (ہٹاؤ) طریق الشمس کے اُس نقطہ کیجانب ہے جسکی سمت جو مدار کے خط اوجین کے علی القوائم ہے۔

مثال ۳ ۔ ثابت کرو کہ ضلالت کا مستقل ج ا مہ (دیکھو صفحہ ۲۰) ۲ π ا \ مہ ت (۱ ۔ ز۲)^۱/۲ جب اُ ہے جہاں ا اوسط فاصلہ، ت مدت دوران زمین کے مدار کا خروج المرکز اور مہ نور کی رفتار ہے۔

مثال ۴ ۔ ناقصی حرکت کے ایک مشہور مسئلہ کی رُو سے سورج س کے لحاظ سے مشاہد پ کی اضافی رفتار دو رفتاروں کا مرکب ہوتی ہے (۱) س پ عمود دار رفتار ج اور (۲) محور اعظم پر عمود دار رفتار ز ج جہاں ج صفحہ (۲۰) پر کا مستقل ہے۔ اِس سے مساواتیں (۲) اخذ کرو۔

۸۸ ۔ ضلالت کے مستقل کی تعیین ۔

ضلالت کے مستقل کی تحقیق اِس زمانہ میں ستاروں کے راسی فاصلوں کے مشاہدہ پر اکثر مبنی ہوتی ہے اور خاص خاص ستارے اس مسئلہ کی ضرورتوں کو پورا کرنے کے لیئے منتخب کیے جاتے ہیں۔ ہم ایک سادہ صورت لینگے جس میں صرف دو ستارے استعمال کیئے جاتے ہیں۔

(۲۶۲) فرض کرو کہ س۱ اور س۲ دو ستارے ہیں جو نصف النہار کو راس سے حتی الامکان قریب ایک راس سے قدرے شمال میں اور دوسرا قدرے

جنوب میں تکبد کرتے ہیں۔ ایسے ستارے منتخب کرنا چاہیئے کہ اِن کے صعود مستقیموں کے درمیان فرق تقریباً ۱۲ گھنٹے ہو۔ دونوں ستاروں کے راسی فاصلوں کے پہلے مشاہدے اُس دن ہونے چاہئیں جبکہ س۱ کا بالائی تکبد بوقت ۶ ب۔ ن واقع ہو اور س۲ کا بالائی تکبد اسی دن بوقت ۶ ب۔ ظ واقع ہو۔ اِن مشاہدوں کو چھ ماہ بعد کے مشاہدوں کے ساتھ ملانا چاہیئے جبکہ س۱ کا تکبد بوقت ۶ ب۔ ظ اور س۲ کا تکبد بوقت ۶ ب۔ ن واقع ہو۔ یہ شرطیں بمشکل پوری ہو سکتی ہیں لیکن اِن سے صحیح نتیجہ حاصل کرنے کے لیے ایک مکمل ترین اسکیم ملتا ہے جبکہ صرف دو ستارے استعمال کئے گئے ہوں۔ اِن ضرورتوں کے وجوہ ذیل میں واضح کئے جائیں گے۔

فرض کرو کہ سال کے آغاز میں س۱ کے صعود مستقیم اور میل کی اوسط قیمتیں عہ، شہ ہیں جو کسی معیاری کیٹلاگ سے لی گئی ہیں۔ ستاروں کے مقام خواہ کتنی ہی عمدگی سے معلوم کیے جائیں تاہم انہیں کچھ نہ کچھ حد تک خطادار فرض کرنا چاہیئے۔ بلاشبہ محددوں کی خطائیں بہت چھوٹی ہوتی ہیں اور بیشتر مقاصد کے لیے بالکل نظر انداز کی جا سکتی ہیں لیکن وہ چھوٹی خطائیں جو ستاروں کے اختیار کردہ میلوں میں ناگزیر ہیں ضلالت کے سر کو متعین کرنے میں جس کا انحصار میل پر ہے بگاڑ پیدا کرنے کے لیے کافی ہیں۔ زیرِ بحث طریقہ میں مشاہدات اِس طرح مرتب کیے جاتے ہیں کہ میل نتیجہ سے خارج ہوتے ہیں اور اس لیے اِن کی خطائیں اثر سے خالی ہوتی ہیں۔

ہم فی الحال یہ مان لیں گے کہ ضلالت کے مستقل کی ایک تقریبی قیمت معلوم ہے۔ مثلاً ہم اِس مستقل کو ۲۰ء۵″ + ک لے سکتے ہیں جہاں ک، ایک ثانیہ کی بہت ہی چھوٹی کسر ہے۔ اب تحقیق کا موضوع ک کی تعیین ہے۔ اِس ترکیب سے یہ سہولت پیدا ہوتی ہے کہ وہ مقدار جس کی تلاش ہے ضلالت کی کل مقدار کے مقابلہ میں بہت چھوٹی ہے اور اس لیے اُن سروں کے محسوب کرنے میں جن کو ک سے ضرب دینا ہوتا ہے تقریبی

طریقوں کے استعمال کی اجازت ہوگی جو جائز نہ ہوتے اگر ان سروں کو ایک بہت چھوٹی مقدار کے سوا کسی اور مقدار سے ضرب دینا پڑتا۔
پہلا عمل مشاہدوں کے دِنوں کے لیے س۱ اور س۲ کے ظاہری مقاموں کو اخذ کرتا ہے۔ استقبال اور کبو کو معلومہ عملوں کے ذریعہ محسوب کرلینا چاہیئے۔ نیز ضلالت کا حساب سر کی تقریبی قیمت ۲۰٫۵ استعمال کرکے لگانا چاہیئے۔ اِس طرح پہلے دن س۱ کے میل کیلئے جو تصحیح حاصل ہوگی اُسے ہم پ۱ سے تعبیر کریں گے۔ یہ تصحیح مکمل ہے سوائے اِس کے کہ ہم نے ضلالت کے مستقل کی ایک غیر صحیح قیمت استعمال کی ہے۔ اس لیے ہمیں پ۱ میں آ۱ک۱ کا اضافہ کرنا چاہیئے جہاں آ۱، و مۃ۱ کا وہ سر ہے جو مساوات (۱) دفعہ ۸۴ میں دیا گیا ہے۔ پس (۲۶۳)
ہم دیکھتے ہیں کہ مشاہدہ کے پہلے دن س۱ کا ظاہری میل ضہ۱ + پ۱ + آ۱ک۱ ہے۔ ہم حسب تشریح بالا یہ تسلیم کرلیتے ہیں کہ ضہ۱ میں ایک نامعلوم خطا ہوسکتی ہے۔

فرض کرو کہ مشاہدہ شدہ راسی فاصلہ ی ہے جو انعطاف سے بَری کرلیا گیا ہے (چھٹا باب)۔ اب چونکہ عرض بلد فہ، راسی فاصلہ (اس صورت میں جنوبی) اور میل کا مجموعہ ہوتا ہے اِس لیے

فہ = ی۱ + ضہ۱ + پ۱ + آ۱ک ...... (۱)

اُسی دن ۱۲ گھنٹوں بعد ہم دوسرے ستارہ کا مشاہدہ کرتے ہیں اور چونکہ اِس اثناء میں عرض بلد فہ میں کوئی قابل قدر تغیر نہیں ہوگا اسلیے دوسری مساوات ہے:

فہ = ی۲ + ضہ۲ + پ۲ + آ۲ک ...... (۲)

جہاں لاحقوں کی تبدیلیوں کا یہ منشا ہے کہ یہ ضابطہ دوسرے ستارہ سے تعلق رکھتا ہے۔ چھ ماہ بعد انہی ستاروں پر مشاہدوں کو دُہرانا چاہیئے اور اُس وقت فرض کرو کہ عرض بلد فہَ ہوگیا ہے جو بالعموم بعض صغیر دَوری تبدیلیوں کے باعث فہ سے مختلف ہوگا (دفعہ ۶۱)۔ مشاہدہ کے

اس دوسرے زمانہ میں رہی فاصلے مختلف ہوں گے اور اسی طرح پ، پ، ا، ا بھی مختلف ہوں گے لیکن ضہ اور ضہ چونکہ آغاز سال پر سیلونی کی اوسط قیمتیں ہیں اس لیے دونوں زمانوں میں وہی ہوں گے۔ پس اس دوسرے زمانہ سے متعلق مقداروں کی شناخت کے لیے زبر زدہ حروف استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فہ}' = \text{ی}'_1 + \text{ضہ}_1 + \text{پ}'_1 + \text{ا}'_1\,\text{ک}_1 \quad \ldots\ldots (۳)$$

$$\text{فہ}' = \text{ی}'_2 + \text{ضہ}_2 + \text{پ}'_2 + \text{ا}'_2\,\text{ک}_1 \quad \ldots\ldots (۴)$$

مساواتوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) سے ک کے لیے حسب ذیل مساوات آسانی کے ساتھ حاصل ہوتی ہے:

$$\text{ی}_1 - \text{ی}_2 - \text{ی}'_1 + \text{ی}'_2 + \text{پ}_1 - \text{پ}_2 - \text{پ}'_1 + \text{پ}'_2 + (\text{ا}_1 - \text{ا}_2 - \text{ا}'_1 + \text{ا}'_2)\,\text{ک}_1 = ۰$$

اور اس لیے ضلالت $۲۰٫۵'' + \text{ک}_1$ ہے جہاں

$$\text{ک}_1 = -\frac{\text{ی}_1 - \text{ی}_2 - \text{ی}'_1 + \text{ی}'_2 + \text{پ}_1 - \text{پ}_2 - \text{پ}'_1 + \text{پ}'_2}{\text{ا}_1 - \text{ا}_2 - \text{ا}'_1 + \text{ا}'_2}$$

شمار کنندہ اور نسب نما دونوں معلومہ مقداریں ہیں، اس لیے ک معلوم ہو جاتا ہے۔

(۲۶۴) اگر پ، پ، پ، پ کے محسوب کرنے میں ضلالت کے لیے کوئی رعایت نہیں رکھی گئی ہے تو ضابطہ بالا سے اس کی تقریبی قیمت حاصل ہوگی اور تقریبی قیمت ۲۰٫۵″ جو ہم نے استعمال کی ہے اس طور پر حاصل کردہ سمجھی جا سکتی ہے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ضابطہ بالا میں ضہ اور ضہ دونوں عدم موجود ہیں۔ اس لیے اگر یہ مقداریں چھوٹی خطاؤں سے متاثر ہوں جیسا کہ بالعموم ہوگا تو بھی یہ خطائیں ک میں کوئی خطا پیدا نہیں کریں گی سوائے اس حد کے جس حد تک ا، پ وغیرہ ضہ کی اختیار کردہ قیمتوں پر منحصر ہوں

نیز چونکہ فہ اور فہَ دونوں بھی عدم موجود ہیں اِس لیے پہلے یا آخری کسی زمانہ میں عرض بلد سے متعلق کوئی ابہام بھی بہت ہی خفیف اثر رکھے گا۔

ک۱ کے جملہ میں جو خطائیں داخل ہوتی ہیں وہ مُشاہدوں کی خطائیں ہیں جو مشاہدہ کردہ مقداروں ی۱، ی۲، یَ۱، یَ۲ کی وجہ سے ہیں۔ یہ خطائیں ک۱ کی قیمت کو جس حد تک متاثر کریں گی اُس کا انحصار نسب نما ا۱ - ا۲ - اَ۱ + اَ۲ پر ہے۔ اگر یہ نسب نما بڑا ہے تو وہ مقدار بڑی ہوگی جس سے یہ خطائیں تقسیم ہوں گی اور اِس لیے نتیجہ پر مشاہدہ کی خطاؤں کا اثر کمتر ہوگا۔ پس مشاہدہ کو اس طرح ترتیب دینا چاہیے کہ یہ نسب نما اتنا بڑا ہو جتنا حالات کے تحت ممکن ہے۔ سب سے زیادہ موزوں ترتیب حاصل کرنے کے لیے ہم ا۱، ا۲، اَ۱، اَ۲ کی تقریبی قیمتیں استعمال کر سکتے ہیں اگرچہ ک۱ کی حقیقی تعئین میں اصلی قیمتیں استعمال کرنی چاہئیں۔

چونکہ ستارے راس کے قریب تکبُد کرتے ہیں اس لیے موجودہ مقصد کے لیے یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ اِن کے میل عرض بلد فہ کے مساوی ہیں اور اِس لیے ہمیں حاصل ہوتا ہے (دفعہ ۸۴)

ا۱ = جب ضبہ جم فہ - جم ضبہ جب فہ جم (عہ۱ - عبہ)

ا۲ = جب ضبہ جم فہ - جم ضبہ جب فہ جم (عہ۲ - عبہ)

ا۱ - ا۲ = جم ضبہ جب فہ {جم (عہ۲ - عبہ) - جم (عہ۱ - عبہ)}

= ۲ جم ضبہ جب فہ جب ½ (عہ۱ - عہ۲) جب ½ (عہ۱ + عہ۲ - ۲ عبہ)

اسی طرح

اَ۱ - اَ۲ = ۲ جم ضبَہ جب فہَ جب ½ (عہ۱ - عہ۲) جب ½ (عہ۱ + عہ۲ - ۲ عبَہ)

جہاں عبَہ، ضبَہ دوسرے مشاہدہ کے وقت راسؔ کا محل ہے۔
چونکہ راسؔ طریق الشمس پر ہے اِس لیے جم ضبہ اور جم ضبَہ کی انتہائی حدود ۰۰۱ء اور ۹۲ء۰ ہیں۔ اِس لیے کافی صحت کے ساتھ ہم لے سکتے ہیں: (۲۶۵)

جم ضبہ = جم ضبَ = ۰٫۹۶

نیز یہ کہنے کی چنداں حاجت نہیں ہے کہ ہم زیر بحث مقصد کے لیے فہ = فہَ لے سکتے ہیں اور اس لیے

(ا۱ - ا۲) - (اَ۱ - اَ۲)

= ۴ جم ضہ جب فہ جب ½ (عم۱ - عم۲) جب ½ (عبَ - عبہ) جم ½ (عم۱ + عم۲ - عبہ - عبَ)

اسے عدداً حتی الامکان بڑا بنانے کے لیے ہم اول رکھتے ہیں

جب ½ (عم۱ - عم۲) = ± ۱

اس لیے عم۱ - عم۲ = ۱۸۰° یعنے ایک ستارہ کے صعود مستقیم اور دوسرے ستارہ کے صعود مستقیم میں فرق ۱۲ گھنٹے ہونا چاہیئے۔ اسی طرح جزو ضربی جب ½ (عبَ - عبہ) کو حتی الامکان بڑا بنانے کے لیے سورج کو مشاہدوں کے ان دو زمانوں کے درمیان صعود مستقیم میں ۱۸۰° حرکت کرنا چاہیئے اور اس لیے طول بلد میں ۱۸۰° حرکت کرنا چاہیئے۔ اس کے لیے یہ ضروری ہے کہ مشاہدوں کا درمیانی وقفہ چھ ماہ کا ہو۔ جزو ضربی جم ½ (عم۱ + عم۲ - عبہ - عبَ) کی بڑی سے بڑی قیمت ایک ہوگی اور اس صورت میں جب (عم۱ + عم۲ - عبہ - عبَ) صفر ہوگا یعنی

جب { (عم۱ - عم۲) + (عبہ - عبَ) + ۲ (عم۲ - عم۱) } = ۰

اسے پھیلانے اور محصلہ شرطوں کو ملحوظ رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب ۲ (عم۲ - عبہ) = ۰ ۔ یہ شرط پوری ہوگی اگر عم۲ = عبہ جس کے لیے یہ ضروری ہے کہ دو ستارے اس ساعتی دائرہ پر واقع ہوں جو راس کے دو تحت قدمی محلوں میں سے گذرتا ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلا کہ حالات موافق ترین ہونگے جبکہ ایک ستارہ تقریباً ۶ ب - ن پر اور دوسرا تقریباً ۶ ب - ظ پر تکبند کرے۔

ضلالت کے مستقل کو معلوم کرنیکے اس طریقہ میں دوسرے طریقوں کی طرح بہت سی مشکلیں ہیں اور اس لیے جو نتیجے ابتک حاصل ہوئے ہیں وہ اس قدر بہتر نہیں ہیں جیسے کہ ہیئتی کام کی موجودہ حالت میں جس میں نتیجوں کی صحت کا خاص اہتمام ہوتا ہے ہونے چاہئیں۔ چنانچہ اس مستقل کی ٹھیک قیمت قوس کے ثانیہ کے سویں حصوں میں بیان نہیں کیجا سکتی لیکن ابتک جو تجربے کیے جا چکے ہیں ان میں سے بہتریں تجربوں سے معلوم ہوتا ہے کہ ضلالت کے مستقل کی قیمت ۲۰٫۴۷″ کے بہت قریب ہونی چاہئے۔

۸۹ - یومی ضلالت - اب ہم ضلالت کی اس مخصوص قسم پر غور کریں گے جو مشاہد کی حرکت سے جو زمین کی یومی حرکت کا نتیجہ ہے پیدا ہوتی ہے۔ اس ضلالت کو "یومی" کہا گیا ہے تاکہ اس میں اور سالانہ ضلالت میں جو یومی ضلالت سے کہیں زیادہ اہم ہے اور جو ابتک ہماری بحث کا موضوع رہی ہے امتیاز پیدا ہو۔

عرض بلد فہ پر زمین کی گردش کی وجہ سے مشاہد کی رفتار ۴۶۳ جم فہ میٹر فی ثانیہ ہے اور چونکہ نور کی رفتار تقریباً ۳۰۰۰۰۰ کیلومیٹر فی ثانیہ ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ یومی ضلالت کا سر (۲۶۶)

$$۴۶۳ \text{ قم } ۱'' \text{ جم فہ} \bigg/ ۳۰۰۰۰۰ = ۰٫۳۲'' \text{ جم فہ}$$

ہے۔ یہ سر اس قدر چھوٹا ہے کہ یومی ضلالت کو ہمیشہ نظر انداز کیا جا سکتا ہے سوائے اُن صورتوں کے جہاں بہت زیادہ صحت مطلوب ہو۔

یومی گردش مشاہد کو افق کے نقطہ مشرق کی طرف لی جاتی ہے۔ اس لیے ضہ = ۰ اور عہ = عہ = ۹۰° + س جہاں س ستارہ کا مغربی ساعتی زاویہ ہے۔ دفعہ ۸۴ میں ان اندراجوں کو عمل میں لانے سے معلوم ہوتا ہے کہ ستارہ کا صعود مستقیم اور میل یومی ضلالت سے متاثر ہونے کے بعد حسب ذیل ہو جاتے ہیں

عہ + ۰٫۳۲″ جم فہ جم س قط ضہ،

ضہ + ۳۲ ء ۰ً جم فہ جیب س جیب ضہ

جب ستارہ نصف النہار پر ہو تو س = ۰ اور میل میں یومی ضلالت کا اثر صفر ہے لیکن مرور میں ۰۲۱ . ۰ ثا جم فہ قط ضہ کی دیر واقع ہوگی۔ نچلے نصف النہاری مروروں کے لیے س = ۱۸۰° اور مرور میں ۰۲۱ . ۰ ثا جم فہ قط ضہ کی سرعت واقع ہوگی۔

کسی ایسے ستارہ کے راسی فاصلہ پر جو نصف النہار پر نہ ہو یومی ضلالت کا اثر معلوم کرنے کے لیے مساوات

جم ی = جیب فہ جیب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س

کو تفرق کرو اور فرس اور فرضہ کی بجائے علی الترتیب قیمتیں - ۳۲ ء ۰ً جم فہ جم س قط ضہ اور + ۳۲ ء ۰ً جم ضہ جیب س جیب ضہ رکھو تو حاصل ہوگا

فری = - ۳۲ ء ۰ً جم فہ جم ضہ جیب س جم ی

مثال ۱ — ثابت کرو کہ ایک مشاہد کو جو عرض بلد فہ میں ہے میل ضہ کا ایک ستارہ یومی ضلالت کے باعث ایک قطع ناقص میں حرکت کرتا نظر آئیگا جس کے نیم محور م جم فہ اور م جم فہ جیب ضہ ہیں جہاں م وہ نسبت ہے جو زمین کے محیط کو نور کے ایک دن میں طے کردہ فاصلہ کے ساتھ ہے اور جہاں زاوئے دائری ناپ میں پیمائش کیے گئے ہیں ۔ [Coll. Exam.]

مثال ۲ — ثابت کرو کہ ایک ستارہ کا مشاہدہ کردہ فاصلہ راس ی پر یومی ضلالت کے اثر کی رعایت اس طرح رکھی جاسکتی ہے کہ مشاہدہ کے وقت میں سے ت جم ی کو تفریق کیا جائے جہاں ت ثانیوں میں وہ وقت ہے جو نور زمین کے نصف قطر کے مساوی فاصلہ طے کرنے میں لیتا ہے ۔ [Math. Trip. 1.]

۹۰* — ستیاروی ضلالت ۔

ابتک ہم نے یہ مان لیا تھا کہ وہ ستارہ جس کی ضلالت زیر بحث تھی خود ساکن تھا ۔ لیکن اگر ستارہ حرکت میں ہو تو یہ ظاہر ہے کہ محصلہ ضابطو ںمیں

کچھ ترمیم ہونی چاہئے ۔ وہ عام اصُول جس پر سیاروی ضلالت کا انحصار ہے (۲۶۷)
نور کے جسیمی (Corpuscular.) نظریہ کو فی الحال مان لینے سے بہترین طریقہ پر واضح ہو سکتا ہے ۔

فرض کرو کہ وقت ت. پر ایک سیارہ کے محدد لا.، با.، ی. ہیں اور سیارہ کی رفتار کے اجزائے ترکیبی لاَ، باَ، یَ ہیں ۔ فرض کرو کہ وقت ت. پر زمین کے محدد لا، ما، ی ہیں اور اس کی رفتار کے اجزائے ترکیبی لاَ، ماَ، یَ ۔ ہم فرض کریں گے کہ یہ اجزائے ترکیبی اس وقفہ میں غیر متغیر رہتے ہیں جس میں نور سیارہ سے زمین تک سفر کرتا ہے، دوسرے لفظوں میں میں ہم اس چھوٹے وقفہ میں دونوں جسموں کے مداروں کے انحناؤں کو اور رفتار کی تبدیلیوں کو نظر انداز کرتے ہیں ۔ فرض کرو کہ نور کی ایک شعاع وقت ت. پر نقطہ لا.، با.، ی. سے جسے ایک ثابت نقطہ سمجھا گیا ہے چلتی ہے اور اس کی رفتار کے اجزائے ترکیبی لاَ، ماَ، ےَ ہیں ۔

چونکہ نور کی شعاع جسے سیارہ سے ایک مرئی سمجھا گیا ہے ایک ایسی رفتار سے ابتدا کرے گی جس کے اجزائے ترکیبی لاَ + لاَ.، ماَ + باَ.، ےَ + یَ. ہیں اس لیے وقت تہ میں وہ ایسے مقام پر پہنچے گی جسکے محدد

لا. + (لاَ + لاَ.) تہ، با. + (ماَ + باَ.) تہ، ی. + (ےَ + یَ.) تہ

ہیں اور اگر شعاع زمین پر پہنچے تو حاصل ہونا چاہئے

لا. + (لاَ + لاَ.) تہ = لا + لاَ تہ ،

با. + (ماَ + باَ.) تہ = ما + ماَ تہ ،

ی. + (ےَ + یَ.) تہ = ی + یَ تہ

اِن مساواتوں کو شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے

لا. + لاَ تہ = لا + (لاَ - لاَ.) تہ ،

ا + مَا تہ = ما + (مَا - مَا) تہ ،

یٖ + ـَـے تہ = ی + (یَ - یٖ) تہ

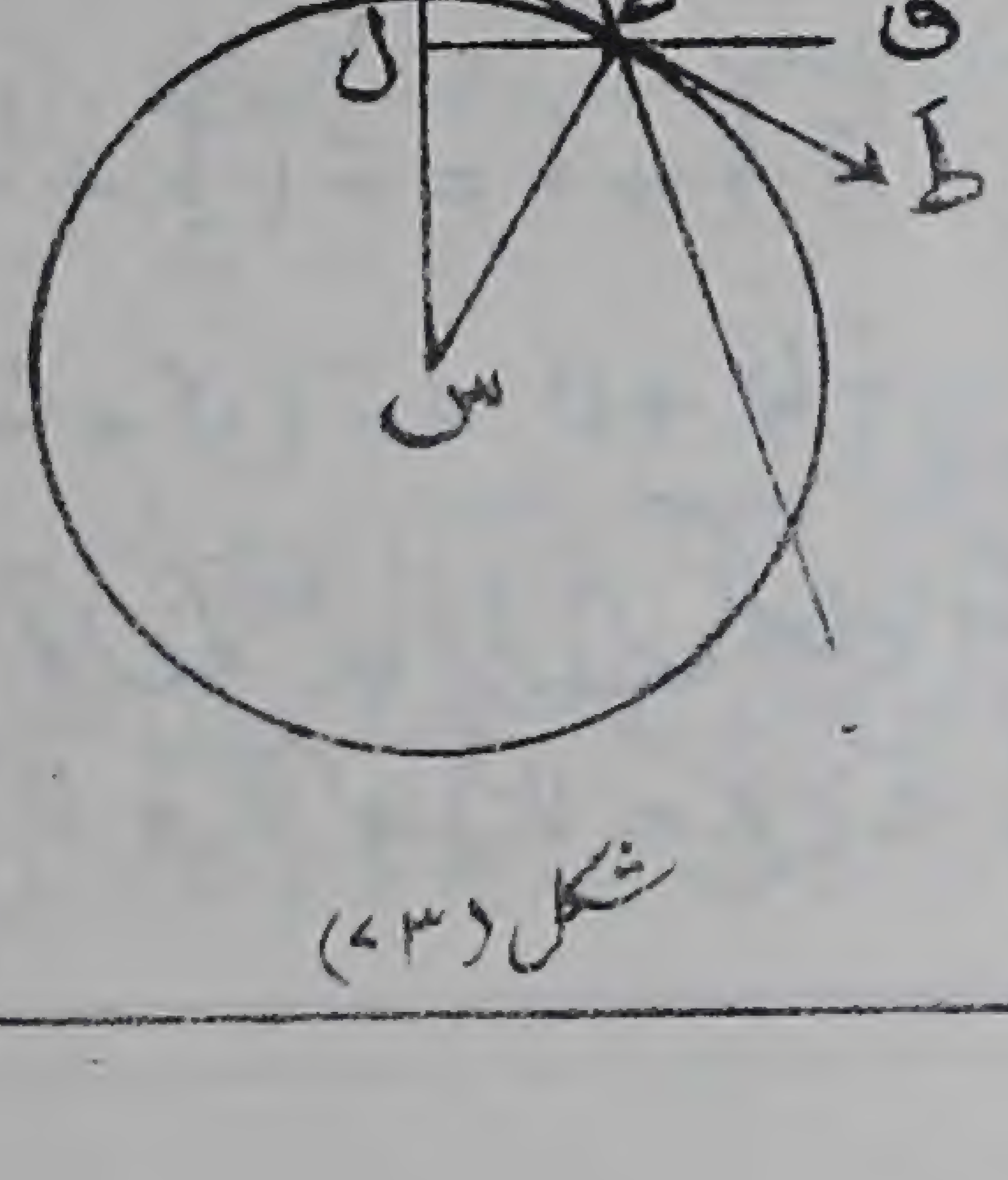
اِس سے ثابت ہوتا ہے کہ سیّاروی ضلالت محسوب ہو سکتی ہے اگر زمین کی حقیقی رفتار کے ساتھ ایک ایسی رفتار مرکب کی جائے جو سیارہ کی رفتار کے مساوی اور مخالف ہو اور پھر سیّارہ کو ساکن سمجھا جائے۔

جن ضابطوں پر ہم یہاں پہنچے ہیں وہ اُس وقت بھی درست ثابت کئے جا چکے ہیں جبکہ نور کا موجی (Undulatory) نظریہ اختیار کیا جاتا ہے۔

یہ کافی ہے کہ زمین اور ایک سیارہ کی صورت لیجائے جن کے متعلق یہ مان لیا جاتا ہے کہ وہ دائری مداروں میں جو ایک ہی مُستوی میں ہیں یکساں رفتار سے حرکت کر رہے ہیں۔

(۲۶۸) فرض کرو کہ س (شکل ۷۳) سورج ہے، ت زمین ہے جو س ت کے علی القوائم سمت ت تَ میں رفتار و سے حرکت کر رہی ہے۔ سیارہ ط، مماس ط طَ کی سمت میں رفتار و √(ر / رَ) کے ساتھ حرکت کر رہا ہے جہاں ر اور رَ، س ت اور س ط کو تعبیر کرتے ہیں۔

سورج سے سیارہ کا ابتعاد جبکہ اِسے زمین سے دیکھا جائے زاویہ س ت ط ہے اور سورج سے زمین کا ابتعاد جبکہ اِسے سیارہ سے دیکھا جائے زاویہ س ط ت ہے۔ ہم اِن ابتعادوں کو ن اور ث سے تعبیر کرینگے۔



شکل (۷۳)

اگر ہم اختصار کے مدنظر و $\sqrt{ا/ر} \backslash \sqrt{ا/رَ}$ کو وَ لکھیں تو وَ کے
اجزائے ترکیبی خطوط ت تَ اور ت س کے متوازی علی الترتیب
- وَ جم (نا + ث) اور + وَ جب (نا + ث) ہیں ۔ سیاروی ضلالت
حاصل کرنے کے لیے اِن رفتاروں کو بہ تبدیل علامت، زمین کی اُس رفتار
کے ساتھ مرکب کرنا ہوگا جس کے اجزائے ترکیبی اُس وقت

و + وَ جم (نا + ث)، ت سے تَ کی جانب

اور - وَ جب (نا + ث)، ت سے س کی جانب

ہیں ۔

اگر ت تَ اور ت س، محوروں لا اور ما کی مثبت
سمتیں ہوں تو دفعہ ۸۲ کی مساواتوں (۱) اور (۲) میں ظا = ۰، ظاَ = ۰
ظاَ = ۰، عا = ۹۰ - نا، عاَ = ۹۰ - ناَ، وجم عا = و + وَ جم (نا + ث) اور
وجب عا = - وَ جب (نا + ث) رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

مہ جب نا = مَہ جب ناَ - و - وَ جم (نا + ث)

مہ جم نا = مَہ جم ناَ + وَ جب (نا + ث)

اِس لیے مہ کو ساقط کرنے سے اور یہ یاد رکھنے سے کہ ناَ - نا بہت
چھوٹا ہے

مہ جب (ناَ - نا) = وجم نا + وَ جم ث (۲۶۹)

فرض کرو کہ فاصلہ ر. پر اِس نظام کا ایک سیارہ و. ہے تو

$$و = و. \sqrt{ا/ر.} \backslash \sqrt{ا/ر} \text{، } وَ = و. \sqrt{ا/ر.} \backslash \sqrt{ا/رَ}$$

اِس ابدال کو عمل میں لانے سے سیاروی ضلالت (ناَ - نا) کیلئے
حاصل ہوتا ہے

$$ناَ - نا = \frac{و.}{مہ} \sqrt{ا/ر.} \left(جم نا \backslash \sqrt{ا/ر} + جم ث \backslash \sqrt{ا/رَ} \right)$$

سیاروی ضلالت کے لیے یہ تصحیح جب عائد کی جاتی ہے تو سیارہ کا

وہ محل حاصل ہوتا ہے جہاں نور کی شعاع نے اُسے چھوڑا تھا۔ لیکن یہ محل اُس وقت جبکہ مشاہدہ کیا گیا سیارہ کا حقیقی محل نہیں ہوگا بلکہ اس کا وہ محل ہوگا جو مشاہدہ سے ۴۹۸٫۵ ثانیہ × ف قبل اس نے اختیار کیا تھا جہاں ف، سیارہ کا زمین سے فاصلہ ہے جو سورج کے اوسط فاصلہ کی رقوم میں بیان کیا گیا ہے، اِس کی وجہ یہ ہے کہ ۴۹۸٫۵ ثانیہ وہ وقت ہے جو نور سورج کے اوسط فاصلہ کے مساوی فاصلہ طے کرنے میں لیتا ہے۔

مثال ۱ — دو سیاروں کے مدار دائری اور ایک ہی مستوی میں ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر اِن میں سے کسی ایک کے محل میں (جب اُسکو دوسرے سے دیکھا جائے) کوئی ضلالت نہ ہو تو اِن کو ملانے والے خط کا فاصلہ سورج سے اب $(\text{ا}^2 + \text{اب} + \text{ب}^2)^{-\frac{1}{2}}$ ہے جہاں ا اور ب اِن سیاروں کے مداروں کے نصف قطر ہیں۔

[Math. Trip.]

مثال ۲ — دو سیارے ہم مستوی دائری مداروں میں جن کے نصف قطر ں، ر ہیں حرکت کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ جب اِن کے طول بلدوں کا فرق ط ہو تو ضلالت

$$\frac{(\sqrt{\text{ں}} + \sqrt{\text{ر}})\left\{(\text{ں} - \sqrt{\text{ں ر}} + \text{ر})\,\text{جم ط} - \sqrt{\text{ں ر}}\right\}}{\sqrt{\text{ں ر}\,(\text{ں}^2 - 2\,\text{ں ر جم ط} + \text{ر}^2)}}$$

کے متناسب ہے۔

مثال ۳ — اگر دو سیارے سورج کے گرد دائروں میں حرکت کریں تو ثابت کرو کہ ایک کی ضلالت (جبکہ اُسے دوسرے سے دیکھا جائے) قِران میں، اُس ضلالت سے جو تقابل میں ہے نسبت

$$\frac{\sqrt{\text{ں}} - \sqrt{\text{ر}}}{\sqrt{\text{ں}} + \sqrt{\text{ر}}}$$

میں کم ہوگی جہاں ں اور ر مداروں کے نصف قطر ہیں۔ [Math. Trip.]

۹۱* ـ ستاروں کے اوسط مقامات سے ظاہری مقامات معلوم کرنیکے لیے ضابطے ۔

کسی ستارہ کے اوسط مقام سے اِس کا وہ محل مراد ہوگا جہاں وہ نظر آئیگا اگر اُسے ایک مُشاہد سورج کے مرکز سے دیکھ سکے اور مُشاہد ساکن ہو ۔ ستارہ کا ظاہری مقام وہ محل ہے جہاں وہ ایک ارضی مشاہد کو نظر آتا ہے، اِس مقام میں اور اوسط مقام میں انعطاف اور ضلالت کی وجہ سے فرق ہوتا ہے، انعطاف پر ہم چھٹے باب میں غور کر چکے ہیں اور اِس کا حوالہ یہاں دینا ضروری نہیں ہے ضلالت پر اب ہم غور کریں گے ۔ جب ایک ستارہ کا اوسط مقام اس کے صعود مستقیم اور میل کے ذریعہ ظاہر کیا گیا ہو تو وہ خط استواء اور اعتدال لئے جاتے ہیں جو آغاز سال پر ہوتے ہیں یا زیادہ صحیح طور پر اُس آن کے خط استواء اور اعتدال لیے جاتے ہیں جبکہ سورج کا اوسط طول بلد ٹھیک ۲۸۰° ہو جیساکہ دفعہ ۵۹ میں سمجھایا جا چکا ہے ۔ (۲۷۰)

ہم دفعہ ۵۹ میں وہ مختصر طریقے بتا چکے ہیں جن سے کسی ستارہ کے محددوں کی تبدیلیوں کو جو استقبال اور کبوگی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں محسوب کیا جا سکتا ہے ۔ اب ہم وہ زیادہ مکمل عمل بتائیں گے جس سے کسی مخصوص ستارہ کے محددوں پر ضلالت کے اثرات اور نیز استقبال کبو اور ذاتی حرکت کے اثرات فوراً محسوب کیے جا سکتے ہیں، اس لیے ستارہ کا ظاہری مقام حاصل ہو سکتا ہے جب اوسط مقام معلوم ہو ۔ ایفیمرس میں ہر سال کے لیے ضروری ضابطے دیے جاتے ہیں مثلاً بحری جنتری بابتہ ۱۹۱۰ء کا صفحہ ۲۳۲ دیکھو ۔ ہم یومی عددوں أ، ب، ج، د کے لیے جو بیسل کے یومی عددوں کے طور پر موسوم ہیں ضابطے لکھ لیں گے ۔ ان عددوں کے لیے جملے جن میں صرف خاص اہمیت رکھنے والی رقمیں لی گئی ہیں حسب ذیل ہیں :

ا = -۲۰:۴۷۶ًَ جم سہ جم ⊙
ب = -۲۰۶۴۷ جب ⊙
ج = ت - ۰۶۳۴۲ جب چ - ۰۶۰۲۵ جب ۲ ل　　…. (۱)
د = -۹۶۲۱۰ً جم چ - ۰۶۵۵۱ جم ۲ ل

جہاں وقت ت کے لیے، سہ طریق الشمس کا میلان ہے،

⊙ سورج کا اصلی طول بلد،
ل سورج کا اوسط طول بلد،
اور　چ چاند کے صعودی عقدہ کا طول بلد۔

وقت ت کو موجودہ مقصد کے لیے کافی صحت کے ساتھ سال کی اُس کسر کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے جو گذشتہ یکم جنوری کی ظہر سے گذر چکی ہے۔ مقداروں ا، ب، ج، د میں ستارے کے محدد شامل نہیں ہوتے، وہ سب ستاروں کے لیے مشترک ہیں اور صرف وقت پر منحصر ہیں۔ ا، ب، ج، د کے لوکارتم ایفیمرس میں پورے سال کے ہر دن کے لیے دیے ہوئے ہوتے ہیں اور ان کو معلوم کرنے میں سب رقموں کا مناسب لحاظ کیا جاتا ہے جن میں وہ رقمیں بھی شامل کر لیجاتی ہیں جو یہاں صغیر ہونے کی وجہ سے ترک کر دی گئی ہیں۔ کسی مخصوص ستارے کے لیے تصحیحوں کو معلوم کرنے میں یومی عددوں کے اطلاق کے لیے بعض دوسری مقداروں اَ، بَ، جَ، دَ، اَ، بَ، جَ، دَ کو محسوب کرنا پڑتا ہے جو ستارے کے مقام پر
منحصر ہوتی ہیں لیکن وقت پر منحصر نہیں ہوتیں۔ یہ مقداریں حسب ذیل ہیں:　(۲۷۱)

ا = ۱/۱۵ جم عہ قط ضہ ،　اَ = مس سہ جم ضہ - جب عہ جب ضہ
ب = ۱/۱۵ جب عہ قط ضہ ،　بَ = جم عہ جب ضہ
ج = ۳۶۰۷۳ث + ۱۶۳۳۶ث جب عہ مس ضہ ،　جَ = ۲۰۶۰۴۶ًَ جم عہ　… (۲)
د = ۱/۱۵ جم عہ مس ضہ ،　دَ = - جب عہ

جہاں عہ، ضہ آغاز سال پر اوسط صعودِ مستقیم اور میل ہیں۔

ہم ستارے کی ذاتی حرکت کو بھی اگر وہ کافی بڑی ہو حساب میں شامل کرتے ہیں اس کے لیے یہ فرض کیا جاتا ہے کہ

Δ ج = صعود مستقیم میں سالانہ ذاتی حرکت،

Δ جَ = میل میں سالانہ ذاتی حرکت

پس وقت ت کے لیے حاصل ہوتا ہے

ظاہری صعود مستقیم وقت میں = عہ + ا اِ + ب ب + ج ج + د د + ت Δ ج

ظاہری میل = ضہ + ا اَ + ب بَ + ج جَ + د دَ + ت Δ جَ (۳)

اِن ضابطوں سے جو سہولت پیدا ہوتی ہے وہ فوراً نظر آئے گی کیونکہ کسی دئے ہوئے ستارے کے لیے مقداروں لوک ا، لوک اَ، وغیرہ لوک ب، لوک بَ وغیرہ کو صرف ایک دفعہ محسوب کر لینا کافی ہے اور پھر کسی مخصوص دن پر جس کے لیے تحویل مطلوب ہو لوک ا، لوک ب وغیرہ ایفیمرس سے لیے جا سکتے ہیں۔

مساواتوں (۳) کا ثبوت اُن ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے جو پہلے بیان کئے جا چکے ہیں۔ صعود مستقیم میں ضلالت جو دفعہ ۸۴ میں معلوم کیجا چکی ہے ٹھیک وہی ہے جو یہاں ا اِ + ب ب سے تعبیر کی گئی ہے اور اسی طرح صعود مستقیم میں استقبال اور کبو کا اثر وہ ہے جسکو یہاں ج ج + د د کے طور پر بیان کیا گیا ہے۔ (۳) کے دوسرے ضابطہ کی بھی اسی طرح توضیح کی جا سکتی ہے۔

بعض اوقات ضابطوں (۳) کی بجائے دوسرے ضابطے استعمال کرنے میں زیادہ فائدہ ہوتا ہے۔ یہ استحالہ غیر تابع یومی عددوں ف، لوک گ، گ، لوک ہ، ھ، لوک ء کو داخل کرنے سے عمل میں لایا جا سکتا ہے، اِن یومی عددوں میں سے ہم ف، گ، گ پر دفعہ ۵۹ میں بحث کر چکے ہیں۔ سہولت کے لیے ہم یہاں وہ تمام ضابطے جمع کرتے ہیں جن سے یہ معلوم ہوگا کہ

غیر تابع یومی عدد کس طرح بیسل کے یومی عددوں کے ساتھ مساواتوں

ب = ہ جم ھ ، ف = ج ۳ث ۰۷۳ء۰

ا = ہ جب ھ ، گ جم گ = ج ۲۰ء۰۴۶ ...... (۴)

ا س سہ = ۶ ، د = گ جب گ

کے ذریعہ مربوط ہیں ۔

(۲۷۲) اِن اندراجوں سے حاصل ہوتا ہے

ظاہری صعود مستقیم وقت میں = عہ + ف + ت ۵ جَ

+ ۱/۱۵ گ جب (گ + عہ) س ضہ + ۱/۱۵ ہ جب (ھ + عہ) قط ضہ ... (۵)

ظاہری میل = ضہ + ۶ جم ضہ + ت ۵ جَ + گ جم (گ + عہ)

+ ہ جم (ھ + عہ) جب ضہ ...... (۶)

غیر تابع یومی عددوں ہ ، ھ ، ۶ جو ضلالت سے متعلق ہیں حسب ذیل ضابطوں سے راست محسوب کیے جا سکتے ہیں :-

ہ جم ھ = - ۲۰ء۴۷″ جب ۵ ، ہ جب ھ = - ۲۰ء۴۷″ جم سہ جم ۵ ،

۶ = - ۲۰ء۴۷″ جب سہ جم ۵

جن میں ہم عمومیت کی قید کے بغیر ہ کو ایک مثبت مقدار لے سکتے ہیں ۔ یہ آسانی سے دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ (۱۸۰° - ھ) اور س‌تا (۶/ہ) علی الترتیب راس[1] کے صعود مستقیم اور میل ہیں ۔

مثال ۱ ۔ ثابت کرو کہ ضلالت کی وجہ سے ایک ستارہ کا ہٹاؤ جبکہ اِسے قوس کے ثانیوں میں بیان کیا جائے

مقدار {۶ جم ضہ + ہ جم (ھ + عہ) جب ضہ}۲ + {ہ جب (ھ + عہ)}۲

کا جذر المربع ہے ۔

مثال ۲ ۔ اگر بتاریخ یکم جنوری سنہ ۱۹۱۰ء عیوق (Capella.) کا اوسط صعود مستقیم ۵گ ۱۰م ۳۱ء۲ث ہو اور اِس کا اوسط میل + ۴۵° ۵۴′ ۲۶ء۵″

[1] Apex.

ہو تو ثابت کرو کہ بتاریخ ۲۷ نومبر سنہ ۱۹۱۱ء اس کے ظاہری مقام کے لیے صعود مستقیم کو بقدر ۶۸ء۴ ث اور میل کو بقدر ۷ء۷ " بڑھ جانا چاہیے' یہ دیا گیا ہے کہ بتاریخ

۲۷ نومبر سنہ ۱۹۱۰ء

ف = ۹۵ء۱'، لوک گ ۴۵ء۱، اگ = ۳۳۵° ۳۲'، لوک ہ = ۳۰۵ء۱،

ﮦ = ۲۳° ۱۶'، لوک ۶ = ۹۳۹+ ۵ء۰ ۔ اور سالانہ ذاتی حرکت صعود مستقیم میں

+ ۰۰۹ء ث اور میل میں -۴ء۰" ہے ۔

مثال ۳ ۔ اگر ایک ستارہ عہ، ضہ اور ایک متصلہ ستارہ کے درمیان فاصلہ کسی خاص دن د ہو اور ثانی الذکر ستارہ کا ظاہری زاویہ محل (بلحاظ اول الذکر ستارہ کے) م ہو اور اگر ضلالت، استقبال اور کبو کی وجہ سے ستاروں کے ظاہری مقاموں کی تصحیح کے لیے غیر تابع یومی عدد ف، گ، گ، ہ، ﮦ، ۶ ہوں تو ثابت کرو کہ گذشتہ یکم جنوری پر ان دو ستاروں کے اوسط مقاموں کا درمیانی فاصلہ

د + د {۶ جب ضہ - ہ جم (ﮦ + عہ) جم ضہ} جب اَ

تھا اور زاویہ محل

م - گ جب (گ + عہ) قط ضہ - ہ جب (ﮦ + عہ) مس ضہ

تھا۔

جس سال مشاہدہ کیا جاتا ہے اس کی یکم جنوری سے ن سال پہلے کی تاریخ پر زاویہ محل معلوم کرنے کے لیے ثابت کرو کہ قطب کی استقبالی حرکت کی وجہ سے م میں -۰۰۴۶ء۲۰" جب عہ قط ضہ کی ایک اور تصحیح عائد کرنی پڑے گی۔

فرض کرو کہ ایک زوج کے صدر ستارے کا ظاہری صعود مستقیم اور میل عہ، ضہ ہیں ۔ فرض کرو کہ آغاز سال کے لیے ان محددوں کو تحویل کیا جاتا ہے تو اوسط محدد عہ + فہ، ضہ + پہ حاصل ہوتے ہیں ۔

(۲۷۳) فرض کرو کہ متصلہ ستارہ کا ظاہری صعود مستقیم اور میل عَہ، ضَہ ہیں اور جب انہیں آغاز سال پر لانے کے لیے ان پر تصحیحیں عائد کیجاتی ہیں تو وہ ٹیلر کے

مسئلہ سے حسب ذیل ہو جاتی ہیں

عَہ + فہ + (جف فہ / جف عہ) (عَہ − عہ) + (جف فہ / جف ضہ) (ضَہ − ضہ)' ... (۱)

ضَہ + پہ + (جف پہ / جف عہ) (عَہ − عہ) + (جف پہ / جف ضہ) (ضَہ − ضہ)' ... (۲)

فرض کرو کہ آغاز سال کے لیے جب یہ ستارے اوسط مقاموں پر ہوں تو اِن کے درمیان فاصلہ د + مف د اور زاویہ محل م + فرم ہے۔ اب تقریبی طور پر حاصل ہوتا ہے

د جم م = ضَہ − ضہ '

د جب م = (عَہ − عہ) جم ضہ

اور تفرق کرنے اور اندراج کرنے سے

جم م فرد − د جب م فرم = (جف پہ / جف عہ) (عَہ − عہ) + (جف پہ / جف ضہ) (ضَہ − ضہ)' ... (۳)

جب م فرد + د جم م فرم = − پہ (عَہ − عہ) جب ضہ + (عَہ − عہ) جم ضہ (جف فہ / جف عہ)

+ (ضَہ − ضہ) جم ضہ (جف فہ / جف ضہ) ' ..... (۴)

لیکن انہیں یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

جم م فرد − د جب م فرم = د جب م قط ضہ (جف پہ / جف عہ)

+ د جم م (جف پہ / جف ضہ) ' ..... (۵)

جب م فرد + د جم م فرم = − د جب م مس ضہ × پہ + د جب م (جف فہ / جف عہ)

+ د جم م جم ضہ (جف فہ / جف ضہ) ' ..... (۶)

فہ اور پہ کی بجائے اِن کی قیمتیں

فہ = ۔ف ۔گ جب (گ + عہ) مس ضہ ۔ ہ جب (ھ + عہ) قطا ضہ،

پہ = ۔ ۶ جم ضہ ۔ گ جم (گ + عہ) ۔ ہ جم (ھ + عہ) جب ضہ

داخل کرنے سے اور بتائے ہوئے تفرقوں کی تکمیل کرنے سے اور پھر فرد اور فرم کے لیے حل کرنے سے نتیجہ حسب ذیل شکل اختیار کرتا ہے:

فرد = د { ۶ جب ضہ ۔ ہ جم (ھ + عہ) جم ضہ } جب اً ۔۔۔(۷)

فرم = ۔ گ جب (گ + عہ) قط ضہ ۔ ہ جب (ھ + عہ) مس ضہ ۔۔(۸)

مقداریں گ اور گ، فرد میں موجود نہیں ہیں کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ خط استواء کی تبدیلیاں دو ستاروں کے درمیانی فاصلہ پر کوئی اثر پیدا نہیں کر سکتیں بلاشبہ یہ ضابطے بہت چھوٹی مقداروں سے متعلق ہیں لیکن وہ ستاروں کے سالانہ اختلاف منظر کی تحقیق میں اہم ہو جاتے ہیں۔

سوال کے آخری حصہ کے لیے ضابطہ (۸) کو اس طور پر تحویل کرنا ہوگا کہ ن پورے سالوں کے لیے صرف استقبال کا اثر اس میں شامل ہو جبکہ ضلالت اور کبو صفر بنائے گئے ہوں۔ چنانچہ

ہ = ۰، گ = ۰، گ = ۶ ۰۴۶ ۲۰ ً ن

بنانے سے یہ ہو سکتا ہے۔ اس لیے ن سال قبل اوسط قطب پر تحویل کرنے کے لئے تصیح حسب ذیل ہے:

= ۶ ۴۶ ۰ ۲۰ ً ن جب عہ قط ضہ

مثال* ۴ ۔ اگر خط استواء میں ایک چھوٹی تبدیلی کے باعث ہر ستارہ
(۲۷۴) کے محدد عہ اور ضہ، عہ + فہ اور ضہ + پہ ہو جائیں اور ستارے کے محل میں کوئی تبدیلی نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف پہ}}{\text{جف ضہ}} = ۰،$$

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف عہ}} - \text{پہ مس ضہ} = ۰،$$

اور

قط ضہ (جف پہ / جف عہ) + جم ضہ (جف فہ / جف ضہ) = ۰

جہاں فہ اور پہ محددوں کے تفاعل ہیں۔

مثال (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ دو ستاروں کے درمیانی فاصلہ د میں تبدیلی فرد حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتی ہے

فرد = د جم² م (جف پہ / جف ضہ) + د جب² م (جف فہ / جف عہ - پہ مس ضہ)

+ د جب م جم م (قط ضہ (جف پہ / جف عہ) + جم ضہ (جف فہ / جف ضہ))

اور چونکہ فرد صفر ہونا چاہئے خواہ م کی قیمت کچھ ہی ہو اس لیے مطلوبہ نتیجہ فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

مثال* ۵ — ثابت کرو کہ اگر چند ستارے ایک دائرہ پر واقع ہوں جس کا قوسی نصف قطر بہت چھوٹا ہے تو اِن ستاروں پر ضلالت کے اثر کا یہ اقتضاء ہوگا کہ انہیں ایک متصلہ دائرہ کے محیط پر لے جائے۔

مثال ۳ کی مساواتوں (۷)، (۸) میں م کی عدم موجودگی سے یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال* ۶ — فرض کرو کہ ا اور ب دو ستارے ہیں جو ضلالت کے باعث ایک راسِ ج کی جانب اَ اور بَ پر نظر آتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ضلالت، ا پر کے زاویہ کو ا۔ ک مس ½ ج جب ع میں تبدیل کرتی ہے جہاں ج، قوس اب ہے اور ع، ج سے اب پر عمود ہے۔

فرض کرو کہ ب اور ا پر کے دو ستارے ج سے علی الترتیب ا، ب فاصلوں پر ہیں۔ اب کروی مثلث سے حاصل ہوتا ہے

جم ب جم ج = جب ب مم ا - جب ج مم ا،

تفرق کرنے اور

مف ا = - ک جب ا، مف ب = - ک جب ب، مف ج = ۔

بنانے سے حاصل ہوتا ہے

ک جب ب قم ا (جب ا جب ب جم ج + جم ا جم ب - ۱) = جب ج قم² ا مف ا

اس لیے مف ا = - ک مس ½ ج جب ا جب ب

= - ک مس ½ ج جب ع

اگر ستارے متصلہ ہوں تو ج چھوٹا ہوگا، اس لیے جب اسے ک سے ضرب دیا جائے تو حاصل ضرب بہت چھوٹا ہوگا اور مف ا ناقابل قدر ہوگا۔

مثال* ۷ ۔ ایک ستارہ سے جس کے محددو عہ = ۵۹° ۴۳ ۵ ضہ = ۲۷° ۳۷ ۴۵ ہیں ایک متصلہ ستارہ کا فاصلہ ۳۱ ۳۷، ۲۳″ اور زاویہ محل ۲۰۷° ۱۴ بتاریخ ۶ جنوری ۱۸۸۰ء پیمائش کیا گیا۔ ثابت کرو کہ اس فاصلہ اور زاویہ محل کو تاریخ ۱۸۷۹ء کے لیے تحویل کرنے میں جو تصحیحیں ان پر عائد کرنی پڑینگی وہ علی الترتیب - ۰۱۵، ۰″ اور - ۳۶۶، ۰° ہیں۔

(۲۷۵) بحری جنتری بابتہ ۱۸۸۰ء صفحہ ۳۰۳ سے ۶ جنوری ۱۸۸۰ء کیلئے حاصل ہوتا ہے

لوک گ = + ۳۴۸۷ ،۰ گ = ۳۴۳° ۰ ۴، لوک ھ = + ۹،۳۰۷۹ ھ = ۸° ۴۵ ۳۴

ل ۶ = - ۱۳۵۴۱ ،۰

ضلالت فاصلہ میں، ل پہلی رقم = - ۲۰۲ ،۷، ل دوسری رقم = - ۱۱۶ ،۸

ل کبو محل میں = - ۶۰۳۶ ،۹، ل ضلالت محل میں = - ۹،۲۶۸ - ایک سال کے استقبال کے لیے تصحیح = ۳۶۶ ،۰ -

مثال ۸ ۔ ثابت کرو کہ دو ستاروں کے درمیانی فاصلہ د پر ضلالت کا اثر ہمیشہ

د \ ۱۰۰۰

سے چھوٹا ہونا چاہیے۔

گیارہویں باب پر مثالیں

مثال ۱۔ اگر یہ فرض کیا جائے کہ زمین سورج کے گرد ایک دائرہ میں رفتار و سے حرکت کر رہی ہے اور زمین کی سطح پر ایک مشاہد کی رفتار زمین کی محوری گردش کی وجہ سے ن و ہے تو کسی ستارہ ثہ کی ضلالت لا، ضابطہ

مس لا = ک (جب² و ثہ + ۲ ن جب و ثہ جب ثہ ع جم و ثہ ع + ن² جب² ثہ ع)^½ ÷ (۱ + ک جم و ثہ + ن ک جم ثہ ع)

سے صحیح طور پر حاصل ہوتی ہے جہاں و، طریق الشمس پر سورج سے ۹۰° پیچھے ایک نقطہ ہے، ع خط استوا پر ایک نقطہ ہے جس کے صعود مستقیم اور سورج کے صعودِ مستقیم میں فرق ساعتی زاویہ کے متمم کے مساوی ہے، اور ک وہ نسبت ہے جو زمین کے مرکز کی رفتار کو نور کی رفتار سے ہے۔

[Math. Trip.]

اگر ایک کرُوی مثلث میں طول س کی ایک قوس ج و، راس ج سے کھینچی جائے جو قاعدے کو دو مقطوعوں ب و = ل، ا و = م میں تقسیم کرے تو

جب² س جب² (ل + م) = جب² ب جب² ل + ۲ جب ا جب ب جب ل جب م جم ج + جب² م جب² ا

اگر ستارہ ج پر ہو اور اگر محوری گردشی حرکت کا راس[۱] ب اور مداری حرکت کا راس[۱] ا ہو اور اگر حاصل ضلالت لا ہو تو مہ جب لا = غہ جب (س ـ لا) جہاں مُشاہد کی حاصل رفتار غہ اور نور کی رفتار مہ ہے۔ پس

غہ قم (ل + م) = و قم ل ـ ن و قم م

اس لیے　　مس لا = ک جب س جب (ل + م) ÷ (جب ل + ک جم س جب (ل + م))

لیکن　　جم س جم م = جم ب ـ جب س جب م جم و

[۱] Apex.

جم س جم ل = جم ا + جب س جب ل جم و

اس لیے جم س (جم م + ن جم ل) = جم ب + ن جم ا

اس ضابطہ اور اوپر کے ضابطہ سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

مثال ۲ ۔ ثابت کرو کہ اُن تمام ستاروں کا طریق جن کا راسی فاصلہ کسی دی ہوئی آن اور دئے ہوئے مقام پر ضلالت کی وجہ سے نہیں بدلتا ایک ناقصی مخروط ہے جس کی ایک دائری تراش افقی ہے اور دوسری طریق الشمس پر عمود ہے۔

[Coll. Exam.]

(۲۷۶) اس صورت میں وہ زاویہ جو راس (Zenith) اور زمین کے راستہ کے راس (Apex.) کے محاذی ستارے پر بنتا ہے ۹۰° ہونا چاہئے اسلئے مطلوبہ نتیجہ بہ آسانی حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۳ ۔ ثابت کرو کہ ہر مقام پر دی ہوئی آن کے لیے ایک ستارہ کے لیے ہمیشہ ایک ایسا محل ہوتا ہے جس کے لیے ضلالت کی پوری تعدیل انعطاف سے ہوتی ہے۔ نیز ثابت کرو کہ چھوٹے سے چھوٹے دن میں بوقت نیم شب اِس محل کا راسی فاصلہ ضابطہ

جب^۲ ی + لہ جب ی = ۱

سے حاصل ہوتا ہے اگر انعطاف کی تصحیح راسی فاصلہ کے مماس کے متناسب فرض کی جائے اور زمین کے مدار کو دائری مان لیا جائے۔

[Math. Trip.]

مثال* ۴ ۔ اگر خط اُستوا میں کسی چھوٹی تبدیلی کی وجہ سے کرۂ سماوی پر کے ہر نقطہ کے محدد عہ اور ضہ، عہ + فہ اور ضہ + پہ ہو جائیں تو ثابت کرو کہ ہمیں حاصل ہونا چاہئے

فہ = ج + ا جب (عہ + ب) مس ضہ،

پہ = ا جم (عہ + ب)

جہاں ا، ب، ج ایسے مستقل ہیں جو محددوں پر منحصر نہیں ہیں۔ نیز اس کی تصدیق کرو کہ اِس استحالہ سے ستاروں کے ہر زوج کے درمیان فاصلہ غیر متغیر رہتا ہے۔

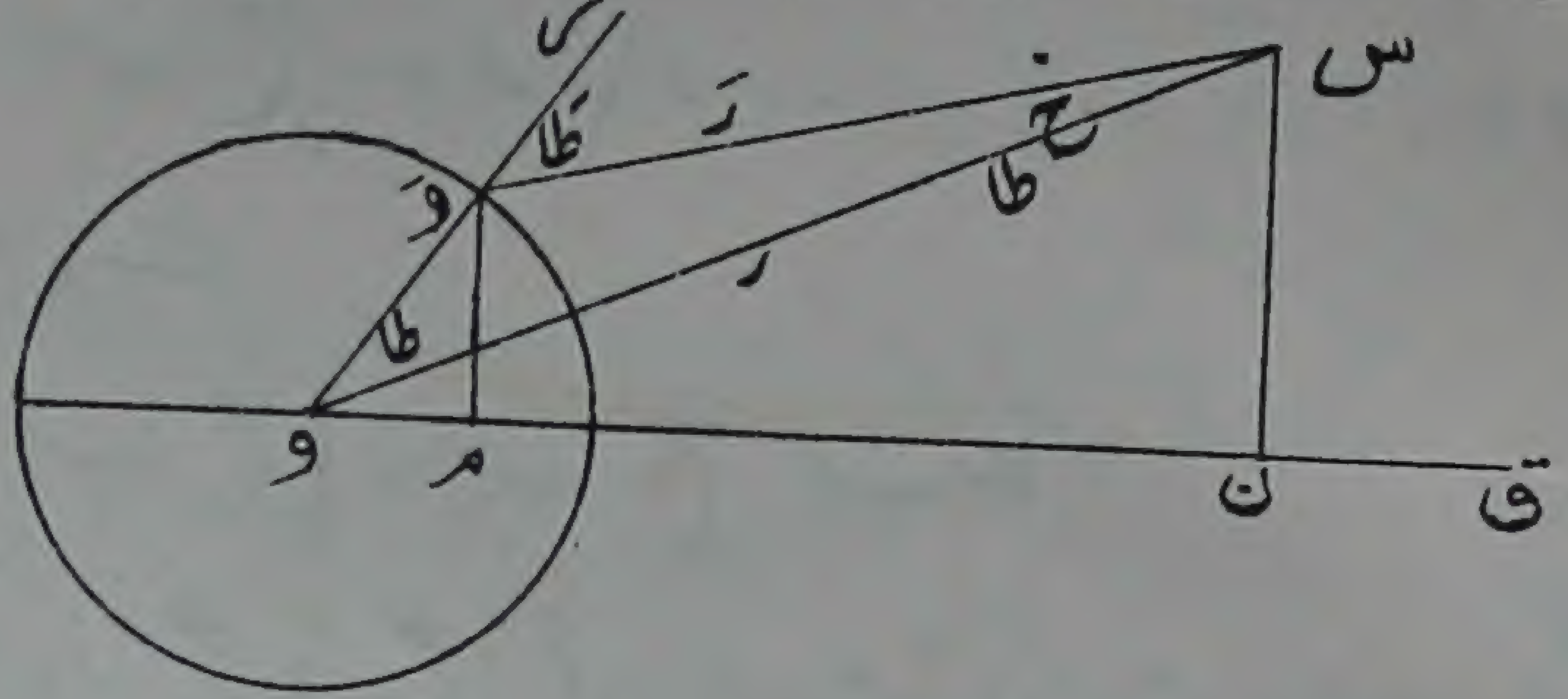
(۲۷۷)

بارہواں باب

چاند کا ارض مرکزی اختلاف منظر

۹۲ — تمہید — اختلافِ منظر سے وہ زاویہ و س وَ (شکل ۴۷) مراد ہے جو سمت وَ س (جس میں ایک نقطہ س، وَ سے مشاہدہ کرنے والے کو نظر آتا ہے) اور اُس سمت کے درمیان ہوتا ہے جس میں وہی نقطہ س نظر آتا اگر مشاہد ایک معیاری محل و پر ہوتا۔ اگر س سورج ہو یا چاند یا ایک سیارہ یا ایک دُمدار ستارہ یا مختصراً کوئی جرم جو نظام شمسی سے متعلق ہے تو معیاری محل و ہمیشہ زمین کا مرکز لیا جاتا ہے اور اختلافِ منظر کو ارض مرکزی کہتے ہیں۔ اگر س ایک ستارہ ہو تو و کو سورج کا مرکز

لیتے ہیں اور اختلافِ منظر کو بالعموم سالانہ اختلافِ منظر سے موسوم کرتے ہیں۔



شکل (۷۴)

(۲۷۸) سُورج کا ارض مرکزی اختلافِ منظر وہ زاویہ و س وَ ہے جہاں س سُورج کا مرکز ہے، غہ زمین کا نصف قطر و وَ ہے اور طاَ، طا علی الترتیب زاویوں س وَ ر اور س و ر کو تعبیر کرتے ہیں۔ اب اختلافِ منظر کے اثر کو یہ کہہ سکتے ہیں کہ وہ جرم کے ظاہری مقام کو سمت و وَ سے بقدر زاویہ طاَ - طا کے پرے ہٹاتا ہے۔ ہم زاویہ طاَ - طا کو علامت $خ_{طا}$ سے تعبیر کریں گے۔ اگر زمین کو ایک کرہ سمجھا جائے تو طاَ اور طا ظاہری اور اصلی راسی فاصلے ہوں گے اور اختلافِ منظر کا اثر جرم کے ظاہری مقام کو راس سے پرے ہٹانے کا ہوگا۔

لیکن چونکہ زمین کروی نہیں ہے اس لیے اختلافِ منظر کا اثر یہ ہوتا ہے کہ وہ جرم کو ٹھیک طور پر راس سے نہیں بلکہ اُس نقطے سے پرے ہٹاتا ہے جس میں زمین کا نصف قطر خارج کرنے پر کرۂ سماوی سے ملتا ہے۔ اس نقطے اور اصلی راس کی درمیانی قوس بلا شبہ وہ مقدار ہے جس پر دفعہ ۱۵ میں بحث ہو چکی ہے۔

مثلث و س وَ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب}\ خ_{طا} = \text{غہ جب طاَ} \,/\, ر \qquad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

اب ہم زاویہ $خ_{فہ}$ ایسا لیتے ہیں کہ

$$جب\ خ_{فہ} = غہ \backslash ر \quad ....(۲)$$

اور اس لیے (۱) سے

$$جب\ خ_{طا} = جب\ خ_{فہ}\ جب\ طاَ$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ $خ_{فہ}$، $خ_{طا}$ کی بڑی سے بڑی قیمت ہے اور یہ اسوقت حاصل ہوگی جبکہ طاَ، ۹۰° ہو جس کے یہ معنی ہیں کہ سورج کا مرکز افق پر ہو یہاں انعطاف کے اثر کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اِس لیے ہم $خ_{فہ}$ کو افقی اختلافِ منظر کہینگے

چونکہ افقی اختلافِ منظر غہ پر منحصر ہوتا ہے جیساکہ (۲) میں بتایا جاچکا ہے اور چونکہ غہ تمام ارض بلدوں کے لیے ایک ہی نہیں ہے کیونکہ زمین کی شکل کرہ نمائی ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ افقی اختلافِ منظر مشاہد کے ساتھ متغیر ہونا چاہیئے۔ اِس کی اعظم قیمت اُس وقت حاصل ہوتی ہے جبکہ مشاہد خط استوا پر ہو اور چونکہ فہ اُس وقت صفر ہوتا ہے اس لیے ہم اُستوائی افقی اختلافِ منظر کو $خ_{.}$ سے ظاہر کرتے ہیں، اِس لیے اگر زمین کا اُستوائی نصف قطر $غہ_{.}$ ہو تو

$$جب\ خ_{.} = غہ_{.} \backslash ر$$

اگر سورج اپنے اوسط فاصلے پر ہو اور اس لیے ر سورج کے ظاہری مدار کے نیم محور اعظم ا کے مساوی ہو تو مقدار $خ_{،}$ کو سورج کا اوسط اُستوائی افقی اختلافِ منظر کہتے ہیں اور یہ مقدار مساوات

$$جب\ خ_{،} = غہ_{.} \backslash ا$$

سے حاصل ہوتی ہے ہم ہمیشہ $خ_{،}$ کو ۸٫۸۰″ لیں گے۔

جو مقداریں اوپر بیان کی گئی ہیں وہ سورج کے ارض مرکزی اختلافِ (۲۷۹)
منظر سے متعلق ہیں۔ خ پر ایک زبر لگا کر ہم متناظر مقداروں کو چاند کے لیے
تعبیر کر سکتے ہیں مثلاً

خَ ط چاند کا ارض مرکزی اختلاف منظر ہے یعنے وہ زاویہ جو زمین
سے مرکز اور مشاہد کے محل کے محاذی چاند کے مرکز پر بنتا ہے۔

خَ فہ وہ زاویہ ہے جس کی جیب زمین کے مرکز سے مشاہد اور چاند کے
مرکز کے فاصلوں کی نسبت ہے۔ یہ عرض بلد فہ پر چاند کا افقی اختلافِ منظر ہے

خَ ، خَ فہ کی وہ قیمت ہے جبکہ مشاہد خط اُستوا پر ہو۔ یہ چاند کا اُستوائی
افقی اختلاف منظر ہے۔

خَ ا ، خَ کی وہ قیمت ہے جبکہ چاند اپنے اوسط فاصلہ پر ہو۔ یہ
چاند کا اوسط اُستوائی افقی اختلاف منظر ہے۔ ہم خَ ا کو ۳۴۲۲'' کے
مساوی لیں گے۔

چاند کو یہاں ایک کرہ سمجھا گیا ہے اور مخروط کا وہ نیم انتصابی زاویہ
جو یہ کرہ زمین کے مرکز پر بناتا ہے یعنے چاند کا ظاہری نیم قطر ۱۶' ۴۷'' سے
۱۴' ۴۳'' تک متغیر ہوتا ہے اور اس کی اوسط قیمت ۱۵' ۳۴'' ہے۔

ضابطہ (۲) سے حاصل ہوتا ہے

ر = غہ قم خَ فہ

زمین کا نصف قطر ایک معلومہ مقدار ہے اور اگر خَ فہ بھی معلوم ہو تو
اس مساوات میں بائیں جانب کی رقم معلوم ہوتی ہے اور اس لیے ر معلوم
ہوتا ہے۔ پس ہمیں یہ اہم نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ کسی جرم فلکی کا فاصلہ

متعین ہو سکتا ہے اگر اس کا افقی اختلاف منظر معلوم ہو۔ فی الحقیقت ہم کسی جرم کا اختلاف منظر مشاہدہ سے معلوم کر کے ہی اس کے فاصلہ کی تعیین کر سکتے ہیں اور چونکہ اِن فاصلوں کی تعیین علم ہیئت میں بہت ہی اہم ہے اس لیے یہ ظاہر ہے کہ اختلاف منظر کے مضمون پر خاص توجہ کرنے کی ضرورت ہے۔

کسی ستارہ کا ارض مرکزی اختلاف منظر اس قدر خفیف ہوتا ہے کہ اس کا احساس نہیں ہو سکتا۔ قریب ترین ستارے کی صورت میں بھی مثلاً عہ قنطوری (a Centauri) افقی اختلاف منظر صرف ۰٫۰۰۰۰۳″ ہوگا اور ہمارے آلات کسی اختلاف منظر کو جو اس مقدار سے ہزار گنا بڑا نہ ہو نہیں ناپ سکتے اس لیے کسی ستارے کا فاصلہ اس کے ارض مرکزی اختلافِ منظر سے متعین کرنا ممکن نہیں ہے۔ اس قسم کی تحقیقات کے لیے سالانہ اختلافِ منظر سے مدد لینی پڑے گی اور اس کو ہم پندرہویں باب تک ملتوی کرتے ہیں۔ ہمارا موجودہ مسئلہ ارض مرکزی اختلافِ منظر کا ہے اور خصوصاً چاند پر اس کے اطلاق (۲۸۰) سے فی الحال بحث کی جائے گی جس کا اوسط اُستوائی افقی اختلافِ منظر ۵۷′ ہے۔ تیرہویں اور چودھویں باب میں ہم نظام شمسی کے دوسرے جسموں کے ارض مرکزی اختلافِ منظر پر غور کریں گے۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ

مس خَ~طا~ = جب خَ~ف~ جب طا \ (۱ - جب خَ~ف~ جم طا)

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ اختلاف منظر چاند کے ظاہری نیم قطر کو نسبت

جب طَا \ جب (طَا - خَ~طا~)

میں بڑھا دیتا ہے جہاں طَا ظاہری راسی فاصلہ ہے اور زمین کو کروی فرض کیا گیا ہے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ اگر افقی اختلافِ منظر خَ ایک ایسی مقدار ہو جس کا مربع نظر انداز کیا جا سکتا ہے تو کسی جرم فلکی کا ظاہری روزانہ طریق جبکہ اسے زمین کی سطح (جسے کروی فرض کیا گیا ہے) سے دیکھا جائے ایک چھوٹا دائرہ ہے

جس کا نصف قطر ۹۰ - ضہ + خَ جب فہ جم ضہ ہے اور جو ایک نقطے کے گرد جو قطب کے نیچے خَ جم فہ جب ضہ دبا ہوا ہے کھینچا گیا ہے -
[Coll. Exam]

دفعہ ۳۵ (۱) سے حاصل ہوتا ہے
مف ضہ + جم عا مف ی - جم س مف فہ - جب س جم فہ مف ا = ۰
جہاں ی راسی فاصلہ ہے - موجودہ صورت میں
مف ی = خَ جب ی مف ا = ۰ ' اور اگر مف فہ = - خَ جم فہ جب ضہ تو
مف ضہ = - خَ (جم عا جب ی + جم فہ جب ضہ جم س) = - خَ جب فہ جم ضہ

۹۳ - اختلاف منظر کی اساسی مساواتیں -

مطلوبہ مساواتیں حاصل کرنیکے لیے یہ ضروری ہے کہ کرہ سماوی پر کے اُن نقطوں کے محددوں کو بیان کیا جائے جن کی طرف خطوط و وَ ' و س ' وَ س (۴۷) منفرداً کھینچے گئے ہیں - اس مقصد کے لیے سماوی خط استواء کو بنیادی دائرے کے طور پر اور راس الحمل ♈ کو مبداء کے طور پر لینے میں سہولت ہے - اِس لیے ہم جو محدد استعمال کرتے ہیں وہ صعود مستقیم اور میل ہیں -

اُس عام تحقیقات میں جس کی طرف اب ہم رجوع ہوں گے زمین کو ایک کرہ نما سمجھا جائے گا اور زمین کے مرکز سے مشاہد کا فاصلہ غہ سے تعبیر ہوگا - خط و وَ کا میلان خط استواء کے ساتھ مشاہد کا ارض مرکزی عرض بلد فہَ ہے اور اس لیے فہَ کرہ سماوی پر کے اُس نقطے کا میل ہے جس کی طرف و وَ کھینچا گیا ہے - اسی نقطے کا صعودِ مستقیم اُس نقطہ صعود مستقیم ہے جہاں مشاہد کا نصف النہار سماوی خطِ استواء کو قطع کرتا ہے لیکن یہ وہ کوکبی وقت ته ہے جو فی الحقیقت ♈ کا مغربی ساعتی زاویہ ہے -

و س، وَ س کی سمتوں کی تعریف علی الترتیب محدودوں (عہ، ضہ)، (عہَ، ضہَ) سے کی جائے گی۔

اگر اختلاف منظر یعنی زاویہ و س وَ ناقابل قدر ہو تو و س، وَ س تقریباً متوازی ہوں گے اور نقطہ عہَ، ضہَ، نقطہ عہ، ضہ سے تمیز

(۲۸۱) ہو سکے گا۔ لیکن اگر اختلافِ منظر قابلِ قدر ہو تو نقطہ عہ، ضہ جسے اصلی مقام کہتے ہیں وہی نہ ہوگا جو نقطہ عہَ، ضہَ ہے جسے ظاہری مقام کہتے ہیں۔ اول ہم دو مساواتیں معلوم کریں گے جن سے عہَ اور ضہَ، عہ اور ضہ کی رقوم میں حاصل ہو سکیں گے اور اس کے برعکس۔

و (شکل ۴۷) میں سے ایک خط و ق (ضروری نہیں کہ مستوی و وَ س میں ہو) نقطہ (لہ، مہ) تک کھینچو اور فرض کرو کہ وَ م اور س ن، و ق پر عمود ہیں اور اس طرح و م اور و ن، و ق پر و وَ اور و س کے ظل ہیں۔ اب وَ س کا ظلِ م ن = و ن - و م ہے اور اس لیے (دفعہ ۸) حسب ذیل عام ضابطہ حاصل ہوتا ہے

رَ {جب ضہَ جب مہ + جم ضہَ جم مہ جم (عہَ - لہ)}

= ر {جب ضہ جب مہ + جم ضہ جم مہ جم (عہ - لہ)}

- غہ {جب فہَ جب مہ + جم فہَ جم مہ جم (تہَ - لہ)}... (۱)

یہ مساوات درست ہونی چاہئے خواہ خط و ق کوئی ہو۔ اس لیے اگر ہم متواتر وہ تین صورتیں لیں جہاں لہ، مہ علی الترتیب (۰، ۰)، (۹۰، ۰)، (۰، ۹۰) ہیں تو اختلاف منظر کے لیے تین اساسی مساواتیں شکل ذیل میں حاصل ہوتی ہیں

رَ جم ضہَ جم عہَ = ر جم ضہ جم عہ - غہ جم فہَ جم تہَ، ... (۲)

رَ جم ضہَ جب عہَ = ر جم ضہ جب عہ - غہ جم فہَ جب تہَ، ... (۳)

رَ جب ضہَ = ر جب ضہ - غہ جب فہَ، ... (۴)

یہ مساواتیں مساوات (۱) میں جب مہ، جم مہ جم لہ، جم مہ جب لہ کے سروں کو صفر کے مساوی رکھنے سے بھی حاصل ہو سکتی تھیں اسلئے کہ ان سروں کو معدوم ہونا چاہئے کیونکہ یہ مساواتیں لہ، مہ کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہونی چاہئیں۔

مبتدی شاید یہ سمجھے کہ مسلسلہ بالا ضابطے ان تمام چیزوں کو بیان کرتے ہیں جو کسی جرم فلکی کے محددوں پر اختلاف منظر کے اثر کو متعین کرنے کے لیے ضروری ہو سکتی ہیں۔ اگر عہ، ضہ، ر دئے گئے ہیں تو عہَ، ضہَ، رَ کے لیے یہاں تین مساواتیں ہیں یا اگر عہَ، ضہَ، رَ دئے گئے ہیں تو عہ، ضہ، ر کے لیے یہاں تین مساواتیں ہیں۔ لیکن یہ مساواتیں اپنی موجودہ شکل میں اس قدر آسان نہیں ہیں کہ استعمال کی جائیں نہ ایسے نتیجوں کا لحاظ کرتے اتنی صحیح ہیں جتنی بعض دوسری مساواتیں جن کو ہم ان سے اخذ کرینگے ہوتی ہیں۔ پہلی نظر میں یقیناً یہ معلوم ہوگا کہ اگر مساواتوں کے دو جُٹ علم ریاضی کے اصولوں کے مطابق معادل ہیں تو مساواتوں کے ایک جٹ سے جو حساب لگائے جائیں وہ اُن حسابوں کے معادل ہونے چاہئیں جو دوسرے جٹ سے لگائے گئے ہوں۔ لیکن جیسا کہ ہم کسی اور سیئلے میں (دفعہ ۶۴) بیان کر چکے ہیں یہ ضروری نہیں کہ ایسا ہو یہ یاد رہے کہ مثلثی تفاعلوں کے لوکارتم دوسرے لوکارتموں کی طرح صرف (۲۸۲) تقریبی ہوتے ہیں۔ اس لیے ہر ضابطہ جس میں لوکارتم داخل ہوں اس سبب سے کچھ حد تک غلط ہو جاتا ہے۔ مساواتیں جو ریاضی کے نقطہ نظر سے اپنی علامتی شکل میں صحیح ہوتی ہیں بالعموم ریاضیاتی صحت سے الگ ہو جاتی ہیں جب عددی لوکارتم داخل کئے جاتے ہیں اور صحت کی حد حالات کی بموجب متغیر ہوتی ہے۔

اب یہ ماہر علم ہیئت کی دانائی پر منحصر ہے کہ مساواتوں کے ایک دئے ہوئے جٹ کے مختلف ممکن استحالوں میں سے اس مخصوص جٹ کا انتخاب کرے جس کو حل کرنے سے ایسے نتائج حاصل ہوں جو

ناگزیر لوکارتمی خطاؤں سے حتی الامکان کم متاثر ہوں۔ مثلاً یہ واقعہ ہے کہ اگرچہ مساواتیں (۲)، (۳)، (۴) نظری طور پر غہ، ضہ، رَ کو متعین کرنے کے لیے کافی ہیں لیکن ہمیں زیادہ صحیح نتیجے حاصل ہونگے اور لوکارتموں کے استعمال میں کمتر تکلیف اٹھانی پڑے گی اگر ہم اپنے اعمال حساب میں بعض دوسری مساواتیں استعمال کریں جیسی کہ (۷) اور (۱۵) ہیں جن میں مجہول مقداریں عہَ اور ضہَ کی بجائے (عہَ - عہ) اور (ضہَ - ضہ) ہیں۔ یہ معلوم ہوگا کہ (۲)، (۳)، (۴) میں سات ہندسی لوکارتم استعمال کرنے سے اتنی صحت حاصل نہیں ہوتی جتنی (۷) اور (۵) میں صرف پانچ ہندسی لوکارتم استعمال کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

اِس مضمون کے مقصد کی توضیح ذیل میں درج ہے۔ فرض کرو کہ ایک کیلومیٹر کے فصل پر دو نقطے ا اور ب ہیں اور فرض کرو کہ خط اب پر ایک نقطہ و لینا ہے جو ا سے ایک میٹر کے فاصلہ پر ہو اور اس لیے ب سے ۹۹۹ میٹر کے فاصلہ پر۔ اگر ہمارے پیمائش کے آلات ریاضی کے نقطۂ نظر سے کامل ہوتے تو ہم ا یا ب کسی سے پیمائش کرکے و کو ٹھیک متعین کر سکتے۔ لیکن ہمارے آلات کامل نہیں ہیں اور جب یہ حال ہے تو یہ معاملہ اس قدر غیر اہم نہیں ہے کہ ہم کہیں کہ ا یا ب کسی سے پیمائش عمل میں آسکتی ہے۔ کیونکہ فرض کرو کہ ہمارے پیمائش کے آلات سے ہمیشہ ایک ایسا نتیجہ حاصل ہوتا ہے جو اصلی نتیجہ سے بقدر اُس کے دس لاکھویں حصہ کے بڑا ہوتا ہے۔ اب ب و کو مقرر کرنے میں تقریباً ایک ملی میٹر کی خطا ہوگی، لیکن ا و کو مقرر کرنے میں صرف ایک ملی میٹر کے ہزارویں حصہ کی خطا ہوگی۔ اس لیے ہماری پیمائشیں ا سے عمل میں آنی چاہئیں نہ کہ ب سے۔ اب کی جگہ عہ، ا و کی جگہ عہ - عہَ، اور ب و کی جگہ عہَ رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ (۲)، (۳)، (۴) سے عہَ اخذ کرنے کا جو پیچیدہ عمل حساب ہے اُس سے کہیں زیادہ اطمینان بخش طریقہ یہ ہے کہ عہ - عہَ کو محسوب کرنے سے

ابتدا کیجائے۔ اِس لیے ہمیں (۲)، (۳)، (۴) سے وہ ضابطے حاصل کرنے چاہئیں جن سے عہَ - عہ اور ضہَ - ضہ حاصل ہوں اور ابتدائی ضابطوں کی بجائے اِن ضابطوں کو بعد کے اعمال حساب میں استعمال کرنا مناسب ہے۔

(عہَ - عہ) کے لیے مساوات اِس طرح حاصل ہوگی کہ (۳) کو جم عہ سے ضرب دیا جائے اور اس میں سے (۲) کو جب عہ سے ضرب دیکر تفریق کیا جائے چنانچہ اس طرح حاصل ہوتا ہے (۲۸۳)

رَ جم ضہَ جب (عہَ - عہ) = - غہ جم فہ جب (تہ - عہ)، ... (۵)

جس میں (تہ - عہ) چاند کا مغربی ساعتی زاویہ ہے۔

یہ مساوات بلاشبہ (۱) سے راست حاصل کی جاسکتی تھی جو لہ، مہ کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہونی چاہیئے۔ اگر ہم لہ = عہ + ۹۰°، مہ = ۰ رکھیں تو مساوات (۱)، (۵) میں بدل جاتی ہے۔

اگر (۲) کو جم عہ سے ضرب دیں اور اِس میں (۳) کو جب عہ سے ضرب دیکر جمع کریں تو حاصل ہوتا ہے

رَ جم ضہَ جم (عہَ - عہ) = رجم ضہ - غہ جم فہ جم (تہ - عہ)، ....(۶)

اور یہ مساوات، (۱) میں لہ = عہ، مہ = ۰ رکھنے سے فوراً حاصل ہوسکتی تھی۔

(۵) کو (۶) سے تقسیم کریں تو صعود مستقیم میں اختلاف منظر کے لیے اساسی مساوات شکل

مس (عہَ - عہ) = - جب خَ فہ جم فہ جب (تہ - عہ) | {جم ضہ - جب خَ فہ جم فہ جم (تہ - عہ)}،

........(۷)

میں حاصل ہوگی جس میں ہم نے غہ | ر کی بجائے جب خَ فہ رکھا ہے۔

بائیں جانب کی تمام رقمیں معلوم ہونے پر مس (عہَ - عہ) معلوم ہوجاتا ہے۔ ہم یہ مان لیں گے کہ اُن تمام صورتوں میں جنھیں یہ مساوات استعمال ہوگی جب خَ فہ ایک چھوٹی مقدار ہے۔ اس طرح مس (عہَ - عہ) کے جملہ میں شمار کنندہ ایک چھوٹی مقدار ہے۔ اگر ضہ چھوٹا ہو یعنی اگر جرم

خط استواء کے قریب ہو جو سورج، چاند اور صدر سیاروں کی صورتوں میں جن سے فی الحال واسطہ ہے درست ہے تو مس (عہَ - عہ) کے جملہ کا نسب نما تقریباً اکائی ہوگا، اِس لیے مس (عہَ - عہ) خود چھوٹا ہونا چاہئے اور اِس لیے (عہَ - عہ) بھی چھوٹا ہونا چاہئے۔ لیکن یہ یاد رہے کہ اگر جرم کا میل بہت بلند ہو اور اس لیے جم ضہ بہت چھوٹا ہو تو مس (عہَ - عہ) کا نسب نما بہت چھوٹا ہوگا اور چونکہ جب خَ فہ ایک چھوٹی مقدار ہے اِس لیے عہَ - عہ کا ایک چھوٹی مقدار ہونا ضروری نہیں ہے۔ چنانچہ ایسا مُدار تارہ جو قطب کے قریب سے گذرے اِسکی ایک مثال ہے، اِس صورت میں ہمیں مساوات (۷) کی دو اصلوں کے درمیان تمیز کرنا ہوگا یعنی (عہَ - عہ) اور $180^\circ +$ (عہَ - عہ) کے درمیان۔ یہ اس امر سے ہو سکتا ہے کہ مساوات (۵) پوری ہونی چاہئے۔

اب ہمیں (ضہَ - ضہ) معلوم کرنا ہے یعنی وہ تصحیح جو اصلی میل پر عائد کرنی ہوگی تاکہ ظاہری میل حاصل ہو۔ یہ اسقدر سادہ معاملہ نہیں ہے جسقدر صعود مستقیم میں اختلاف منظر کا ہے۔ (۲) کو جم $\frac{1}{2}$ (عہَ + عہ) سے اور (۳) کو جب $\frac{1}{2}$ (عہَ + عہ) سے ضرب دو اور جمع کرو اور پھر جم $\frac{1}{2}$ (عہَ - عہ) سے تقسیم کرو تو حاصل ہوگا

رَ جم ضہَ = ر جم ضہ - غہ جم فہ قط $\frac{1}{2}$ (عہَ - عہ) جم {تہ - $\frac{1}{2}$ (عہَ + عہ)} ... (۸)

یہ مساوات (۱) میں لہ = $\frac{1}{2}$ (عہ + عہَ)، مہ = ۰ رکھنے سے بھی راست حاصل ہوسکتی تھی۔ (۲۸۴)

اب ہم دو معاون مقداریں بہ اور جہ استعمال کریں گے جن کی تعریف حسب ذیل مساواتوں سے ہوتی ہے

بہ جب جہ = جب فہَ، بہ جم جہ = جم فہ قط $\frac{1}{2}$ (عہَ - عہ) جم {تہ - $\frac{1}{2}$ (عہَ + عہ)}

اِن میں سے ایک مساوات کو دوسری سے تقسیم کریں تو مس جہ حاصل

ہوتا ہے اور ہم جہ اور ۱۸۰° + جہ میں سے اُس کا انتخاب کر سکتے ہیں کہ
بہ مثبت ہو۔ پس بہ اور جہ دونوں پوری طرح مساواتوں

مس جہ = مس فہَ جم ½ (عہَ - عہ) قط{تہ - ½ (عہَ + عہ)}' ...(۹)

بہ = جب فہَ قم جہ' .... (۱۰)

سے معلوم ہوتے ہیں۔
اِن اندراجوں کو عمل میں لانے سے مساواتیں (۴) اور (۸)
یہ شکل اختیار کرتی ہیں:

رَجب ضہَ = رجب ضہ - غہ بہ جب جہ' ....(۱۱)

رَجم ضہَ = رجم ضہ - غہ بہ جم جہ' .....(۱۲)

(۱۱) کو جب ضہ اور (۱۲) کو جم ضہ سے ضرب دینے اور جمع کرنے
سے حاصل ہوتا ہے

رَجم (ضہَ - ضہ) = ر - غہ بہ جم (ضہ - جہ)' .....(۱۳)

(۱۱) کو جم ضہ سے ضرب دیکر اس میں سے (۱۲) مضروب جب ضہ
کو تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

رَجب (ضہَ - ضہ) = غہ بہ جب (ضہ - جہ)' .....(۱۴)

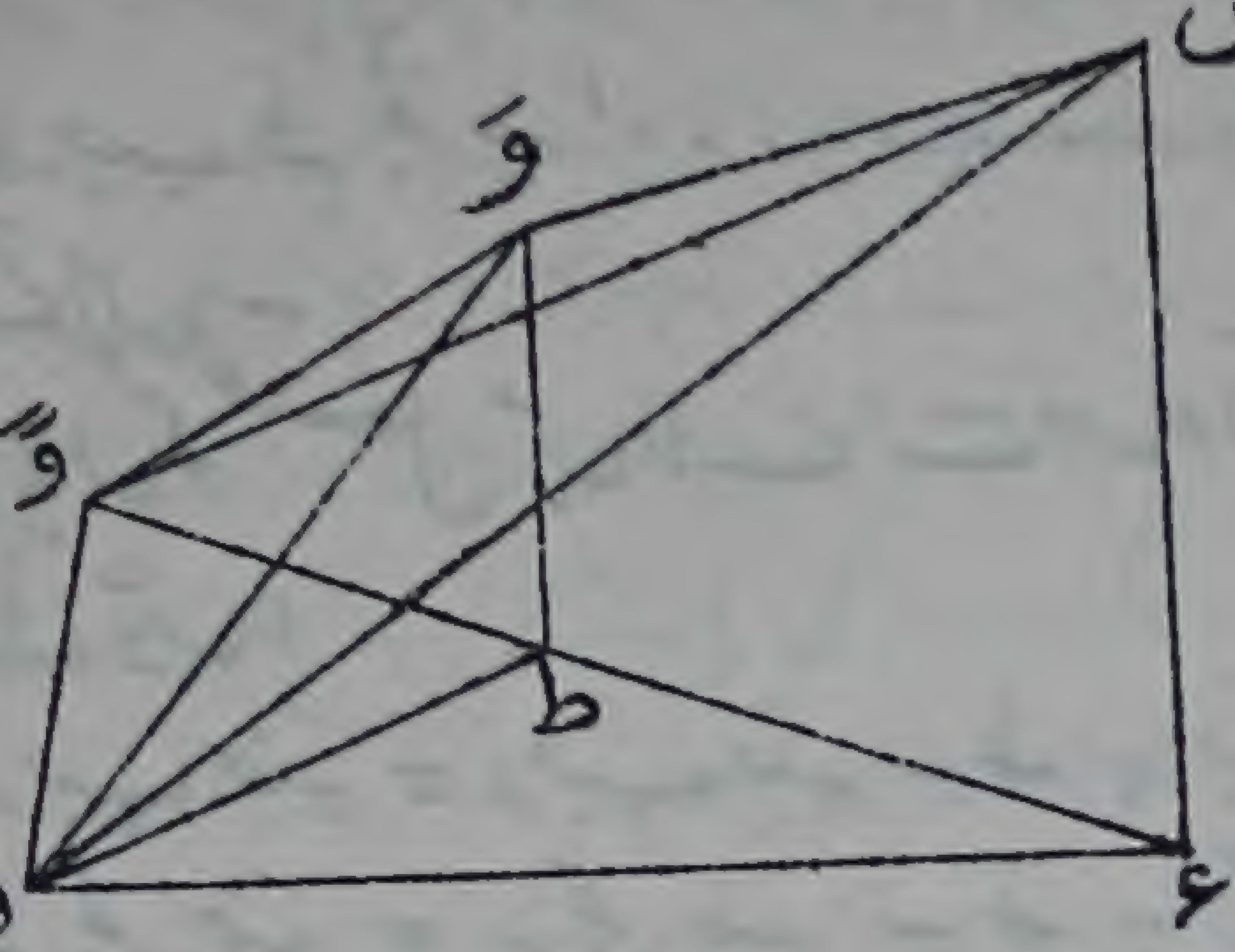
اِس لیے (۱۴) کو (۱۳) سے تقسیم کرنے اور غہ / ر کی جگہ جب خَ فہ رکھنے سے

مس (ضہَ - ضہ) = بہ جب خَ فہ جب (ضہ - جہ) / {۱ - بہ جب خَ فہ جم (ضہ - جہ)}' ...(۱۵)

اِس مساوات سے ہم ضہَ - ضہ معلوم کرتے ہیں اور جب اسے اصلی میل پر
عائد کیا جاتا ہے تو وہ ظاہری میل حاصل ہوتا ہے جو اختلاف منظر سے متاثر ہے۔

مثال ا۔ اگر اَ، چاند کا وہ مقام ہو جو ارض مرکزی اختلاف منظر سے
متاثر ہے تو ثابت کرو کہ اختلاف منظر کی وجہ سے ہٹاؤ کسی سمت اَ و میں
جب خَ جم ر و ہوگا جہاں ر راس ہے، اَ و = ۹۰° اور زمین کو کروی فرض
کیا گیا ہے۔

(۲۸۵) **مثال* ۲** — بتاؤ کہ مساواتیں (۱۱) اور (۱۲) جن سے میل میں اختلاف منظر حاصل ہوتا ہے کس طرح ہندسی عمل سے راست اخذ کی جا سکتی ہیں اور معاون مقداروں بہ اور جہ کا ہندسی مفہوم کیا ہے۔



شکل (۷۵)

فرض کرو کہ و میں سے گذرنے والے اُستوائی مُستوی پر عمود س ع، وَ ط (شکل ۷۵) ہیں۔ ع ط پر نقطہ وً ایسا لو کہ ع وً = ع و۔ نیز وً وَ، وَس کو ملاؤ۔

مثلث وً ع س اور و ع س ہر طرح آپس میں برابر ہیں۔ اسلیے
وَس وَ = (ضہ - ضہَ)

فرض کرو وً وَ = غہ بہ اور زاویہ ع وً وَ = جہ۔ چونکہ وً ط اور و ط زاویہ و ع ط کے ناصف پر ایک ہی ظل رکھتے ہیں اسلیے

غہ بہ جم جہ = وًط = وط جم $\left\{ \text{تہ} - \frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{عہَ}) \right\}$ قط $\frac{1}{2}$ (عہَ - عہ)

= غہ جم فہ قط $\frac{1}{2}$ (عہَ - عہ) جم $\left\{ \text{تہ} - \frac{1}{2}(\text{عہ}+\text{عہَ}) \right\}$

نیز غہ بہ جب جہ = ط وَ = غہ جب فہَ

اس طرح بہ، جہ متعین ہو جاتے ہیں۔ ہم جہ کو ۱۸۰° سے چھوٹا اور اسی علامت کا لیتے ہیں جو فہَ کی ہے، اس لیے بہ مثبت ہے۔

اب مثلث وَوَس سے

رَجم (ضہَ ـ ضہ) = ر ـ غہ بہ جم (ضہ ـ جہ)،

رَجب (ضہَ ـ ضہ) = غہ بہ جب (ضہ ـ جہ)

اس لیے حسب سابق

مس (ضہَ ـ ضہ) = غہ بہ جب (ضہ ـ جہ) / {ر ـ غہ بہ جم (ضہ ـ جہ)}

مثال ۳ ـ ثابت کرو کہ جب عرض بلد فہ سے دیکھا جائے تو کسی جرم سماوی کے میل کا اختلاف منظر معدوم ہوتا ہے اگر مس قہ = مس ضہ جم س جس میں ضہ اور س، میل اور ساعتی زاویہ ہیں۔ زمین کو کروی فرض کیا گیا ہے۔

مثال ۴ ـ اگر چاند کا ساعتی زاویہ اور میل سَ، ضہَ ہوں جبکہ اسے زمین کی سطح کے اس مقام سے دیکھا جائے جس کا ارض مرکزی عرض بلد فہ ہے اور اگر ساعتی زاویہ اور میل س، ضہ ہوں جبکہ اسے زمین کے مرکز سے دیکھا جائے تو ثابت کرو کہ

جب (سَ ـ س) = ا قط ضہ جب سَ،

مس ضہَ قم سَ = (ا ـ ب قم ضہ) س ضہ قم س

جہاں ا = جب خَ فہ جم فہَ، ب = جب خَ فہ جب فہَ

[Coll. Exam]

عہ = تہ ـ س اور عہَ = تہ ـ سَ لکھنے سے ہمیں مساواتیں (۲) اور (۳) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ

ر جم ضہ جب س = رَجم ضہَ جب سَ

اور ر جم ضہ جم س ـ غہ جم فہَ = رَجم ضہَ جم سَ

ہم دوسری طرح بھی دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساواتیں صریحاً درست ہیں کیونکہ پہلی مساوات کی ہر جانب صرف چاند اور نصف النہار کے درمیانی فاصلہ کو بیان کرتی ہے

اور دوسری مساوات مساوات (۱) صفحہ ۵۰ سے راست حاصل کیجا سکتی ہے اگر اس میں مہ = ۰ اور لہ = تہ رکھا جائے کیونکہ یہ مساوات لہ اور مہ کی سب قیمتوں کے لیے درست ہونی چاہیئے۔ اِن مساواتوں کے ساتھ مساوات (۴) لینے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ ایک سیارہ کے زاوی نصف قطر رَ اور ر جبکہ اس کو بالترتیب زمین پر کے ایک مقام پ سے اور زمین کے مرکز سے دیکھا جائے حسب ذیل رشتہ سے مربوط ہوتے ہیں:۔

$$\text{جب } رَ = \frac{\text{جب}\ (\text{ضَہ} - \text{جہ})}{\text{جب}\ (\text{ضہ} - \text{جہ})}\ \text{جب } ر$$

جہاں جہ ایک معاون زاویہ ہے جس کی تعریف مساوات

$$\text{مم جہ} = \text{قط}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{عَہ} - \text{عہ})\ \text{مم فہ جم} \left\{ \text{تہ} - \tfrac{1}{2}\ (\text{عہ} + \text{عَہ}) \right\}$$

سے ہوتی ہے، مقام کا ارض مرکزی عرض بلد فَہ ہے، مشاہدہ کا کوئی وقت تہ، سیارہ کا صعود مستقیم اور میل جبکہ اسے پ سے دیکھا جائے عَہ اور ضَہ، اور اس کا صعود مستقیم اور میل جبکہ اسے زمین کے مرکز سے دیکھا جائے عہ اور ضہ ہیں (۲۸۶)

[Cou. Exom.]

مثال ۶ — ثابت کرو کہ چاند کے صعود مستقیم اور میل میں اختلاف منظر علی الترتیب

$$\text{خَ}_{\text{عہ}} = \text{یس}^{-1} \left\{ \text{ا جب س} \,\backslash\, (\text{ا} - \text{ا جم س}) \right\},$$

$$\text{خَ}_{\text{ضہ}} = -\,\text{ضہ} - \text{یس}^{-1} \left\{ (\text{مس ضہ} - \text{ا مس فَہ})\ \text{جب خَ}_{\text{عہ}} \,\backslash\, \text{ا جب س} \right\}$$

ہیں جہاں خَفہ افقی اختلاف منظر ہے، س ساعتی زاویہ، فَہ ارض مرکزی عرض بلد، اور ا = جب خَفہ جم فَہ قط ضہ۔

یہ نتیجہ مساواتوں (۴)، (۵)، (۶) سے فوراً اخذ ہو سکتا ہے۔

۹۴ - اختلاف منظر کے جملوں کو سلسلوں میں پھیلانا۔

یہ مان لو کہ جب $\text{خَ}_{\text{فہ}}$ ایک چھوٹی مقدار ہے اور جرم جس کا یہ افقی اختلاف منظر ہے سماوی قطبوں میں سے کسی ایک سے اتنا دور ہے کہ جم ضہ بہت چھوٹا نہیں ہے۔ اب ہم دفعہ ۹۳ کے ضابطہ (۷) کو حسب ضابطہ (۴) صفحہ ۳۵۰ حصہ اول پھیلا سکتے ہیں:۔

$$\text{عَ - عہ} = -\frac{\text{جب خَ}_{\text{فہ}}\ \text{جم فہ جب (تہ - عہ)}}{\text{جم ضہ جب ۱}''} - \frac{\text{جب}^2\text{خَ}_{\text{فہ}}\ \text{جم}^2\text{فہ جب ۲ (تہ - عہ)}}{\text{جم}^2\text{ضہ جب ۲}''}$$

$$-\frac{\text{جب}^3\text{خَ}_{\text{فہ}}\ \text{جم}^3\text{فہ جب ۳ (تہ - عہ)}}{\text{جم}^3\text{ضہ جب ۳}''} \ldots \text{(۱)}$$

اسی طرح دفعہ ۹۳ کے ضابطہ (۱۵) سے

$$\text{ضَ - ضہ} = \frac{\text{بہ جب خَ}_{\text{فہ}}\ \text{جب (ضہ - جہ)}}{\text{جب ۱}''} + \frac{\text{بہ}^2\text{جب}^2\text{خَ}_{\text{فہ}}\ \text{جب ۲ (ضہ - جہ)}}{\text{جب ۲}''}$$

$$+\frac{\text{بہ}^3\text{جب}^3\text{خَ}_{\text{فہ}}\ \text{جب ۳ (ضہ - جہ)}}{\text{جب ۳}''} \ldots \text{(۲)}$$

ہم نے ہر سلسلہ کی تین سے زیادہ رقمیں نہیں لکھی ہیں کیونکہ باقی سب اعلیٰ رقمیں بہت ہی چھوٹی اور ناقابل قدر ہیں۔ ضابطہ (۱) سے (عَ - عہ) = $\text{خَ}_{\text{عہ}}$ حاصل ہوتا ہے جو وہ تصحیح ہے جو چاند کے اصلی صعود مستقیم پر عائد کرنی ہوگی تاکہ ظاہری صعود مستقیم حاصل ہو۔ ضابطہ (۲) سے میل کیلئے متناظر تصحیح $\text{خَ}_{\text{ضہ}}$ حاصل ہوتی ہے۔

ہر سلسلہ کی پہلی رقم بہت زیادہ اہم ہے لیکن دوسری بھی چاند کے اختلاف منظر میں نظر انداز نہیں کرنی چاہئے۔ اور جب بہت صحت مطلوب

ہو تو تیسری بھی قابل قدر ہو جاتی ہے۔ اس کے جواب میں سورج اور سیاروں کے لیے جو جملے ہیں ان میں صرف پہلی رقم کافی ہوتی ہے۔

دفعہ ۹۲ مثال اکی مساوات (۲۸۷)

مس خَ طا = جب خَ فہ جب طا \ (ا - جب خَ فہ جم طا)

جس میں جم طا = جب ضہ جب فہ + جم ضہ جم فہ جم (تہ - عہ) کو بھی ایک سلسلہ کے طور پر بیان کیا جا سکتا ہے اور اس طرح خَ طا کیلئے اختلاف منظری ہٹاؤ

خَ طا = جب خَ فہ جب طا قم اً + جب۲ خَ فہ جب ۲ طا قم ۲ً

+ جب۳ خَ فہ جب ۳ طا قم ۳ً ..(۳)

حاصل ہوتا ہے۔ میل اور صعود مستقیم میں چاند کا اختلاف منظر تقریبی طور پر محسوب کرنے میں ہم زمین کو ایک کرہ سمجھ سکتے ہیں اور (۱) اور (۲) کی صرف پہلی دو رقموں کو لے سکتے ہیں۔ اگر مشاہد کا عرض بلد فہ ہے اور چاند کا ساعتی زاویہ = تہ - عہ = س تو

بہ جب جہ = جب فہ،

اور بہ جم جہ = جم فہ جم س تقریباً

اس لیے خَ عہ = عہَ - عہ = - خَ جم فہ جب س قط ضہ، .... (۴)

خَ ضہ = ضہَ - ضہ = خَ (جم فہ جم س جب ضہ - جب فہ جم ضہ)۔ .(۵)

حسب ذیل مختصر جدول کے استعمال سے جو ضابطہ (۴) سے بہ آسانی تیار کی جا سکتی ہے ساعتی زاویہ میں چاند کا اختلاف منظر تقریبی طور پر معلوم ہو سکتا ہے۔ یہ جدول اس مفروض پر تیار کیگئی ہے کہ افقی اختلاف منظر ۶۰َ ہے اور چاند کا میل صفر ہے۔ ان شرطوں کے تحت

اختلاف منظر جب اُسے وقت کے دقیقوں میں بیان کیا جائے ۴ جم فہ × جب س ہوتا ہے اور اِسی سے یہ جدول محسوب ہوئی ہے۔ کسی دئے ہوئے ساعتی زاویہ اور عرض بلد کے لیے ساعتی زاویہ کا اختلاف منظر اوپر کے چھوٹے خانوں میں لکھا گیا ہے۔ اس جدول کا استعمال ایک مثال سے واضح کیا جاتا ہے :- فرض کرو کہ چاند کا ساعتی زاویہ (مغرب) ۳ گ ہے اور عرض بلد ۵۸° ہے۔ جدول سے معلوم ہوتا ہے کہ ساعتی زاویہ کا اختلاف منظر منٹوں میں ۱،۵ ہے،

ساعتی زاویہ میں اختلاف منظر کے منٹ

ساعتی زاویہ	۰،۵	۱	۱،۵	۲	۲،۵	۳	۳،۵	
					عرض بلد شمال یا جنوب			
۱	۶۱	۱۵						۱۱
۲	۷۶	۶۰	۴۱	۰				۱۰
۳	۸۰	۶۹	۵۸	۴۵	۲۸			۹
۴	۸۲	۷۳	۶۴	۵۵	۴۴	۳۰		۸
۵	۸۳	۷۵	۶۷	۵۹	۵۰	۳۹	۲۵	۷
۶	۸۳	۷۶	۶۸	۶۰	۵۱	۴۱	۲۹	۶

اس لیے یہ وہ مقدار ہے جسے ظاہری صعودِ مستقیم میں سے تفریق کرنا ہوگا تاکہ اصلی صعودِ مستقیم حاصل ہو۔ اگر چاند کا میل صفر نہ ہو جو بالعموم نہیں ہوگا تو اختلافِ منظر میں ایک کسر کا اضافہ کرنا ہوگا جسے ذیل میں (۲۸۸) بتایا گیا ہے:

چاند کا میل خواہ + یا − ۱۰° ۱۵° ۲۰° ۲۵°

جدول سے جو اختلاف منظر حاصل ہو

اس میں ساجمع کرو فیصدی ۲ ۴ ۶ ۱۰

بالعموم یہ کہنا صحیح نہ ہوگا کہ افقی اختلاف منظر ۶۰َ ہے، اس لیے جدول کے اختلاف منظر میں ساٹھواں حصہ ہر منٹ کے لیے جمع (یا تفریق) کرنا ہوگا جبکہ اختلاف منظر ۶۰َ سے بڑا (یا چھوٹا) ہو۔ یہ امور اور اُن عرض بلدوں کے لیے بینی ادراج جو جدول میں نہیں ہیں حسب ذیل مثال میں واضح کئے گئے ہیں:۔ مُشاہد کا عرض بلد ۴۲° ہے، چاند کا میل ۱۰° ہے، اس کا ساعتی زاویہ ۵ گ ہے، اور اس کا افقی اختلاف منظر ۵۷َ ہے۔ جدول سے ساعتی زاویہ میں اختلاف منظر معلوم کرو۔

جدول سے معلوم ہوتا ہے کہ ۵ گ ساعتی زاویہ اور ۳م اختلاف منظر کے لیے عرض بلد ۳۹° ہے لیکن ½ ۲م اختلاف منظر کے لیے عرض بلد ۵۰° ہوگا۔ اس لئے یہ ظاہر ہے کہ عرض بلد ۴۲° کے لیے اختلاف منظر تقریباً ۲م ۱۷ثانئے ہوگا۔ میل کی تصحیح کے لیے ۲ فیصدی جمع کرنا ہوگا یعنی ۳ ثانئے اور بیسواں حصہ یعنی ۹ ثانئے تفریق کرنا ہوگا کیونکہ اختلاف منظر ۵۷َ ہے اور اس لیے اُس معیار سے ۳ ثانئے کم ہے جو جدول میں لیا گیا ہے۔ پس ہم اِس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ساعتی زاویہ میں اختلاف منظر ۲م ۴۶ث ہے اور اِس لیے اختلاف منظر ساعتی زاویہ کو بقدر ۲م ۴۶ث کے بڑھا دے گا اگر چاند نصف النہار کے مغرب میں ہو اور گھٹا دیگا اگر چاند مشرق میں ہو کیونکہ ہمیں یہ یاد رکھنا چاہئے کہ مشرقی ساعتی زاوئے منفی ہوتے ہیں۔

مثال ۱ ۔ ثابت کرو کہ چاند کے ارض مرکزی اختلاف منظر کے ضابطہ (۳) میں دوسری رقم یعنے جب۲ خَ فہ جب ۲ طا قم ۲ً، ۳ ۳َ تک پہنچ سکتی ہے لیکن تیسری رقم جب۳ خَ فہ جب ۳ طا قم ۳ً ہمیشہ ۵۰ً کے اندر ہونی چاہئے۔

نوٹ:۔ چاند کا بڑے سے بڑا افقی اختلاف منظر ۶۱َ۵ ہے۔

مثال ۲ ۔ ثابت کرو کہ اگر چاند کا ساعتی زاویہ بقدر چھوٹی مقدار مف س کے بدلے تو اِس کے جواب میں ساعتی زاوئے میں اختلاف منظر کی تبدیلی تقریباً
۔ خَ جم فہ جم س قط ضہ مف س ہے اور میل میں اختلاف منظر کی تبدیلی
۔ خَ جم فہ جب س جب ضہ ہے۔

مثال ۳ ۔ اگر مشاہد کا ارض مرکزی عرض بلد ۳۹° ۴۵' ۵۵'' ہو اور اگر چاند کا میل + ۲۶° ۲۳' ۳۶،۶'' اِس کا ساعتی زاویہ ۳۲° ۳۹' ۵۹،۴'' اور اِسکا افقی اختلاف منظر ۵۷' ۵،۷'' ہو تو صعود مستقیم میں اختلاف منظر ۲۶' ۵۶،۴'' ہوگا جو (۱) کی پہلی رقم ۱' ۵۸،۷۲''، دوسری رقم ۱،۹۱'' اور تیسری رقم ۲،۰۲'' پر مشتمل ہے

مثال ۴ ۔ ثابت کرو کہ میل میں چاند کا اختلاف منظر ۱۶' ۱۵،۸'' ہے (۲۸۹)
جبکہ اُسے ویسٹرن ریزرو کالج اوہیو (West. Coll. Ohio.) سے جو جغرافی عرض بلد ۴۱° ۱۴' ۴۲'' میں واقع ہے دیکھا جائے۔ یہ دیا گیا ہے کہ چاند کا میل + ۲۶° ۲۴' ۳۱،۵'' ہے، اس کا ساعتی زاویہ ۲۳° ۱۳' ۱۲،۰''، اُس کا افقی اختلاف منظر ۵۷' ۰،۷'' اور صعود مستقیم میں اُس کا اختلاف منظر ۱۹' ۱۲،۶''۔

[From Loomis' "Pratical Astronomy," p. 196]

۹۵ ۔ زمین سے چاند کے فاصلہ کی تحقیق ۔

چاند کے میل پر ارض مرکزی اختلاف منظر کے اثر کے لیے جو عام جملہ ہے (دفعہ ۹۴ مساوات ۲) وہ اُس مخصوص صورت میں بہت سادہ ہو جاتا ہے جبکہ چاند نصف النہار پر ہو۔ اُس وقت چاند کے اصلی اور ظاہری صعود مستقیم منطبق ہوتے ہیں کیونکہ دونوں کوکبی وقت کے مساوی ہوتے ہیں۔ اِس لیے حاصل ہوتا ہے عہَ = عہ = تہ اور اسلیے دفعہ ۹۳ کی مساواتوں (۹)، (۱۰) سے ہم دیکھتے ہیں کہ بہ = ۱ اور جہ = فہَ۔
اِس اندراج سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ضہَ} - \text{ضہ} = \frac{\text{غہ جب} (\text{ضہ} - \text{فہَ})}{\text{ر جب } ۱''} + \frac{\text{غہ}^{۲} \text{ جب } ۲ (\text{ضہ} - \text{فہَ})}{\text{ر}^{۲} \text{ جب } ۲''} + \frac{\text{غہ}^{۳} \text{ جب } ۳ (\text{ضہ} - \text{فہَ})}{\text{ر}^{۳} \text{ جب } ۳''} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اور اب ہم یہ بتائیں گے کہ کس طرح مناسب مشاہدوں سے جو دو رصد گاہوں میں کئے جائیں یہ مساوات ر کو معلوم کرنے کا ذریعہ بنتی ہے۔
جب چاند کسی رصد گاہ ا کے نصف النہار پر سے گذر رہا ہو تو

اُس کا مشاہدہ دائرہ مرور سے کیا جاتا ہے اور جیسا کہ کسی آیندہ باب میں سمجھایا جائے گا اُس کا ظاہری میل ضَہ اس سے حاصل کیا جاتا ہے۔ اس قیمت کو (۱) میں درج کرتے ہیں تو ایک ضابطہ ملتا ہے جسے دو مجہول مقداروں ضہ اور ر کے درمیان ایک مساوات سمجھا جا سکتا ہے کیونکہ فہَ اور غہ معلوم ہیں۔

فرض کرو کہ کسی دوسری رصدگاہ ا$_1$ پر بھی مشاہدہ کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ ا$_1$ کے لحاظ سے مقداروں ضَہ$_1$، ضہ$_1$، غہ$_1$، فہ$_1$، ر$_1$ کے وہی معنی ہیں جو ا کے لحاظ سے ضَہ، ضہ، غہ، فہ، ر کے ہیں۔ مناسب ہوگا کہ ا اور ا$_1$ تقریباً ایک ہی نصف النہار پر ہوں تاکہ اِن دو مشاہدوں کے درمیان وقفہ حتی الامکان کم ہو، اِس کی وجہ یہ ہے کہ چاند چونکہ متحرک ہوتا ہے اِس کا اصلی میل بالعموم تبدیل ہوتا رہتا ہے اور اِس لیے ضہ اور ضہ$_1$ اِن دو مقامات پر ایک ہی نہیں ہوتے۔

اِن دو رصدگاہوں کے نصف النہاروں کے درمیان ایک گھنٹہ سے زیادہ کا فرق نہ ہونے پر بھی ضہ$_1$ اور ضہ کے درمیان ، آ کے مساوی فرق ہو سکتا ہے جو پورے اختلاف منظر کا تقریباً ایک تہائی ہے۔ اسی طرح ر$_1$ اور ر بالعموم مختلف ہوں گے۔ وہ شرح فی گھنٹہ جس سے چاند ہر مخصوص دن اپنا میل بدلتا رہتا ہے معلوم ہے اور رصدگاہوں پر اِس کے دو مروروں کے درمیان وقفہ بھی معلوم ہے، (۲۹۰)
اِس لیے اگر ہم ضہ$_1$ = ضہ + مف ضہ رکھیں تو مف ضہ کو معلوم خیال کیا جا سکتا ہے۔ غہ$_1$ اور فہ$_1$ دوسری رصدگاہ کے محل وقوع سے معلوم ہوتے ہیں جس طرح غہ اور فہ پہلی رصدگاہ کے محل وقوع سے معلوم ہوتے ہیں اور اگر ا زمین کا استوائی نصف قطر ہو تو ہم غہ = ا (۱ - ن) اور غہ$_1$ = ا (۱ - ن$_1$) رکھ سکتے ہیں جہاں ن اور ن$_1$ چھوٹی معلومہ مقداریں ہیں۔ بالآخر ہم رکھ سکتے ہیں ر$_1$ = ر (۱ + ک) جہاں ک ایک چھوٹی مقدار ہے جو زیر بحث مخصوص لمحہ پر چاند کے فاصلہ کی شرح تبدیلی پر منحصر ہے۔

اِس کو موجودہ تحقیق میں مف ضہ کی طرح ایک معلومیہ مقدار سمجھا جاسکتا ہے۔ اِن اندراجوں کو عمل میں لانے سے وہ دو مساواتیں جو ضہ اور ا\ ر کو معلوم کرنے کے لیے ہیں حسب ذیل ہو جاتی ہیں:

ضَہ - ضہ = ا(۱ - ن) جب (ضہ - فَہ) / ر جب اً + ا۲ (۱ - ن)۲ جب ۲ (ضہ - فَہ) / ر۲ جب ۲ً ...(۲)

ضَہ۱ - ضہ - مف ضہ = ا(۱ - ن۱) جب (ضہ + مف ضہ - فَہ۱) / ر (۱ + ک) جب اً

+ ا۲ (۱ - ن۱)۲ جب ۲ (ضہ + مف ضہ - فَہ۱) / ر۲ (۱ + ک)۲ جب ۲ً .....(۳)

جن میں ہم نے ہر مساوات کی بائیں جانب صرف دو رقمیں لکھی ہیں لیکن اگر انتہائی صحت مطلوب ہو تو تیسری رقم بھی جمع کرلی جاسکتی ہے۔

اِن مساواتوں کو حل کرنے میں ہم پہلے وہ رقمیں نکال دیتے ہیں جن میں ا۲\ ر۲ شامل ہے اور اُن رقموں میں جن میں ا\ ر شامل ہے ضہ کی بجائے قیمت ۱/۲ (ضَہ + ضَہ۱) = ضہ رکھتے ہیں، اس طرح ضہ اور ا\ ر میں دو سادہ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:

ضَہ - ضہ = ا(۱ - ن) جب (ضہ - فَہ) / ر جب اً ، .....(۴)

ضَہ۱ - ضہ - مف ضہ = ا(۱ - ن۱) جب (ضہ + مف ضہ - فَہ۱) / ر (۱ + ک) جب اً ...(۵)

اِن سے ضہ اور ا\ ر کی پہلی تقریبی قیمتیں حاصل ہو جاتی ہیں۔ ضہ کی اس قیمت کو (۲) اور (۳) کی بائیں جانب کی دونوں رقموں میں درج کرنے سے اور (۲) اور (۳) کی محصلہ رقموں میں ا/ر کی قیمت کو درج کرنے سے پھر ہمیں دو سادہ مساواتیں ملتی ہیں جن کو حل کرنے سے ضہ اور ا\ ر پوری مطلوبہ صحت کے ساتھ معلوم ہو جاتے ہیں۔ پس چاند کا

فاصلہ معلوم ہو جاتا ہے۔

اِس امر پر غور کرنا اہم ہے کہ مقاموں کو کِس طرح منتخب کرنا چاہیئے
(۲۹۱) تاکہ ربڑی سے بڑی صحت کے ساتھ معلوم ہو سکے۔ اُن شرطوں کا مطالعہ کرنے کے لیے جن سے یہ مقصد حاصل ہوتا ہے ہم زمین کو کرّوی اور اُن دو رصدگاہوں کو ایک ہی نصف النہار پر واقع فرض کر سکتے ہیں۔ اس صورت میں مساواتیں (۴) اور (۵) حسب ذیل ہو جاتی ہیں:

$$\text{ضہَ} - \text{ضہ} = \frac{\text{ا جب (ضہ} - \text{فہَ)}}{\text{رجب اَ}} \quad \dots\dots\dots (۶)$$

$$\text{ضہَ}_{\text{ا}} - \text{ضہ}_{\text{ا}} = \frac{\text{ا جب (ضہ}_{\text{ا}} - \text{فہَ}_{\text{ا}}\text{)}}{\text{رجب اَ}} \quad \dots\dots\dots (۷)$$

تفریق کرنے سے

$$\frac{\text{ا}}{\text{ر}} = \tfrac{1}{2}(\text{ضہَ} - \text{ضہَ}_{\text{ا}})\ \text{جب اَ قم}\ \tfrac{1}{2}(\text{فہَ} - \text{فہَ}_{\text{ا}})\ \text{قط}\left\{\text{ضہ} - \tfrac{1}{2}(\text{فہَ} + \text{فہَ}_{\text{ا}})\right\}' \quad \dots\dots (۸)$$

فرض کرو کہ مشاہدوں میں خطاؤں کی وجہ سے $\tfrac{1}{2}$ (ضہَ - ضہَ$_{\text{ا}}$) کی قیمت میں ع ثانیوں کی خطا داخل ہوئی ہے، اِس لیے وہ خطا جو $\frac{\text{ا}}{\text{ر}}$ میں اس باعث پیدا ہوگی حسب ذیل ہے:

$$\tfrac{1}{2}\ \text{ع جب اَ قم}\ \tfrac{1}{2}(\text{فہَ} - \text{فہَ}_{\text{ا}})\ \text{قط}\left\{\text{ضہ} - \tfrac{1}{2}(\text{فہَ}_{\text{ا}} + \text{فہَ})\right\}$$

مُشاہدوں کو اس طرح مرتب کرنا چاہیئے کہ ع جیسی خطائیں جو ایک حد تک ناگزیر ہیں $\frac{\text{ا}}{\text{ر}}$ کی آخری قیمت پر حتی الامکان کم سے کم اثرانداز ہوں۔ $\frac{\text{ا}}{\text{ر}}$ میں کم سے کم ممکن خطا $\tfrac{1}{2}$ ع جب اَ ہوگی اور اس کے لیے یہ ضروری ہے کہ فہَ$_{\text{ا}}$ = ۹۰°، فہَ = - ۹۰°، ضہ = ۰. یعنی دوسرے لفظوں میں اِس انتہائی صورت کے لیے رصدگاہ ا زمین کے قطب جنوبی پر اور رصدگاہ ا$_{\text{ا}}$ قطب شمالی پر ہونی چاہیئے اور چاند خط استوا میں ہونا چاہیئے۔ یہ شرطیں بلاشبہ ناممکن ہیں لیکن اِس سے یہ پتہ چلتا ہے کہ ایک رصدگاہ اونچے سے اونچے

ممکن شمالی عرض بلد میں ہونی چاہیئے اور دوسری نیچے سے نیچے ممکن جنوبی عرض بلد میں ہونی چاہیئے اور چاند کا میل $\frac{1}{2}$ (فہ، + فہَ) سے اتنا قریب ہونا چاہیئے جتنا ممکن ہو۔

مثال ۱۔ اگر اُس مماسی مخروط کا نیم زاویہ راس س ہو جو زمین کے مرکز سے چاند کی سطح کو مس کرتا ہوا کھینچا گیا ہو جبکہ چاند کا اختلاف منظر خ ہو اور اگر سَ، خَ دوسرا مشابہ زوج ہو تو ثابت کرو کہ

جب س : جب سَ :: جب خ : جب خَ

اگر زمین کو کروی فرض کیا جائے۔

مثال ۲۔ بتاریخ ۷، جنوری ۱۹۰۴ء بوقت ظہر یہ معلوم ہوا کہ سَ = ۱۶َ ۲۰ً اور خَ = ۵۹َ ۱۵ً۔ چاند کا ظاہری نیم قطر معلوم کرو اگر افقی اختلاف منظر ۲۲ ۴۸ ۳ً ہے۔

مثال ۳۔ یہ تسلیم کرکے کہ زمین کا استوائی نصف قطر ۳۹۶۳ میل اور چاند کا استوائی افقی اختلاف منظر ۵۷َ ہے ثابت کرو کہ زمین کے مرکز سے چاند کا فاصلہ ...۲۳۹ میل ہے۔

۹۶۔ چاند کا اختلافِ منظر السمت میں۔

اگر زمین ایک کامل کرہ ہوتی تو اختلاف منظر کا اثر چاند کو صرف ایک انتصابی دائرہ میں دبانے سے ظاہر ہوتا اور اس لیے السمت پر اس کا کوئی اثر نہ ہوتا۔ لیکن جب ہم زمین کی کرہ نمائی شکل کو لیتے ہیں تو حالات کسی قدر (۲۹۲) مختلف ہوتے ہیں۔ اختلاف منظری اثر چاند کو اُس نقطہ سے پست کرتا ہے جس پر مشاہدہ کے مقام میں سے گذرنے والا زمین کا نصف قطر کرہ سماوی سے ملتا ہے اور زمین کی ناقصیت کی وجہ سے یہ نقطہ بالعموم راس پر منطبق نہیں ہوتا۔ اس لیے چاند کے السمت پر بالعموم اختلاف منظری اثر ہوتا ہے اگرچہ بلاشبہ یہ اثر بہت چھوٹا ہے۔ اس اثر کا ایک تقریبی حساب جو اکثر مقصدوں کے لیے کافی صحیح ہے ذیل میں درج ہے۔ فرض کرو کہ ر (شکل ۷۶)

اصلی راس ہے اور رَ کرہٗ سماوی کا وہ نقطہ ہے جہاں مُشاہد کے مقام میں سے گذرنے والا زمین کا نصف قطر کرہٗ سماوی سے ملتا ہے۔ پس ر رَ = فہ - فہَ یعنی وہ فرق جو ہیئتی عرض بلد اور ارض مرکزی عرض بلد کے درمیان ہے۔ اختلاف منظر چاند کو م سے مَ تک پست کرتا ہے اور اگر م ل اور رَ س، ر مَ پر عمود ہوں تو السمت پر اثر حسب ذیل ہوگا:

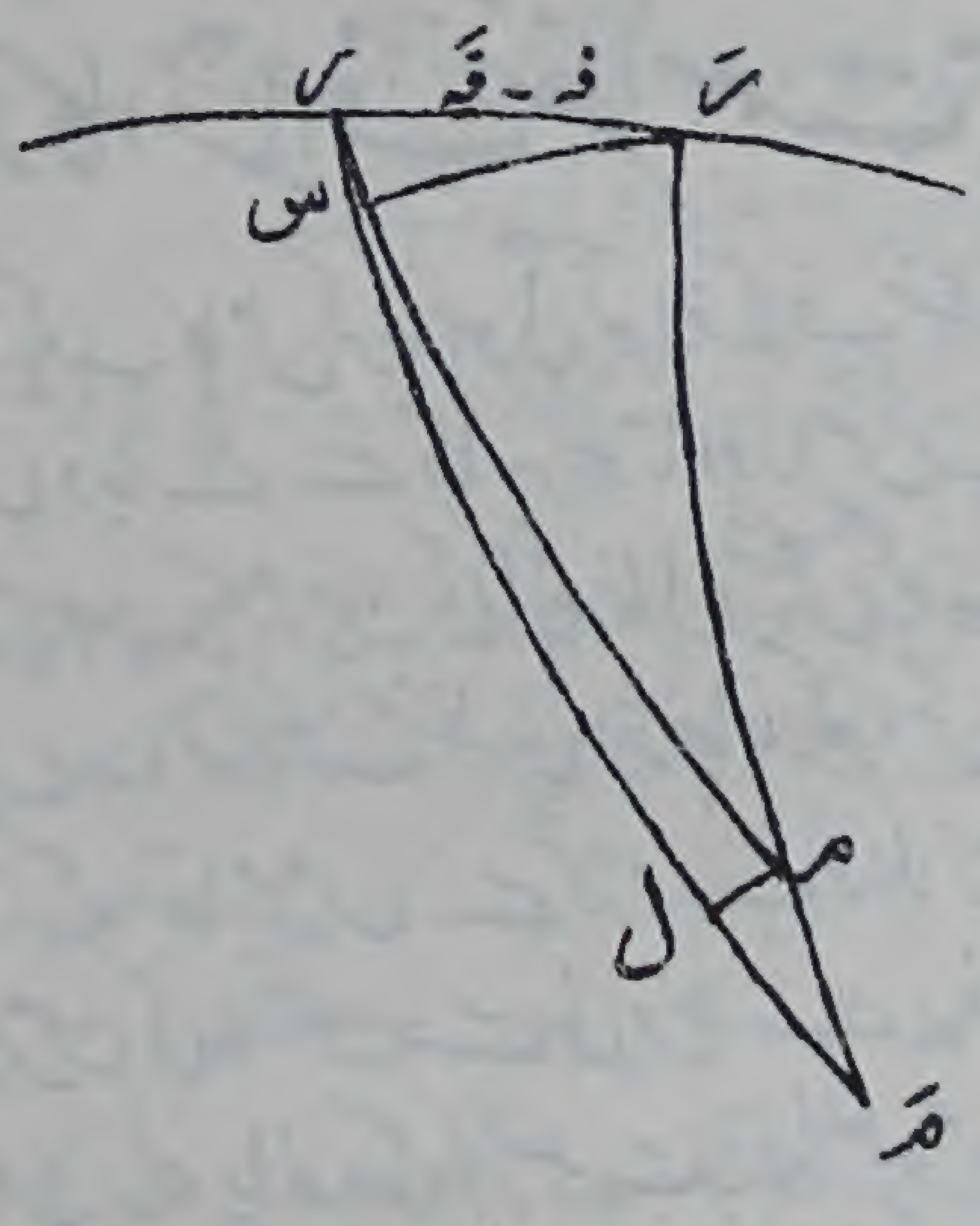
زاویہ م ر ل = جب م ل قم ر م = جب م مَ جب ل مَ م قم ر م

= جب خَ~فہ~ جب رَ مَ جب ل مَ م قم ر م

= جب خَ~فہ~ (فہ - فہَ) جب رَ ر س قم ر م

= جب خَ~فہ~ (فہ - فہَ) جب ا قم ی

جہاں ا اور ی علی الترتیب چاند کا السمت اور فاصلہ راس ہیں اور زاویہ رَ ر س = ا - ۱۸۰°۔



شکل (۷۶)

(۲۹۳) ہم اس مسئلہ کی تحقیق حسب ذیل طریقہ پر بھی کر سکتے ہیں۔ مُشاہد وَ (شکل ۴۷) کے محل میں سے تین قایم محور کھینچو جن کی مثبت سمتیں افق کے شمالی اور مشرقی نقطوں اور نقطہ راس کی جانب ہوں۔ فرض کرو کہ مُشاہد کے لیے چاند کا السمت اَ اور فاصلہ راس یَ ہے اور ان کے جواب میں زمین کے مرکز میں سے گذرنے والے محوروں کے لحاظ سے متناظر مقداریں ا، ی ہیں۔ اِن محوروں کے حوالہ سے

وس کی جیوب التمام ہیں جب ی جم ا، جب ی جب ا، جم ی

وَس " " جب یَ جم اَ، جب یَ جب اَ، جم یَ

اور و وَ " " -جب (فہ-فَہ)، جم (فہ-فَہ)

ان تین محوروں میں سے ہر محور پر وس، وَس اور و وَ کے ظِل لیکر وَس کے ظِل کو وس اور و وَ کے ظِلوں کے فرق کے مساوی رکھنے سے دفعہ ۹۳ کی مساواتیں (۲)، (۳)، (۴) کی طرح حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:

رَ جب یَ جم اَ = رجب ی جم ا + غہ جبب (فہ-فَہ).....(۱)

رَ جب یَ جب اَ = رجب ی جب ا ....(۲)

رَ جم یَ = رجم ی - غہ جم (فہ-فَہ).........(۳)

اِن مساواتوں سے بآسانی حاصل ہوتا ہے (حسب دفعہ ۹۳ مساوات ۷)

مس (اَ-ا) = -جب خَ فہ جب (فہ-فَہ) جب ا | { جب ی + جب خَ فہ جم ا جب (فہ-فَہ) }

اور اس سے السمت میں اختلاف منظر حاصل ہوتا ہے۔

(۱) کو جم ½ (ا+اَ) سے اور (۲) کو جب ½ (ا+اَ) سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے اور پھر جم ½ (اَ-ا) سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

رَ جب یَ = رجب ی + غہ جب (فہ-فَہ) جم ½ (اَ+ا) قط ½ (اَ-ا)

دفعہ ۹۳ کے طریقہ کی اتباع میں اب ہم دو معاون مقداریں بَہ، جَہ داخل کرتے ہیں جن کی تعریف مساواتوں

بَہ جم جَہ = جم (فہ - فہَ)،

بَہ جب جَہ = - جب (فہ - فہَ) جم $\frac{1}{2}$ (اَ + ا) قط $\frac{1}{2}$ (اَ - ا)

سے ہوتی ہے۔ اِن کے اندراج سے حاصل ہوتا ہے

رَ جب یَ = رجب ی - غہ بَہ جب جَہ، رَ جم یَ = رجم ی - غہ بَہ جم جَہ

اس لیے دفعہ ۹۳ مساوات (۱۳) کی طرح

مس (یَ - ی) = بَہ جب خَ‌فہ جب (ی - جَہ) \ {۱ - بَہ جب خَ‌فہ جم (ی - جَہ)}

اس سے فاصلہ راس میں اختلاف منظر معلوم ہوتا ہے۔ (۲۹۴)

جن نتیجوں پر ہم پہنچے ہیں وہ یقیناً سلسلوں میں پھیلائے جا سکتے ہیں، چنانچہ

اَ - ا = - جب خَ‌فہ جب (فہ - فہَ) قم ی جب ا

+ $\frac{1}{2}$ جب^2 خَ‌فہ جب^2 (فہ - فہَ) قم^2 ی جب ۲ ا .....،

یَ - ی = بَہ جب خَ‌فہ جب (ی - جَہ) + $\frac{1}{2}$ بَہ^2 جب^2 خَ‌فہ جب ۲ (ی - جَہ)...

مثال ۔ ثابت کرو کہ اختلاف منظر چاند کے السمت کو بقدر

$\frac{1}{2}$ ز^2 جب ۲ فہ جب خَ‌فہ جب ا قم ی

کے گھٹاتا ہے جہاں زمین کو کرہ نما سمجھا گیا ہے جس کا خروج المرکز ز ہے، فہ عرض بلد، خَ‌فہ چاند کا افقی اختلاف منظر، ی فاصلہ راس، اور ا چاند کا السمت ہے۔

۹۷ ۔ قمری اختلافِ منظر کی عددی قیمت ۔

چاند کی حرکت خاص کر زمین کی کشش سے متعین ہوتی ہے۔ لیکن سورج کی اور کچھ حد تک سیاروں کی خلل انداز کششیں چاند کی حرکت کو اُن خالص ناقصی حرکت سے بہت زیادہ پیچیدہ بنا دیتی ہیں جس پر ہم ساتویں باب میں غور کر چکے ہیں۔ تاہم علماء ریاضی نے چاند کے اختلاف منظر کے لیے نظری جملہ، چاند کی حرکت کے حرکی نظریہ سے محسوب کیا ہے اور اس میں محولہ بالا خللوں کی رعایت رکھی ہے۔ ہم اُن تحقیقات پر بحث نہیں کر سکتے جس کے ذریعہ یہ نتیجہ حاصل ہوا ہے۔ لیکن اس اہم مقدار کے لیے جو نظری قیمت معلوم کی جا چکی ہے اُس کا جاننا مفید ہوگا۔ اس لیے ہم اس جملے کے لازمی اجزاء جنکو آڈمس (Adams.) نے معلوم کیا ہے[1] دیتے ہیں۔ چنانچہ صاحب موصوف نے یہ معلوم کیا کہ چاند کے اُستوائی اُفقی اختلافِ منظر میں قوس کے ثانیوں کی تعداد

خَ = ۳۴۲۲″۳ + ۱۸۷″ جم لا + ۱۰″ جم ۲ لا + ۲۸″ جم ۲ ت
+ ۴″۳ جم (۲ت - لا) + ۳″ جم (۲ت + لا)...(۱)

ہے۔ اِس جملہ میں ت اور لا وقت کے تفاعل ہیں اور اِس لیے وہ جملہ بالا کے متغیر عناصر ہیں۔ یہ ظاہر کر دینا ضروری ہے کہ آڈمس نے جو جملہ معلوم کیا ہے اُس میں مندرجہ بالا چھ رقموں کے علاوہ اور بہت سی رقمیں ہیں۔ لیکن چونکہ وہ کُل نتیجہ پر بہت ہی خفیف اثر ڈالتی ہیں اسلیے اُن پر غور کرنا ضروری نہیں ہے۔ متروک رقموں میں سے ہر ایک کا سر دو ثانیوں کے اندر ہے اور نیز ہم نے جو رقمیں اوپر لکھی ہیں اُن کے سروں میں سے ثانیہ کی کسروں کو نکالدیا گیا ہے۔

(۱) کی پہلی رقم ہی صرف وہ رقم ہے جس میں وقت کے تفاعل (۲۹۵)
کی جیب یا جیب التمام شامل نہیں ہے۔ اِس لیے ہم ۳۴۲۲″۳ کو چاند کے اُستوائی اُفقی اختلاف منظر خ٫ کی اوسط قیمت سمجھتے ہیں کیونکہ اگر ہم

[1] Collected Scientific Papers vol. 1. p. 109

وقت کے کافی وسیع وقفہ کے لیے دوسری رقموں کی اوسط قیمت حاصل کریں تو یہ مثلثی تفاعل ایک وقت ایک علامت کے ساتھ اور دوسرے وقت دوسری علامت کے ساتھ ظاہر ہوں گے اور اس لیے اِن کا اثر بالاوسط معدوم ہونے کی طرف مائل ہوگا۔

یہ ظاہر ہے کہ لا اور ت کی حقیقی قیمتوں کے لیے اختلاف منظر کا جملہ کبھی بھی ۳۶۸۴ً (جو صرف ۳۴۲۲ً اور باقی دوسری رقموں کے سروں کا مجموعہ ہے) سے بڑا نہیں ہوسکتا اور نہ ۳۱۶۰ً سے چھوٹا ہوسکتا ہے۔

چونکہ خَ کی متعدد چھوٹی رقمیں ترک کردی گئی ہیں اس لیے ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ اس کی حدود ٹھیک وہی ہیں جو ابھی ہم نے اوپر لکھی ہیں لیکن ہم ہمیشہ یہ تسلیم کرسکتے ہیں کہ

$$۵۳،۹' < خ' < ۶۱،۵'$$

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ زمین کے مرکز سے چاند کے مرکز کا فاصلہ ہمیشہ ۲۲۲۰۰۰ میل اور ۲۵۳۰۰۰ میل کے درمیان واقع ہوگا۔

مثال ۲۔ بحری جنتری بابتہ سنہ ۱۸۹۶ء سے چاند کے افقی استوائی اختلاف منظر کی حسب ذیل قیمتیں لی گئی ہیں:۔

سنہ ۱۸۹۶ء

۸ اگست، ظہر	۵۹َ ۲،۶ً
″ ″ ، ۱۲ شب	۵۹ ۲۱،۴
۹ اگست، ظہر	۵۹ ۳۷،۶

ثابت کرو کہ بتاریخ ۸ اگست ظہر کے بعد ت گھنٹوں پر استوائی افقی اختلاف منظر خَ کے لیے حسب ذیل جملہ ہے

$$خ' = ۵۹' \; ۲،۶'' + ۶۸،۱'' ت - ۰،۰۹'' ت^{۲}$$

---

(۲۹۶)

بارہویں باب پر مثالیں

مثال ۱۔ چاند کے کنارے کا مشاہدہ کردہ راسی فاصلہ انعطاف کی تصحیح کے بعد طا ہے، استوائی افقی اختلاف منظر خَ ہے اور ارض مرکزی نیم قطر د ہے۔ زمین اور چاند کو کروی مان کر ثابت کرو کہ چاند کے مرکز کا ارض مرکزی راسی فاصلہ ی،

جب (طا - ی) = جب خَ. جب طا ∓ جب د

سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۲۔ اگر ایک سیارہ اور چاند کے درمیان اصلی اور ظاہری فاصلے ضہ اور ضہَ ہوں، سیارہ کے اصلی اور ظاہری ارتفاع (انعطاف کی تصحیح کے بعد) عہ اور عہَ، چاند کے اصلی اور ظاہری ارتفاع بہ اور بہَ، اور چاند اور سیارہ کے استوائی افقی اختلافِ منظر خَ اور ثہ. تو

جم ضہ = (جم عہ جم بہ) / (جم عہَ جم بہَ) جم ضہَ + جب عہ جب خَ + جب بہ جب ثہ، تقریباً

[Coll. Exam.]

مثال ۳۔ اگر چاند اور ایک ستارہ کے مشاہدہ کردہ ارتفاع چ اور س ہوں، اختلافِ منظر اور انعطاف کی وجہ سے چ اور س میں تصحیحیں مہ اور ثہ ہوں اور پہ وہ تصحیح ہو جو مشاہدہ کردہ فاصلہ ف پر استعمال کرنا پڑتی ہے تاکہ اصلی فاصلہ حاصل ہو تو ثابت کرو کہ

پہ جب ف جم چ جم س = مہ جم س (جب س - جب چ جم ف) - ثہ جم چ (جب چ - جب س جم ف)

[Coll. Exam.]

مثال ۷ ۔ انعطاف کی تصحیح کو شکل ک مس ی میں لیکر ثابت کرو کہ جب چاند کا راسی فاصلہ جم$^{-1}$(ک \ خَ) ہو تو انعطاف اور یومی اختلاف منظر کے متحدہ اثروں سے افقی قطر نہیں بدلتا اور جب راسی فاصلہ جم$^{-1}$(ک \ خَ)$^{\frac{1}{2}}$ ہو تو انتصابی قطر نہیں بدلتا۔ خَ چاند کا افقی اختلاف منظر ہے۔

[Math. Trip]

مثال ۸ ۔ اگر چاند کا ارض مرکزی زاویئی نصف قطر س ہو، اس کا ظاہری نصف قطر ر جبکہ وہ عرض بلد فہ کے ایک مقام کے نصف النہار پر ہو، اس کا ظاہری نصف قطر رَ جبکہ اس کے مرکز کا ارض مرکزی ساعتی زاویہ س ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب } س (\text{قم}^2 ر - \text{قم}^2 رَ) = ۴ \text{ جب } خَ \text{ جم } فہ \text{ جم } ضہ \text{ جب}^2 \tfrac{1}{2} س$$

جہاں چاند کا افقی اختلاف منظر خَ ہے، اس کا ارض مرکزی میل ضہ، اور زمین کو کروی فرض کیا گیا ہے۔

[Coll. Exam.]

(۲۹۷)

تیرہواں باب

سورج کا ارض مرکزی اختلافِ منظر

۹۸ — تمہید۔

زمین سے سورج کے فاصلہ کی تعٔین علم ہئیت میں خاص اہمیت رکھتی ہے۔ جب اُسے معلوم کرلیا جاتا ہے تو سورج کے ابعاد آسانی سے حاصل ہوتے ہیں، اسی طرح سیاروں کے اور ان کے توابع کے فاصلے بھی معلوم ہوتے ہیں، حتیٰ کہ اِن جرموں کی کمیتیں بھی ماخوذ ہوتی ہیں۔ لیکن سورج کے فاصلہ کی تعٔین صرف اس وجہ سے ہی اہم نہیں ہے کہ اس سے نظام شمسی کی پیمائشیں حاصل ہوتی ہیں بلکہ ہم دیکھیں گے کہ ستاروں کے

فاصلے صرف سورج کے فاصلہ کے حوالہ سے ہی متعین ہو سکتے ہیں۔ اسلیے سورج کا فاصلہ گویا قاعدہ کے خط (Base line) یا بنیادی خط کا کام دیتا ہے جس کے ذریعہ کوئی پیمائشیں عمل میں آتی ہیں۔ یہ کہنا مبالغہ نہیں ہے کہ چاند کی خطی پیمائشوں کے سوا باقی تمام خطی پیمائشیں جو اجرام سماوی سے متعلق ہیں سورج کے فاصلہ کے علم پر ہی مبنی ہیں۔ اب ہم اس مسئلہ پر جو اس قدر بنیادی ہے اور ساتھ ہی اس کا صحیح حل اس قدر مشکل ہے توجہ کریں گے۔

سب سے اول ہمیں یہ چاہئیے کہ اس مسئلہ کو ایک خاص ابہام سے پاک کریں۔ ہمیں زمین سے سورج کے فاصلہ کی تلاش ہے۔ لیکن یہ فاصلہ خاص حدود کے درمیان مستقلاً بدلتا رہتا ہے، اِس لیے یہ غور کرنا ہے کہ سورج کے اوسط فاصلہ سے کیا مراد ہے کیونکہ بلاشبہ یہی وہ چیز ہے جس کو (۲۹۸)
مشاہدہ سے معلوم کرنا ہوگا۔ حسب تشریح دفعہ ۵۰ ہم جانتے ہیں کہ زمین سورج کے گرد ایک قطع ناقص میں حرکت کرتی ہے اور سورج اس قطع ناقص کے ایک ماسکہ پر ہے۔ اس لیے سورج کا فاصلہ اُس سمتی نیم قطر کی تبدیلیوں کی بموجب گھٹتا بڑھتا ہے جو قطع ناقص کے ماسکہ سے اِس کے محیط کے کسی نقطہ تک کھینچا گیا ہو۔

زمین کے ناقصی مدار کے نیم محورِ اعظم کو ا سے تعبیر کیا جائے گا، سورج کے اصلی طول بلد کو ہ سے، اور سورج کے اُس طول بلد کو جو اُس وقت ہوتا ہے جبکہ سورج زمین سے قریب ترین ہوتا ہے یعنی حضیض کے طول بلد کو حہ سے۔ اب قطع ناقص کی مشہور قطبی مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\text{ر} = \frac{\text{ا}(\text{۱} - \text{ز}^{\text{۲}})}{\text{۱} + \text{ز جم}(\text{ہ} - \text{حہ})} \quad \ldots\ldots\ldots (\text{۱})$$

چونکہ ز چھوٹا ہے (یعنے صرف ۰٫۰۱۶۸) اس لیے ہم اپنے موجودہ مقصد کے لیے اس کے مربع اور اعلیٰ تر قوتوں کو ناقابل قدر سمجھ سکتے ہیں، اِس لیے یہ ضابطہ لکھا جا سکتا ہے

ر = ا{۱ - ز جم (ہ - حہ)} .... (۲)

اس کو اور سادہ بنایا جاسکتا ہے، کیونکہ اصلی طول بلد ہ اور اوسط طول بلد ل کے درمیان فرق صرف وہ رقمیں ہیں جن میں خروج المرکز شامل ہے (دفعہ ۷۳)، اِس لیے ہم ہ کی جگہ ل رکھ سکتے ہیں کیونکہ ہم صرف وہ رقمیں ترک کر رہے ہیں جن میں ز۲ شامل ہے، پس ہم مساوات ذیل استعمال کر سکتے ہیں

ر = ا{۱ - ز جم (ل - حہ)} .... (۳)

سورج کے اوسط فاصلہ سے ر کی وہ اوسط قیمت سمجھنی چاہیے جو ایک مکمل گردش کے اثناء میں حاصل ہو۔ اِس اوسط قیمت کا حساب اس طرح لگانا چاہیے :۔ فرض کرو کہ ت، ت۱، ت۲، ت۳.... تن زمانوں کا ایک سلسلہ ہے جسے اس طور پر منتخب کیا گیا ہے کہ ت۱ - ت. = ت۲ - ت۱ = ت۳ - ت۲ = ... = تن - تن-۱۔ نیز یہ بھی فرض کرو کہ تن - ت. گردش کا پورا وقفہ ہے۔ اب اوسط فاصلہ ہوگا (ر۱ + ر۲ + ... + رن)/ن جہاں ر۱، ر۲ وغیرہ اپنے متعلقہ زمانوں پر فاصلے ہیں اور ن لا انتہا بڑا ہے۔ ہم اس مقدار کو راست (۲) سے محسوب کر سکتے ہیں کیونکہ ل وقت کے متناسب بڑھتا ہے، اِس لیے اوسط فاصلہ

$$\int_0^{2\pi} ر\, فرل \div \int_0^{2\pi} فرل$$

ہے جو ر کی بجائے اسکی قیمتوں کو درج کرنے سے ا میں تحویل ہوتا ہے۔ اِسطرح یہ معلوم ہوتا ہے کہ قطع ناقص کا نیم محور اعظم سورج سے سیارہ کا اوسط فاصلہ بھی ہے۔ ہم نے یہ چیز کیپلر کے تیسرے کلیہ (دفعہ ۵۰) کے بیان میں تسلیم کی تھی۔

(۲۹۹) ہم مان لیں گے کہ سورج کے ظاہری مدار کا خروج المرکز ۰.۰۱۶۸ ہے، سورج کے افقی اختلاف منظر کی اوسط قیمت ۸.۸۰ ً ہے، اِس کا اوسط

نیم قطر ۹۶۱″ ہے، اور اس کے ظاہری مدار کے قریب ارضی کا طول بلد ۲۸۱،۲° ہے (دفعہ ۳۷)۔ پس حسب ذیل تقریبی نتیجے حاصل ہوتے ہیں جبکہ سورج کے اوسط فاصلہ کو اکائی کے طور پر لیا جاتا ہے:-

سورج کا فاصلہ {۱-۰،۰۱۶۸ جم (ل + ۷۸،۸°)} ہے
" " افقی اختلاف منظر ۸،۸۰″ {۱ + ۰،۰۱۶۸ جم (ل + ۷۸،۸°)} "
" " نیم قطر ۹۶۱″ {۱ + ۰،۰۱۶۸ جم (ل + ۷۸،۸°)} "
" " طول بلد ل + ۱،۹۲° جب (ل + ۷۸،۸°) "
اور " " صعود مستقیم ل + ۱،۹۲° جب (ل + ۷۸،۸°) - ۲،۴۷° جب ۲ل ہے

صعود مستقیم اور میل میں شمسی اختلافِ منظر - فرض کرو کہ زمین ایک کرہ ہے، سورج کا اصلی ارض مرکزی صعود مستقیم عہ اور میل ضہ اور (عہَ، ضہَ) وہ مقدار جو اختلاف منظر سے متاثر ہیں جبکہ مشاہد کا عرض بلد فہ ہے اور سورج کا ساعتی زاویہ س ہے۔ اب دفعہ ۹۴ کی مساواتوں (۴)، (۵) سے حاصل ہوتا ہے

عہَ - عہ = - ۸،۸۰″ جم فہ قط ضہ جم س،

ضہَ - ضہ = - ۸،۸۰″ (جب فہ جم ضہ - جم فہ جب ضہ جم س)

کُل اختلاف منظری ہٹاؤ بلا شبہ ۸،۸۰″ جب ی ہے جہاں

جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س

مثال ۱ - ایک جرم کا میل ضہ اور ساعتی زاویہ س ہے اور دوسرے کا میل - ضہ اور ساعتی زاویہ س ہے ثابت کرو کہ ان کے صعود مستقیموں میں اختلاف منظر ایک ہی ہوگا اگر ان کے افقی اختلاف منظر ایک ہی ہوں۔

مثال ۲ - یہ مان کر کہ زمین سے ایک جرم کا فاصلہ اسقدر بڑا ہے کہ اختلاف منظر کی جیب اور دائری ناپ مساوی تصور کئے جا سکتے ہیں ثابت کرو کہ اُن سب جرموں کا طریق جن کے اختلاف منظر صعود مستقیم میں ایک دی ہوئی آن اور ایک دئے ہوئے مقام پر مساوی ہیں ایک قائم مستدیر اسطوانہ ہوگا جو نصف النہار کے

مستوی کو زمین کے محور پر مس کرے گا۔ [Godfray's Astronomy]

مثال ۳ ۔ ثابت کرو کہ اگر سورج کا اوسط طول بلد ۱ ۵° ہے تو اس کا نیم قطر ۵۱ ۱۵′ ۱۵″ اس کا افقی اختلاف منظر ۱۷ ،۸″ اور اس کے اصلی فاصلہ اور اوسط فاصلہ کے درمیان نسبت ۱۰۰۱ ہے۔

مثال ۴ ۔ اگر یہ دیا گیا ہو کہ یکم جنوری کو سورج زمین سے قریب ترین فاصلہ پر ہوتا ہے اور اس کا اوسط طول بلد روزانہ ۰°۹۸۵۶ کی شرح سے بڑھتا ہے تو ثابت کرو کہ زمین سے سورج کا فاصلہ بتاریخ ۲ اکتوبر تیز ترین شرح سے گھٹتا ہے

مثال ۵ ۔ سورج کا نیم قطر زمین کے اوسط فاصلہ پر ۱۶′ ۱۸″ ہے اور اس کا استوائی افقی اختلاف منظر زمین کے اوسط فاصلہ پر ۸٫۸۰″ ہے۔ زمین کے استوائی نصف قطر کی رقوم میں سورج کا قطر معلوم کرو۔ (۳۰۰)

مثال ۶ ۔ یہ دیا گیا ہے کہ ایک کیلومیٹر، عرض بلد ۴۵° میں، ایک نصف النہار کی قوس ہے جس کے محاذی زمین کے مرکز پر ایک منٹ کے سوویں حصہ کے مساوی زاویہ بنتا ہے اور یہ کہ زمین کی سطح کی ناقصیت $\frac{۱}{۲۹۵}$ ہے اور سورج کا اوسط استوائی افقی اختلاف منظر ۸٫۷۶″ ہے۔ ثابت کرو کہ سورج کا اوسط فاصلہ ۱٫۵ × ۱۰⁸ کیلومیٹر ہے۔ [Math. Trip.]

مثال ۷ ۔ یہ مان کر کہ سورج کا افقی اختلاف منظر ۸٫۸۰″ ہے ثابت کرو کہ وہ وقت جس میں سورج کسی ایک قطب پر افق کے نیچے رہتا ہے اختلاف منظر کی وجہ سے بقدر ۷ قم سہ منٹ طویل تر ہوتا ہے جہاں سہ طریق الشمس کا میلان ہے۔ [Math. Trip. 1903]

مثال ۸ ۔ ثابت کرو کہ دو مقاموں سے ایک ساتھ مشاہدہ کر کے سورج کا ظاہری محل متعین کرنے میں اختلاف منظر کی وجہ سے جو فرق ہوتا ہے وہ اعظم اور ۲ خ جب عہ کے مساوی ہوتا ہے جبکہ راسی فاصلے ایک ہی ہوں جہاں ۲ عہ وہ زاویہ ہے جو زمین کے مرکز پر اس قوس کے محاذی بنتا ہے جو اِن دو مقاموں کو ملاتی ہے۔ [Math. Trip. 1902]

مثال ۹ ۔ یہ مان کر کہ سورج کا نیم قطر اوسط فاصلہ پر ۱۶′ ۱″ ہے ثابت کرو کہ

یہ نیم قطر نصف النہار کو ت کو کبی ثانیوں میں عبور کرتا ہے جہاں

$$\frac{961}{\text{ر جم ضہ}} = 15\left(1 - \frac{\text{جم سہ}}{\text{ر}^{2}(\text{تہ}+1)\,\text{جم}^{2}\text{ضہ}}\right)\text{ت}$$

جس میں ضہ میل ہے، ایک شمسی سال کا طول دنوں میں تہ ہے، اور سورج کا فاصلہ ر ہے جو اوسط فاصلہ کی اکائی میں شمار کیا گیا ہے۔

[Coll. Exam.]

۹۹ ـ سورج کا افقی اختلافِ منظر ـ

ممکن ہے سب سے پہلے یہ خیال آئے کہ گذشتہ باب کے وہ طریقے جو چاند کا اختلافِ منظر معلوم کرنے میں کامیاب ثابت ہوئے ہیں سورج کا اختلافِ منظر معلوم کرنے میں بھی کامیاب ہوں لیکن یہ صورتیں مماثل نہیں ہیں۔ ان کے درمیان فرق کی اصل وجہ یہ ہے کہ سورج کی چمک چاند کی چمک سے کہیں زیادہ تیز ہے۔ ستاروں کا آسانی سے مشاہدہ کیا جا سکتا ہے جبکہ وہ چاند سے بالکل قریب ہوں لیکن طاقتور سے طاقتور دوربین سے بھی کسی ستارہ کی روشنی نظر نہیں آتی جبکہ وہ سورج سے قریب ہوتا ہے۔ اس لیے چاند اور متصلہ ستاروں کے درمیان میل کے فرقوں کی پیمائشیں جن کے ذریعہ چاند کا اختلاف منظر صحیح طور پر متعین کیا جاتا ہے شمسی مشاہدوں میں جو سورج کا اختلافِ منظر اسی طریقہ پر معلوم کرنے کے لیے کیے گئے ہوں ممکن نہیں ہیں۔ جیسا کہ گذشتہ باب میں بتایا جا چکا ہے سورج کا افقی اختلافِ منظر وہ زاویہ ہے جسکی جیب وہ نسبت ہے جو زمین کے (۳۰۱)
اُستوائی نصف قطر کو سورج کے فاصلہ کے ساتھ ہے۔

یہی سبب ہے کہ ہم سورج کے مشاہدوں سے شمسی اختلاف منظر کو خاطر خواہ اُس طریقہ سے معلوم نہیں کر سکتے جس طریقہ سے چاند کا اختلاف منظر معلوم کیا جاتا ہے اور اِس لیے ہم دوسرے طریقوں کی طرف رجوع ہوتے ہیں۔ ایسے طریقے متعدد ہیں جن کی تقسیم حسب تفصیل ذیل ہو سکتی ہے :۔

(۱) راست مشاہداتی طریقے۔

ا ۔ زہرہ کا اختلاف منظر سورج پر سے مرور کے وقت ۔
ب ۔ بیرونی سیارہ[1] کا اختلاف منظر یومی طریقہ سے ۔
ج ۔ بیرونی سیارہ کا اختلاف منظر دُور کے مقاموں پر ایکساتھ مشاہدے کرنے سے ۔

(۲) تجاذبی طریقے ۔

د ۔ سورج کا اختلاف منظر زمین کی کمیت سے ۔
ع ۔ سورج کا اختلاف منظر چاند کی اختلاف منظری نامساوات سے ۔

(۳) طبیعی طریقے ۔

ف ۔ سورج کا اختلاف منظر ضلالت کے مستقل اور نور کی رفتار سے ۔
گ ۔ مشتری کا اختلاف منظر اِس کے توابع کی نوری مساوات سے ۔

راست مشاہداتی طریقے کیپلر کے تیسرے کلیہ پر مبنی ہوتے ہیں جو یہ ہے کہ سیاروں کی دَوری مدتیں اِن کے اوسط فاصلوں کے مکعبوں کے متناسب ہوتی ہیں ۔ سیاروں کی دَوری مدتیں زیادہ سے زیادہ صحت کے ساتھ معلوم ہیں کیونکہ اگر کسی سیارہ کی مدت دَوران کی مسلمہ قیمت میں کوئی اہم خطا ہو تو اس کی متعدد متصلہ گردشوں کے دَوران میں یہ خطا جمع ہوتی رہے گی اور بالآخر اِس کا پتہ لگ جائے گا ۔ پس چونکہ نظام شمسی کے سیاروں کی دَوری مدتیں معلوم ہیں اِن سب کے مداروں کے محاور اعظم کی قیمتیں محسوب کیجاسکتی ہیں اگر زمین کے مدار کے محور اعظم کو اکائی کے طور پر لیا جائے ۔

---

[1] بیرونی سیاروں سے وہ سیارے مراد ہیں جو زمین کے مدار کے اندر نہیں بلکہ اِس کے باہر ہیں ۔

سیاروں کے صعود مستقیموں اور میلوں کا بار بار مشاہدہ کرنے سے اِن کے مداروں کی مزید تفصیلات حاصل ہو نگی۔ اِن مشاہدوں سے سیاروں کے صعودی عقدوں کے طول بلد، اِن کے مداروں کے مُستویوں کے میلان، اور خروج المرکز اور حضیض کے طول بلد اخذ کئے جاتے ہیں۔ اِس لیے سورج کے اوسط فاصلہ کو اکائی کے طور پر لینے سے سیاروی نظام کی دوسری پیمائشیں معلوم ہوتی ہیں۔ (۳۰۲)
یعنے ہم نظام کی شکل جانتے ہیں اور صرف اُس چیز کے معلوم ہونے کی ضرورت ہے جسے ہم نظام کا پیمانہ کہہ سکتے ہیں۔ پس اگر ہم زمین کے نصف قطر کی رقوم میں کسی ایک سیارہ کا اوسط فاصلہ پیمائش کر سکیں تو ہمیں پورے نظام کا پیمانہ مل جائے گا۔ چنانچہ زہرہ کا اختلاف منظر پیمائش کرکے جو زہرہ کے مرور سے ممکن ہے ہم اس کا فاصلہ حاصل کرتے ہیں اور پھر اس کے ذریعہ سورج کا فاصلہ اور نظام شمسی کی دوسری پیمائشیں معلوم کرتے ہیں۔ اس طریقہ پر آئندہ باب میں غور کیا جائے گا۔ اس میں بڑی تاریخی دلچسپی ہے اگرچیکہ اب ب اور ج طریقے قابل ترجیح ہیں۔

کسی بیرونی سیارہ کا اختلاف منظر جس کا ذکر ب اور ج طریقوں میں کیا گیا ہے مشاہدہ کے مختلف مقاموں سے ستاروں کے درمیان اُس کے ہٹاؤ کا مشاہدہ کرکے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ طریقہ ج کی صورت میں یہ دو مقام مختلف جغرافیٔ محلوں میں ہونے چاہئیں جیسا کہ اُس طریقہ میں جو چاند کا مشاہدہ کرنے میں استعمال کیا گیا تھا (دفعہ ۹۵)۔ طریقہ ب میں صرف ایک جغرافیٔ مقام کی ضرورت ہے اور قاعدہ کا خط اُس یومی حرکت سے حاصل کیا جاتا ہے جو مشاہد کو شام سے صبح تک کئی ہزار میل لیجاتی ہے۔ اِس طریقہ میں بڑا عملی فائدہ ہے کیونکہ مشاہدے اُس زمانہ میں کئی مہینے جاری رکھے جا سکتے ہیں جبکہ سیارہ تقابل (Opposition) کے قریب ہو، اِس وقت سیارہ زمین اور سورج کے درمیان اس قدر قریب واقع ہوتا ہے جس قدر ممکن ہے۔ اِس میں کوئی شک نہیں کہ ایک صغیر سیارہ کو مشاہدہ کرنیکا طریقہ بہترین طریقہ ہے جس کے ذریعہ سورج کا فاصلہ راست مشاہدہ سے معلوم

کیا جا سکتا ہے کیونکہ صغیر سیارہ ایک ستارہ نما نقطہ ہوتا ہے اور اس لیے قریبی ستاروں سے اس کے ظاہری فاصلے زیادہ صحت کے ساتھ پیمائش کیے جا سکتے ہیں۔

تجاذبی طریقوں (۲) اور طبیعی طریقوں (۳) میں بڑی علمی دلچسپی کی چیزیں ہیں۔ لیکن یہ ذہن نشین رہنا چاہیئے کہ ہمارے سامنے جو مسئلہ ہے وہ خالص ہندسی پیمائش کا ہے اور اس لیے اس مقصد کے لیے وہ طریقے جن میں صرف ہندسی اصول استعمال ہوں مثلاً گروہ (۱) کے طریقے اُن طریقوں کی بہ نسبت زیادہ قابل اعتماد سمجھے جانے چاہئیں جیسے کہ گروہ (۲) اور (۳) کے طریقے ہیں جو ایک حد تک طبیعی مفروضوں پر منحصر ہیں اور اس لئے ان میں انتہائی صحت کا دعویٰ نہیں کیا جا سکتا۔

اگر ہم سورج کے اوسط استوائی افقی اختلاف منظر کی اُن متواتر قیمتوں کا اجمالاً امتحان کریں جو انیسویں صدی کی بحری جنتریوں میں استعمال کی گئی ہیں تو سورج کے فاصلہ کے مسئلہ کی تاریخ واضح ہو جائے گی۔

(۳۰۳) ۱۸۰۱ء سے ۱۸۳۳ء تک اختیار کردہ قیمت ۹″ تھی۔ اس کی ابتداء کا حال ٹھیک طور پر معلوم نہیں۔ شاید اسے صرف اس وجہ سے اختیار کیا گیا کہ یہ بے کسر عدد ہے جس کو نصف النہار پر مریخ کے اختلاف منظر کے مشاہدوں اور اُن ابتدائی نتیجوں سے اخذ کیا گیا ہے جو ۱۷۶۱ء اور ۱۷۶۹ء میں زہرہ کے مروروں سے حاصل ہوئے تھے۔

۱۸۳۴ء سے ۱۸۶۹ء تک قیمت ۵۷۶ ۸ء۸″ استعمال میں رہی جس کو ینکے (Encke.) نے زہرہ کے مروروں پر بحث کر کے حاصل کیا تھا۔

۱۸۷۰ء سے ۱۸۸۱ء تک اختلاف منظر ۸ء۹۵″ استعمال ہوتا رہا جس کو لیویریر (Leverrier) نے چاند کی اختلاف منظری ناہمواری سے ۱۸۵۸ء میں معلوم کیا تھا۔

۱۸۸۲ء سے ۱۹۰۰ء تک قیمت ۸۴۸ ۸ء۸″ رہی جس کو نیوکمب (Newcomb) نے ۱۸۶۷ء میں متعدد محصلہ قیمتوں پر مختلف طریقوں سے

جرح کر کے معلوم کیا تھا۔
بحری جنتریوں کے نظمار کی کانفرنس نے جو پیرس میں ۱۸۹۶ء میں منعقد ہوئی تھی یہ فیصلہ کیا کہ ۱۹۰۱ء سے قیمت ۸۰ء۸″ اختیار کی جائے جس کو سر ڈیوڈ جل (Gill.) کے شمس پیما سے صغیر سیاروں کے مشاہدوں سے اخذ کیا گیا تھا اور جس کی تائید دوسرے طریقوں سے بھی ہوئی تھی۔

*۱۰۰ – بیرونی سیارہ کا اختلاف منظر یومی طریقہ کے ذریعہ۔

اب ہم مختصر طور پر وہ تحقیق بیان کریں گے جو سر ڈیوڈ جل نے جزیرہ اسینشن (Ascension) پر سیارہ مریخ کے اختلاف منظر کے لئے کی تھی جبکہ مریخ ۱۸۷۷ء میں تقابل میں تھا۔ یہ موقع جس سے اس طرح فائدہ اٹھایا گیا ایک ایسے مقام سے جو خط استواء کے قریب ہے اختلاف منظر کی تعیین کے لیے خاص طور پر مناسب تھا کیونکہ اس سیارہ کا اختلاف منظر تقریباً اپنی اعظم قیمت کو پہنچ چکا تھا۔

کام کا نظام العمل یہ تھا کہ ہر صبح اور شام مریخ کا فاصلہ مقابلہ کے منتخبہ ستاروں سے پیمائش کیا جاتا تھا جن کے مقامات متعدد رصدگاہوں کے تعاون سے اچھی طرح متعین کئے جاتے تھے۔

چونکہ اختلاف منظر کا اثر ہمیشہ سیارے کو راس سے نیچے کی طرف ہٹانے کا ہوتا ہے اس لیے ستاروں کے حوالہ سے ہٹاؤ صبح اور شام مخالف سمتوں میں ہوگا۔ اس طرح شام کے اور اس کے بعد آنے والی صبح کے مشاہدوں کے درمیان وقت کا جو وقفہ ہے اس میں زمین کی گردش کی وجہ سے مشاہدہ کے محل میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس سے قاعدہ کا خط حاصل ہوتا ہے جو اختلاف منظر کی تعیین کے لیے مطلوب ہے۔

(۴۔۳۰) مریخ کے اختلاف منظر کی تحقیق کے لیے موزوں ستاروں کا معلوم کرنا جو اس سیارہ سے کافی قریب ہوں تاکہ ضروری پیمائشیں عمل میں آسکیں ہمیشہ قابل عمل نہیں ہوگا الّا آنکہ ایسا آلہ استعمال کیا جائے جسمیں

شمس پیما کا سا استثنائی میدان عمل ہو۔
یہ آلہ علم ہئیت جدید میں بہت اہمیت رکھتا ہے۔ اس کے اصول کی تشریح ذیل میں درج ہے۔ شمس پیما استوائی طور پر قائم کی ہوئی ایک دوربین ہے جو کرہ سماوی کے باہم قریبی نقطوں کے فاصلے بالراست پیمائش کرنے کے لیے بنائی جاتی ہے۔ شمس پیما کی لازمی خصوصیت یہ ہے کہ اس کا دہانہ تنصیف شدہ ہوتا ہے۔ دہانہ کو دو مساوی حصوں میں ایک قطر پر کاٹا جاتا ہے اور یہ دو نصف حصے پہلینوں پر چڑھائے جاتے ہیں جن کو خط تراش پر اور دوربین کے محور کے عمود وار پھیلا کر مخالف سمتوں میں مساوی فاصلوں پر جدا کیا جا سکتا ہے۔ ان ٹکڑوں کا فصل دو پیمانوں سے پیمائش کیا جاتا ہے جو پہلینوں کے اندرونی کناروں پر تقریباً مس کرتے ہوئے لگائے جاتے ہیں۔
طریق کار کا اصول اس مناظری واقعہ پر منحصر ہے کہ اگر ایک ستارہ ا کا خیال جو دہانہ کے ایک حصہ سے بنے، دوسرے ستارے ب کے خیال پر جو دوسرے حصہ سے بنے منطبق ہو تو ان دو ستاروں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہوتا ہے جو اُس فاصلہ کے محاذی ماسکہ پر بنتا ہے جس میں سے دہانہ کا ایک نصف دوسرے کے لحاظ سے حرکت کر چکا ہے۔ اس لیے اس فاصلہ کی پیمائش دو ستاروں کی درمیانی قوس کو معلوم کرنے کا ذریعہ بنتی ہے۔ اس طریقہ سے شمس پیما کے ذریعہ ... ؟ تک کے زاوئی فاصلے صحیح طور پر پیمائش کئے جا سکتے ہیں۔ معمولی خوردہ پیما جو متصلہ ستاروں کی درمیانی قوسوں کو پیمائش کرنے کے لیے بنائے جاتے ہیں اس فاصلہ کے بیسویں حصہ کے لیے بھی بمشکل کارآمد ہوتے ہیں۔
سیارے اور ستارے کے درمیان ظاہری فاصلہ مختلف وجوہ کی بناء پر مسلسل تبدیلی کی حالت میں رہے گا۔ دفعہ ۸۴ میں ہم اُس تبدیلی پر غور کر چکے ہیں جو انعطاف کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔ لیکن موجودہ مقصد کے لیے جس میں فاصلے اُن فاصلوں سے بہت بڑے ہیں جن پر ہم

پہلے غور کر چکے ہیں زیلیگر (Seeliger) کے زیادہ جامع ضابطے کام کو عملاً انجام دینے میں اکثر مطلوب ہوں گے اگرچہ ان پر اس جگہ بحث کرنا ضروری نہیں ہے۔ ظاہری فاصلہ میں تبدیلی دو اور سببوں سے ہوگی جن پر اب ہم توجہ کریں گے۔ مشاہدوں کے وقتوں کے درمیانی وقفہ میں سیارہ کی حقیقی حرکت بلاشبہ کچھ تبدیلی کا باعث ہوگی اور اختلاف منظری ہٹاؤ جس سے سیارہ تو متاثر ہے لیکن ستارہ نہیں ہے اور جسے ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں اس فاصلہ پر اثر رکھیگا جسکو ہمیں محسوب کرنا چاہیئے۔

فرض کرو کہ ایک سیارہ کا ارض مرکزی صعود مستقیم عہ اور میل ضہ ہے جبکہ ♈ نصف النہار پر ہے اور فرض کرو کہ سیارہ کی حرکت کی وجہ سے ان دو مقداروں کی تبدیلی کی شرحیں فی کوکبی یوم عَہ، ضَہ ہیں۔ اب سیارہ کا ارض مرکزی صعود مستقیم اور میل کوکبی وقت تہ پر علی الترتیب عہ + عَہ تہ، ضہ + ضَہ تہ ہوں گے۔ سیارہ کا ساعتی زاویہ تہ - عہ ہے اور ہم (صفحہ ۶۰) دیکھ چکے ہیں کہ سیارہ کے ارض مرکزی محددوں سے ظاہری محدد حاصل کرنے کے لیے جو تصحیحیں عائد کرنی پڑتی ہیں وہ - ثہ جم فہ قط ضہ جب (تہ - عہ) صعود مستقیم میں اور - ثہ جب فہ جم ضہ + ثہ جم فہ جب ضہ جم (تہ - عہ) میل میں ہیں جہاں ثہ مریخ کا افقی اختلاف منظر ہے۔

سیارہ کے ظاہری محدد وقت تہ پر حاصل کرنے کے لیے ہم ان دو مختلف تصحیحوں کو متحد کرتے ہیں اور اس طرح ظاہری صعود مستقیم اور میل کے لیے علی الترتیب حاصل ہوتا ہے:

عہ + عَہ تہ - ثہ جم فہ قط ضہ جب (تہ - عہ)

اور ضہ + ضَہ تہ - ثہ جب فہ جم ضہ + ثہ جم فہ جب ضہ جم (تہ - عہ)

کوکبی وقت تہَ پر یہ محدد ہو جائیں گے:

عہ + عَہ تہَ - ثہ جم فہ قط ضہ جب (تہَ - عہ)

اور ضہ + ضَہ تہَ - ثہ جب فہ جم ضہ + ثہ جم فہ جب ضہ جم (تہَ - عہ)

اور اس لیے وقت کے وقفہ (تہَ - تہ) میں ظاہری محددوں میں تبدیلیاں

مف عہ اور مف ضہ ہو چکی ہوں گی جہاں

مف عہ = عہ (تہَ - تہ) - ۲ ثہ جم فہ قطا ضہ جب ½ (تہَ - تہ) جم ½ (تہَ + تہ - ۲ عہَ)

مف ضہ = ضہ (تہَ - تہ) - ۲ ثہ جم فہ جب ضہ جب ½ (تہَ - تہ) جب ½ (تہَ + تہ - ۲ عہ)

فرض کرو کہ طہ وہ زاویہ ہے جو نقطہ (عہ، ضہ) کے ارض مرکزی محل یعنی سیارہ مریخ کے قرص کے مرکز اور ستارہ عہ، ضہ کے درمیان ہے۔ تب

جم طہ = جب ضہ جب ضہ + جم ضہ جم ضہ جم (عہ - عہ) .... (۱)

طہ کی قیمت میں چھوٹی تبدیلی مف طہ جو عہ اور ضہ کی قیمتوں میں تبدیلیوں مف عہ، مف ضہ کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے عمل تفرق سے معلوم ہوتی ہے

- جب طہ مف طہ = {جب ضہ جم ضہ - جم ضہ جب ضہ جم (عہ - عہ)} کے مف ضہ

- جم ضہ جم ضہ جب (عہ - عہ) مف عہ ... (۲)

اس میں مف عہ اور مف ضہ کی قیمتیں درج کرنے سے مف طہ، طہ، ضہ، ضہ، عہ، عہ، ضہَ، عہَ، تہَ، تہ، فہ اور ثہ پر مشتمل ایک مساوات حاصل ہوتی ہے۔ اِن میں سے عہ، ضہ، عہ، ضہ جو ایک خاص وقت پر ستارہ اور سیارہ کے محدد ہیں معلوم ہیں، عہَ اور ضہَ بھی معلوم ہیں کیونکہ اُن پاس کے ستاروں کے لحاظ سے سیارہ کی حرکت کو متواتر جداگانہ مشاہدوں کے ذریعہ جو خاص اسی غرض کے لیے کئے گئے ہیں احتیاط کے ساتھ معلوم کیا گیا ہے۔ طہ معلوم ہے کیونکہ اسے عہ، ضہ، عہ، ضہ سے بموجب (۱) محسوب کیا جا سکتا ہے۔ مقداریں تہَ اور تہ مشاہدہ کے اوقات ہیں اور اِس لیے معلوم ہیں اور فہ مشاہد کا عرض بلد ہے۔ پس مساوات (۲) مف طہ اور ثہ کے درمیان ایک رشتہ میں تحویل ہوتی ہے۔ شمس پیما جیسا کہ ہم بیان کر چکے ہیں اُس فاصلہ کو پیمائش کرنے کا ذریعہ بنتا ہے جو سیارہ اور ستارہ کے درمیان ہے۔ اِس عمل کو دُہرایا جاتا ہے جبکہ چند گھنٹوں بعد جرم موزوں محل پر پہنچتے ہیں۔ اِن دو فاصلوں کا فرق مف طہ ہے اور اِس لیے ثہ معلوم ہوتا ہے کیونکہ ہم ابھی ثابت کر چکے ہیں کہ اُس کو (۳۰۶)

کس طرح مف طہ کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔

اس طریقہ کے عملی اطلاق میں بہت سے فنی امور پر توجہ کرنی پڑتی ہے اور اس کے لیے سر ڈیوڈ جل کی تصنیف کا مطالعہ ضروری ہے۔ زیادہ صحت حاصل کرنے کے لیے اس امر کی ضرورت ہے کہ جب سیارہ تقابل میں یا اس کے قریب ہو یعنی زمین سے کم سے کم فاصلہ پر ہو تو اس پورے وقفہ میں متعدد مشاہدے کئے جائیں اور ان مشاہدوں کو ملایا جائے۔

یہ اس اصول کا خلاصہ ہے جس کے ذریعہ یومی طریقہ کی مدد سے شمسی اختلاف منظر معلوم کیا جاتا ہے کیونکہ جب مریخ کا افقی اختلاف منظر ثہ معلوم ہو جاتا ہے تو ہم سورج کا اختلاف منظر اس طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں جو دفعہ ۹۹ میں سمجھا دیا گیا ہے۔

جزیرہ ایسنشن (Ascension) پر مشاہدوں کا یہ نتیجہ نکلا کہ سورج کا افقی اختلاف منظر ۸٫۷۸″ مقرر ہوا۔

جب کسی تحقیق کے نتیجہ کے طور پر ایک عددی قیمت ماخوذ ہو چکے تو بالعموم یہ رسم ہے جو نہایت مفید ہے کہ اس عددی قیمت کے ساتھ اس کا بھی اظہار کیا جائے کہ اس کی ظنی یا احتمالی خطا (Probable Error) کیا ہے۔ مثلاً موجودہ صورت میں ظنی خطا ± ۰٫۰۱۲″ بیان کی گئی ہے۔ اس کا مطلب حسب ذیل ہے۔ سورج کا ٹھیک اختلاف منظر معلوم نہیں لیکن جہاں تک کہ اس تحقیق کا تعلق ہے یہ معلوم ہے کہ ۸٫۷۸″ صحیح اختلافِ منظر کے بہت قریب ہونا چاہئے۔ عملاً اس کا یقین ہے کہ یہ نتیجہ دو ثانئے غلط یا ایک ثانیہ غلط نہیں ہو سکتا، اور یہ بہت ہی مشتبہ ہے کہ وہ نصف ثانیہ غلط ہو سکے اور ممکن ہے کہ وہ ۰٫۰۲″ غلط ہو اور بہت ہی ممکن ہے کہ وہ کم از کم ۰٫۰۱″ غلط ہو۔ پس ایک ثانیہ کی کوئی کسر مثلاً ۰٫۰۱″ اور ۰٫۰۵″ کے درمیان ایسی ہونی چاہئے جس میں یہ خاصیت ہو کہ تعین کی خطا کا
ظن اس کسر کے اتنا ہی نیچے ہو جتنا اوپر ہے۔ موجودہ صورت میں مشاہدوں (۳-۷)
پر غور کرنے سے یہ معلوم ہوا کہ یہ اتنا ہی ممکن ہے کہ اختلاف منظر

۸ء ۷ء ۸ً - ۱۲ء۰ً اور ۸ء ۷ء ۸ً + ۱۲ء۰ً کے درمیان واقع ہو جتنا کہ نہیں۔ پس اِس صورت میں ظنی خطا ۱۲ء۰ً ہے، اور ظنی خطا جتنی چھوٹی ہوگی اُتنے ہی تنگ وہ حدود ہوں گے جن کے درمیان وہ مقدار غالباً واقع ہے اور اُتنی ہی بہتر اُس تحقیق کی نوعیت ہوگی جس سے وہ مقدار معلوم کیگئی ہے۔ پس تعین کی ظنی خطا کو بیان کرنا یہ ظاہر کرنے کا عددی طریقہ ہے کہ نتیجہ کو کس درجہ اعتماد کے ساتھ قبول کیا جانا چاہئے۔

مریخ کے مشاہدوں سے شمسی اختلاف منظر کے تعین میں قابل قدر خطا داخل ہو سکنے کا ایک سبب یہ ہے۔ بڑے بڑے راسی فاصلوں پر کرہ ہوائی میں نور کے انتشار کا اثر یہ ہوتا ہے کہ سیارہ کے قرص کے گرد رنگین حاشیہ لگ جاتا ہے آسمانی نیچے اور سرخ اوپر، اس کی وجہ سے ایک سرخی مائل سیارہ جسکو نیلے شفق آلود آسمان میں مشاہدہ کیا گیا ہو باقاعدہ بہت نیچے نظر آتا ہے اور اختلاف منظری ہٹاؤ ظاہرا بڑھ جاتا ہے۔ اِس لیے صغیر سیاروں کا استعمال کرنا قابل ترجیح ہے جن کے قرص ستاروں سے ناقابل تمیز ہیں۔ اِس کام کو سرڈیوڈ جل نے شمالی نصف کرہ ارض کے چار مشاہدین کے ساتھ تعاون عمل کر کے ۱۸۸۸ء اور ۱۸۸۹ء میں بمقام کیپ (Cape) انجام دیا جبکہ صغیر سیارے وکٹوریا، ایرس، اور سیافو تقابل میں تھے۔ محصلہ نتیجوں پر رصدگاہ کیپ کے "Annals" جلد ششم و ہفتم میں بحث کی گئی ہے۔ اِس موقع پر خط استوار کے قریب کسی مقام کو اختیار کرنا ممکن معلوم نہیں ہوا اور اس لیے یومی طریقہ کی بجائے وہ طریقہ اختیار کرنا پڑا جس میں ایک دوسرے سے بڑے فاصلہ پر کے مقاموں پر کم و بیش ایک ساتھ مشاہدہ کیا جاتا ہے۔ عمل حساب کے اصول اُن اصولوں کے بہت مشابہ ہیں جن کی شرح اوپر کیجا چکی ہے لیکن تفصیلات بہت پیچیدہ اور بہت مشکل ہیں اور اِن کی توضیح حقیقی طریقہ کار کی مثالوں سے

کرنا آسان نہیں ہے۔ اسلئے ہم نے اِس سے قبل انجام پائے ہوئے کام کا انتخاب کیا تاکہ شمسی پیما، کے ذریعہ شمسی اختلاف منظر معلوم کرنے کا طریقہ واضح ہو جائے اگرچہ اس کام کے نتیجوں پر اختلاف منظر کی اُس قیمت کو ترجیح حاصل ہے جو متذکرہ بالا ہین صغیر سیاروں سے ماخوذ ہوئی ہے یعنی

خ = ۸٫۸۰۲″ ± ۰٫۰۰۵″

اس قیمت کو شائد بہترین سمجھا جا سکتا ہے کیونکہ ابتک راست مشاہدہ سے اس سے بہتر قیمت حاصل نہیں ہو سکی لیکن یہ ہو سکتا ہے کہ جب سیارہ ایراس کے عکسوں اور پیمائشوں پر پوری طرح بحث ہو چکے جو ۱۹۰۰ء اور ۱۹۰۱ء میں اس کے تقابل کے زمانہ میں لیے گئے تھے تو اس سے بہتر قیمت حاصل ہو۔ ایراس کسی اور سیارہ کی بہ نسبت زمین سے زیادہ قریب آتا ہے اور اس لیے اس مسئلہ میں اس سے غیر معمولی فائدے حاصل ہوتے ہیں۔ (۲۰۸)

مثال ۔ فرض کرو کہ رصدگاہ کا ارض مرکزی عرض بلد فہ ہے، اِس کا ہیئتی عرض بلد فہ، ایک سیارہ کا ساعتی زاویہ س، اس کا میل ضہ، اور اسکا فاصلہ زمین سے زمین کے مدار کے اوسط نصف قطر کی رقوم میں ف ہے۔ فرض کرو کہ شمسی اختلاف منظر کی قیمت ۸٫۸۰″ ہے۔

ثابت کرو کہ اختلاف منظر کی تبدیلی کی وجہ سے صعود مستقیم میں سیارہ کی حرکت کی شرح کسی لمحہ پر حسب ذیل ہے:

+ ۰٫۶۹ ۳ث × ۱ \ ف × جم فہ جم فہ جم س قط ضہ فی یوم

اور میل میں متناظر شرح

- ۳٫۲″ × ۱ \ ف × جم فہ جم فہ جب ضہ جب س فی یوم

ہے۔ [Mr. Hinks, *Mon. Not. R.A.S.* Vol. LX. p. 545]

۱۰۱* ۔ شمسی اختلاف منظر ضلالت کے مستقل سے۔

اگر ضلالت کا مستقل اور نور کی رفتار فی ثانیہ کیلومیٹر میں معلوم ہو تو ہم زمین کی اوسط رفتار معلوم کر سکتے ہیں اور اس لیے زمین کے مدار کا اوسط نصف قطر اور سورج کا اختلاف منظر معلوم ہو سکتا ہے۔

صفحہ ۱۹ اور مثال ۳ صفحہ ۲۱ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر

ضلالت کا مستقل ک،

نور کی مشاہدہ کردہ رفتار مہ،

زمین کے مدار کا خروج المرکز ز،

۳۶۵٫۲۵۶ دنوں کے کوکبی سال میں زمین کی اوسط حرکت

قوس کے ثانیوں میں ن فی ثانیہ (اوسط وقت)،

زمین کا استوائی نصف قطر غہ،

اور سورج کا استوائی افقی اختلاف منظر خ ر ہو

تو

خ ر = غہ ن قم اً / ک مہ √(۱ ـ ز۲)

اب غہ = ۶۳۷۸٫۲۴۹ کیلومیٹر (کلارک)

ن = ۶۰ × ۶۰ × ۳۶۰ / ۳۶۵٫۲۵۶ × ۶۰ × ۶۰ × ۲۴ = ۱۵ / ۳۶۵٫۲۵۶

مہ = ۲۹۹۸۶۰ کیلومیٹر فی ثانیہ (نیوکومب، ہئیتی مستقل)

اور √(۱ ـ ز۲) = ۰٫۹۹۹۸۶۱۹

رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

خ ر = ۱۸۰٫۲ / ک

اس لیے خ ر = ۸٫۸۰۳″ اگر ک، ۲۰٫۴۷″ ہے۔

شمسی اختلاف منظر معلوم کرنے کے اس بالواسطہ طریقہ کی قدر

(۳۰۹) اس عجیب اختلاف کی وجہ سے گھٹ جاتی ہے جو ضلالت کے مستقل ک کی

حالیہ دریافت شدہ قیمتوں میں پایا جاتا ہے۔ اس مستقل کی وہ تمام قیمتیں جو سنہ ۱۸۹۲ء سے قبل مقرر کی گئی تھیں عرض بلد کے تغیر کے ساتھ جو اس وقت غیر معلوم تھا ضرور اُلجھی ہوئی تھیں ۔ بعد میں اس تغیر کو ساقط کرنے کی خاطر خاص احتیاط برتی گئی ہے لیکن جدید ترین نتیجے پھر بھی کسی قدر غیر یقینی ہیں ۔

*۱۰۲ - شمسی اختلافِ منظر مشتری کے قمروں سے ۔

وہ وقت جس پر ہم مشتری کے ایک قمر کا خسوف مشاہدہ کرتے ہیں اسوقت سے کچھ دیر بعد ہوتا ہے جبپر یہ خسوف درحقیقت واقع ہوتا ہے، اس کی وجہ یہ ہے کہ نور مشتری کے قمر سے زمین تک آناً فاناً نہیں پہنچ جاتا بلکہ اُسے یہ فاصلہ طے کرنے میں کچھ وقفہ لگتا ہے اور یہ وقفہ زمین سے مشتری کے تغیر فاصلہ کے ساتھ بدلتا رہتا ہے۔ اس تغیر کا قانون بڑی صحت کے ساتھ معلوم ہے اور فضا میں نور کی جو رفتار تجربہ سے متعین ہوئی ہے اُسمیں بہت ہی کم شبہ ہے پس اگر اُس آن کو جس پر خسوف واقع ہوتا ہے صحت کے ساتھ محسوب کرنا ممکن ہو اور اُس آن کو بھی اتنی ہی صحت کے ساتھ مشاہدہ کرنا ممکن ہو جس پر وہ واقع ہوتا نظر آتا ہے جبکہ اُسے زمین سے دیکھا جاتا ہے تو وہ وقت جو نور کو سفر کرنے میں لگتا ہے، مشتری کا زمین سے فاصلہ اور زمین کا سورج سے فاصلہ اِن سب کو یکے بعد دیگرے محسوب کرنا ممکن ہوگا۔ مشتری کے قمروں کی حرکتوں کے نظریہ کی غیر اطمینان بخش حالت اور کافی صحت کے ساتھ اُس آن کا مشاہدہ کرنے میں مشکل جبکہ تابع ٹھیک طور پر نصف سایہ میں غرق ہوتا ہے وہ وجوہ ہیں جن کے باعث سورج کے فاصلہ کے تعینات جو اس طریقہ سے کئے گئے ہیں، بہت ہی کم قدر رکھتے ہیں۔ سر ڈیوڈ جل، ڈاکٹر ڈی سِٹر (Sitler.) اور مسٹر براین کوکسن (Cookson.) نے رائل رصدگاہ راس امید پر حال میں قمروں کے مقاموں کے جو ناپ معلوم کئے ہیں اُن سے اِن قمروں کے مداروں کے عناصر بہتر ہوئے

ہیں اور پروفیسر آر۔ اے۔ سیمپسن (Sampson.) نے اُن عکس پیمائی مشاہدوں پر بحث کی ہے جو پروفیسر ای۔ سی۔ پکرنگ (Pickering.) نے بمقام ہارورڈ کالج کئے تھے اور اس سے امید ہے کہ دوسری مشکل آسان ہو۔

۱۰۳۔ شمسی اختلافِ منظر زمین کی کمیت سے۔

زمین اور سورج کی کمیتوں، زمین کے استوائی نصف قطر، ثانیوں کے رقاص کے طول، اور سورج کے فاصلہ کے درمیان ایک رشتہ ہے جو اچھی طرح متعین کیا گیا ہے، یہ رشتہ قمری نظریہ کی اساس ہے۔ اگر خ ر (۳۱۰) شمسی اختلافِ منظر اور ک سورج اور زمین کی کمیتوں کے درمیان نسبت ہو تو

$$خ^۳ر ک = [۸،۳۵۴۹۳]$$

ک کی قیمت اُن خللوں سے ماخوذ ہو سکتی ہے جو دوسرے سیاروں بالخصوص زہرہ اور مریخ کی حرکتوں میں زمین کی کشش کی وجہ سے پیدا ہوتے ہیں۔ پروفیسر نیوکمب (Newcomb.) نے اس مضمون پر تفصیلی بحث کی ہے (دیکھو مندرجۂ بالا تصنیف) اور وہ اسی نتیجہ پر پہنچے ہیں کہ شمسی اختلافِ منظر کی قیمت جو اس طریقہ سے حاصل ہوتی ہے ۸،۷۶ ہے اور یہ کہ "نامعلوم عمل اور نظریہ کے ممکن نقائص کے قطع نظر اس قیمت میں بہ نسبت کسی اور قیمت کے جو متعین کیجا سکتی ہے کسی معلومہ سبب سے شبہ کی بہت کم گنجائش ہے"۔ شمسی اختلافِ منظر کے باقی دوسرے اچھے تعینات کے اوسط سے اس نتیجہ کے انحراف کا خیال کرتے یہ تحفظ اہم ہے کیونکہ اندرونی سیاروں کی حرکتوں میں بڑے اختلافات ہیں جو تاحال ناقابل حل ہیں۔

لیکن یہ کہا جا سکتا ہے کہ تیس یا چالیس سال میں یہ طریقہ ایک نئے انداز میں شائد قابل اطلاق ہو سکے۔ پرنسٹن یونیورسٹی نیوجرسی

کے مسٹر ایچ - این - رسل (Russell.) نے یہ ثابت کیا ہے کہ زمین کی کشش کی وجہ سے سیارہ ایراس کی حرکت میں ایک بڑی دَوری ناہمواری ہے جو کسی وقت زمین کی کمیت معلوم کرنے کے ایک نئے اور موثر طریقہ کا باعث ہو سکتی ہے -

۱۰۴* - شمسی اختلاف منظر چاند کی اختلافِ منظری ناہمواری سے

چاند کی حرکت کی خاص ناہمواریوں میں سے ایک اس واقعہ پر منحصر ہے کہ سورج کا مخل اثر جبکہ چاند اپنے مدار کے اُس نصف حصہ میں ہو جو سورج سے قریب ہے بہ نسبتِ اُس اثر کے بڑا ہوتا ہے جبکہ وہ دوسرے نصف حصہ میں ہو- اِس کا نتیجہ ایک ناہمواری ہے جس کا سر شمسی اختلاف منظر کے متناسب ہے - پروفیسر ای- ڈبلیو- براؤن نے یہ ثابت کیا ہے کہ اِس سر کی وہ نظری قیمت (Delaunay کی) جو ابتک تسلیم کی جاتی رہی ہے کچھ غلط ہے - پروفیسر براؤن نے یہ معلوم کیا ہے (Mon. Not. R.A.S. Vol. Lxiv. p. 535) کہ اگر شمسی اختلاف منظر کی قیمت ۸٫۷۹۰″ ہے تو اختلاف منظری ناہمواری کے لیے جملہ

-۱۲۴٫۹۲″ جب د

ہے جہاں د چاند کا طریق الشمسی طول بلد ہے - اگر شمسی اختلاف منظر کی کوئی (۳۱۱)
دوسری قیمت خ ر ہو تو جب د کا سر

-۱۲۴٫۹۲″ خ ر \ ۸٫۷۹۰″

ہو جاتا ہے - یہ وہ قیمت ہے جو چاند کی حرکت کے نظریہ سے اخذ کی گئی ہے - اگر ہم اس کا مقابلہ اُس سر کی قیمت کے ساتھ کریں جو چاند کے مشاہدہ سے ماخوذ ہوتی ہے تو خ ر کی قیمت معلوم کرنے کا ایک ذریعہ حاصل ہوتا ہے - مشاہدہ کے ذریعہ اس سر کا سب سے زیادہ جدید اور صحیح تعین وہ ہے جو مسٹر کوویل (Cowell) نے چاند کے مشاہدوں

(بمقام گرینچ) بابتہ ۱۸۴۷ء لغایتہ ۱۹۰۱ء (Mon. Not. R. A. S. Vol. LXIV. pp. 96, 585.) پر بحث کر کے حاصل کیا ہے چنانچہ وہ اس سر کی قیمت ۱۲۴٫۹۰″ معلوم کرتے ہیں نیظری جملہ کو مشاہدہ کردہ جملہ کے مساوی رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

خ ر = ۸٫۷۸۹″

لیکن یہ قابل یادداشت ہے کہ اختلاف منظری ناہمواری کی مشاہدہ کردہ قیمت کو اُس ابہام سے پوری طرح پاک کرنا جو چاند کے نیم قطر سے متعلق ہے تقریبًا ناممکن ہے اور اس سے خ ر کی اخذ کردہ قیمت پر کم از کم ۰٫۰۱″ کا اثر پڑ سکتا ہے۔ اس سوال کی تحقیق کے لیے (Mon. Not. R.A.S. Vols. LXIV, LXV) میں مسٹر کوویل اور پروفیسر ٹرنر کے مضامین دیکھو۔

———(⁘)———

(۳۱۲)

چودھواں باب

سورج پر سے ایک سیارہ کا مرور

دفعہ صفحہ

۱۰۵ ـــ تمہید۔

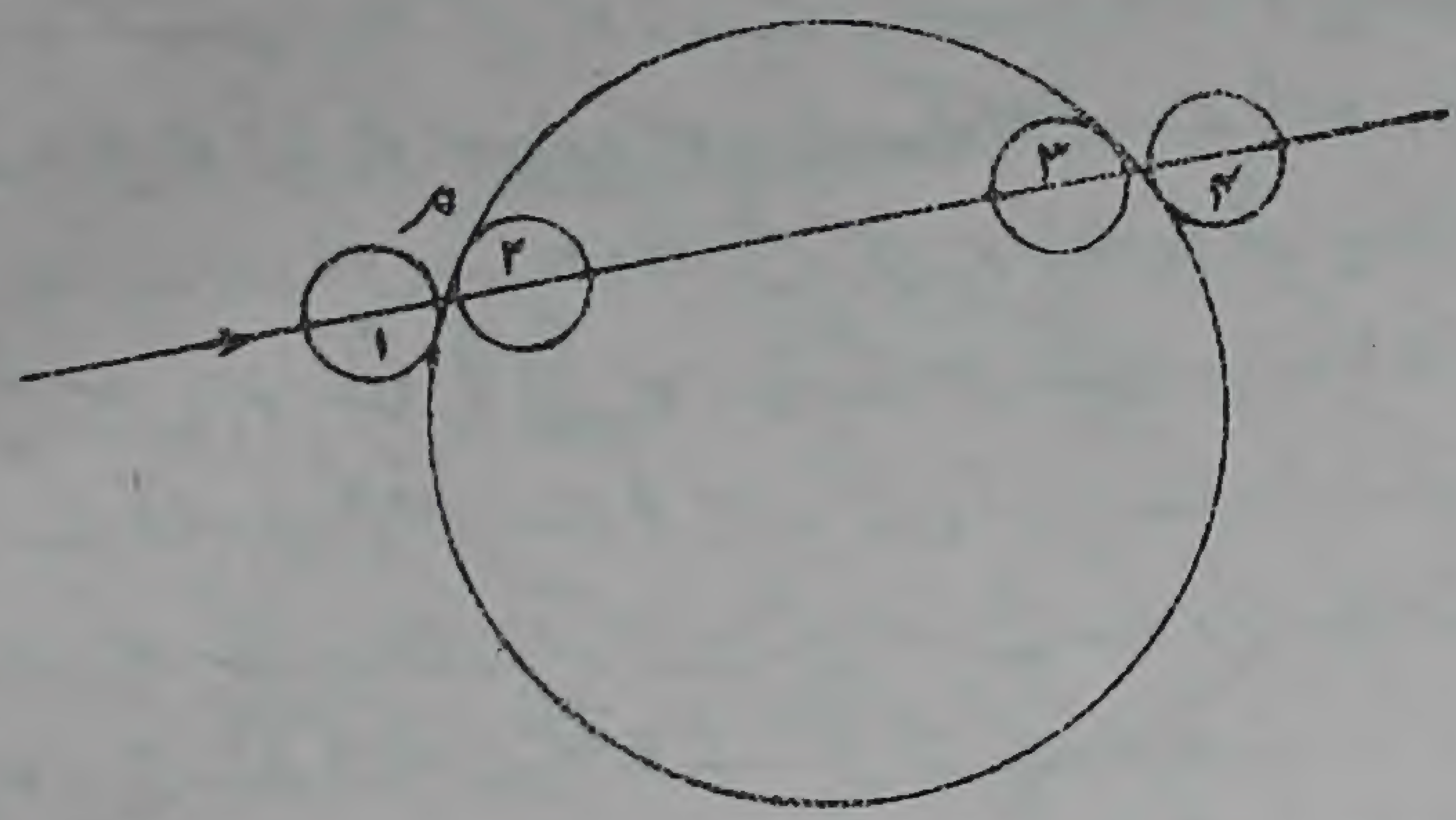
اگر زہرہ کا مدار طریق الشمس کے مستوی میں ہوتا تو جب کبھی زہرہ اور سورج کے ارض مرکزی طول بلد مساوی ہوتے اُس وقت سیارہ شمسی قرص کے مرکز کے قریب نظر آتا۔ تقریباً تین گھنٹے پیشتر ارضی مشاہد سیارہ کو سورج کے قرص پر داخل ہوتا ہوا دیکھتا اور تقریباً تین گھنٹے بعد سیارہ قرص سے خارج ہو جاتا اور ہم کہتے کہ سیارہ اپنے راستہ کے اِن چھ گھنٹوں میں سورج کے قرص پر حالت مرور میں ہے۔ لیکن چونکہ زہرہ کا مدار طریق الشمس کے مستوی میں واقع نہیں ہے اِس لیے زہرہ کے مرور کے مظاہر استقدر سادہ

نہیں ہیں جیسے کہ فرضی مروریں بتائے گئے ہیں۔ زہرہ کے مدار کا میلان طریق الشمس پر ساعتہ ۳° ۲۳َ ۳۵ً ہے اور اس لیے یہ ہوسکتا ہے اور بالعموم واقعی ہوتا ہے کہ جب زہرہ اور سورج کے ارض مرکزی طول بلد وہی ہوتے ہیں تو سیارہ سورج کے اوپر سے یا سورج کے نیچے سے گذر جاتا ہے اور اس لیے مرور واقع نہیں ہوتا۔ بلاشبہ یہ ظاہر ہے کہ مرور واقع نہیں ہوسکتا اِلّا آنکہ سورج کے مرکز سے سیارہ کا ظاہری فاصلہ سورج کے ظاہری نیم قطر سے کم ہو۔ لیکن زہرہ کے مدار کے میلان کی وجہ سے یہ ہوسکتا ہے کہ اقتران پر بھی سورج کے مرکز سے سیارہ کا ظاہری فاصلہ سورج کے ظاہری نیم قطر سے کئی گنا زیادہ ہو۔

مُرور کے وقت سورج، زمین اور سیارہ کے ہندسی روابط یہ فرض کرکے مطالعہ کئے جاسکتے ہیں کہ زمین اور سیارہ کے قطر بمقابلہ سورج کے قطر کے قابل نظر انداز ہیں اور اس لیے زمین کو اس کے مرکز ز سے اور زہرہ کو اس کے مرکز ن سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ (۳۱۳)

اگر مُرور آغاز کے یا اختتام کے نقطہ پر ہے تو خط ز ن شمسی گولے کا مماس ہونا چاہیئے۔ اِس لیے یہ دیکھنا آسان ہے کہ وہ چھوٹا زاویہ جو زہرہ کے مرور کے آغاز یا اختتام کے لمحہ پر زمین سے زہرا کے شمس مرکزی ابتعاد کو بیان کرتا ہے تقریباً س (ر - ب) \ ب ر ہونا چاہیئے جہاں سورج کا نصف قطر س ہے اور سورج سے زہرہ اور زمین کے فاصلے علی الترتیب ر اور ب ہیں۔ اگر ہم سورج کے ظاہری زاویائی نیم قطر کو ۱۶َ لیں اور ر، ب کی بجائے علی الترتیب ۱ اور ۰٫۷۲ رکھیں تو معلوم ہوتا ہے کہ مطلوبہ ابتعاد تقریباً ۱۶َ × ۰٫۲۸ \ ۰٫۷۲ = ۶٫۲َ ہے۔ پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ مُرور پر زمین سے زہرہ کا شمس مرکزی ابتعاد ۶َ سے متجاوز نہیں ہونا چاہیئے۔ وہ شرطیں جن کے تحت مرور واقع ہوتا ہے اور اِس کے وہ تغیر جو اُس کو زمین کی سطح کے مختلف نقطوں سے مُشاہدہ کرنے سے نظر آتے ہیں اِسقدر پیچیدہ ہیں کہ اس مسئلہ کی عام تحقیق ضروری ہے

اور اب ہم اُسکی طرف رجوع ہوتے ہیں اور اس میں ہم سورج اور سیارہ کو بالکل ٹھیک کرُے تصور کریں گے۔



شکل (۷۷)

جب زہرہ کا مرور آغاز کے قریب ہوتا ہے تو سیارہ کا دائری قرص (شکل ۷۷) سورج کے دائری قرص کے ساتھ ظاہری تماس میں نظر آتا ہے۔ اس منظر کی یہ ابتدائی منزل پہلے بیرونی تماس کے طور پر موسوم ہے اور اسے ہم (۱) سے تعبیر کریں گے۔ اِس کے بعد سیارہ سورج کے قرص پر آہستہ آہستہ داخل ہوتا ہوا نظر آتا ہے اور اپنے وقت پر دوسری منزل (۲) پر پہنچ جاتی ہے جو پہلے اندرونی تماس کے طور پر موسوم ہے۔ اس نقطہ سے سیارہ جو اب سورج کی چمکدار سطح پر ایک سیاہ قرص کے مانند نظر آتا ہے سورج کے قرص پر آگے بڑھتا ہے اور شائد چار گھنٹوں بعد تیسری منزل (۳) پر پہنچتا ہے جو دوسرے اندرونی تماس کے طور پر موسوم ہے۔ اِس کے بعد سیارہ سورج کے قرص سے جدا ہونا شروع کرتا ہے اور بالآخر منزل (۴) پر یا آخری بیرونی تماس پر پہنچتا ہے اور منظر ختم ہو جاتا ہے۔ چونکہ بیرونی تماس اسقدر اطمینان بخش طریقہ پر مشاہدہ

نہیں کئے جا سکتے جسقدر کہ اندرونی تماس اس لیے اول الذکر تماس مقابلتاً کم اہمیت رکھتے ہیں اور اس لیے ہم اپنی توجہ اندرونی تماسوں (۲) اور (۳) پر ہی مرکوز رکھینگے۔

زہرہ کے مرور میں جو ہندسی مسئلہ پیش ہوتا ہے اس کی تفہیم کے لیے ہم یہ تصور کریں گے کہ ایک خط مشاہد سے م تک کھینچا گیا ہے جو منزل (۲) میں کروں کے ظاہری تماس کا نقطہ ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ یہ خط گو دونوں کروں سے ملتا ہے لیکن ان میں سے کسی کو بھی قطع نہیں کرتا۔ اس لیے یہ خط ان دو کروں کا مشترک مماس ہونا چاہیئے۔ لیکن ان کروں کے ایسے مشترک مماسی خط اس مشترک مماس مخروط کے مکون ہیں جس کا راس ان دو کروں کے باہر ہے۔ اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ منزلوں (۲) اور (۳) کے لمحوں پر مشاہد کو اس مماس مخروط پر کسی نہ کسی نقطہ پر واقع ہونا چاہیئے۔ بیرونی تماس کے لمحوں پر جو (۱) اور (۴) سے تعبیر کیے گئے ہیں مشاہد کو دوسرے مشترک مماسی مخروط پر یعنے اس مخروط پر جس کا راس ان دو کروں کے درمیان ہے واقع ہونا چاہیئے۔

پس زہرہ کے مرور کا نظریہ دو کروں کے مشترک مماس مخروطوں کے نظریہ پر منحصر ہونا چاہیئے۔ اس پر ہم آئندہ دفعہ میں غور کریں گے۔

مثال ۔ یہ تسلیم کر کے کہ عطارد کے مدار کا میلان طریق الشمس کے ساتھ ۷° ۰′ ۸″ ہے اور اس کے صعودی عقدہ کا طول بلد ۴۶° ۵۲′ ۱۹″ ہے ثابت کرو کہ اس عقدہ کے قریب عطارد کا مرور واقع ہونے کے لیے جبکہ سورج کا قطر ۱۶′ ۱۱″ ہو اس سیارہ کا شمسی مرکزی طول بلد

۷ ۱۴° ۰ ۴۴′ اور > ۹ ۴۹° ۵′ ہونا چاہیئے۔

۱۰۶ ۔ سورج اور سیارہ کے مماس مخروط جبکہ دونوں کو کروی سمجھا جائے۔

فرض کرو کہ سورج اور سیارہ کے مرکز و، ج (شکل ۸۰) ہیں اور ان کے

نصف قطر ر، ر۱ ہیں اور فرض کرو کہ وج، ب سے تعبیر ہوتا ہے۔ اب دو مہر مماس پ ق اور س ت، وج سے ل اور م میں ملتے ہیں جو اِن دو کروں کے مشترک مماسی مخروطوں کے راس ہیں۔

فرض کرو کہ مبدا و میں سے گذرنے والے تین قائم محوروں کے لحاظ سے ج کے محدد لا۱، ما۱، ی۱ ہیں۔ پس ل کے محدد

لا۱ ر\(ر - ر۱)، ما۱ ر\(ر - ر۱)، ی۱ ر\(ر - ر۱)

اور م کے محدد

لا۱ ر\(ر + ر۱)، ما۱ ر\(ر + ر۱)، ی۱ ر\(ر + ر۱)

(۲۱۵) ہیں۔ اگر اس مخروط پر جس کا راس ل ہے کسی نقطہ ف کے محدد لا، ما، ی ہوں تو خط پ ل میں کسی دوسرے نقطہ کے محدد جملوں

(ف لا + گ لا۱ ر\(ر - ر۱)) / (ف + گ)، (ف ما + گ ما۱ ر\(ر - ر۱)) / (ف + گ)،

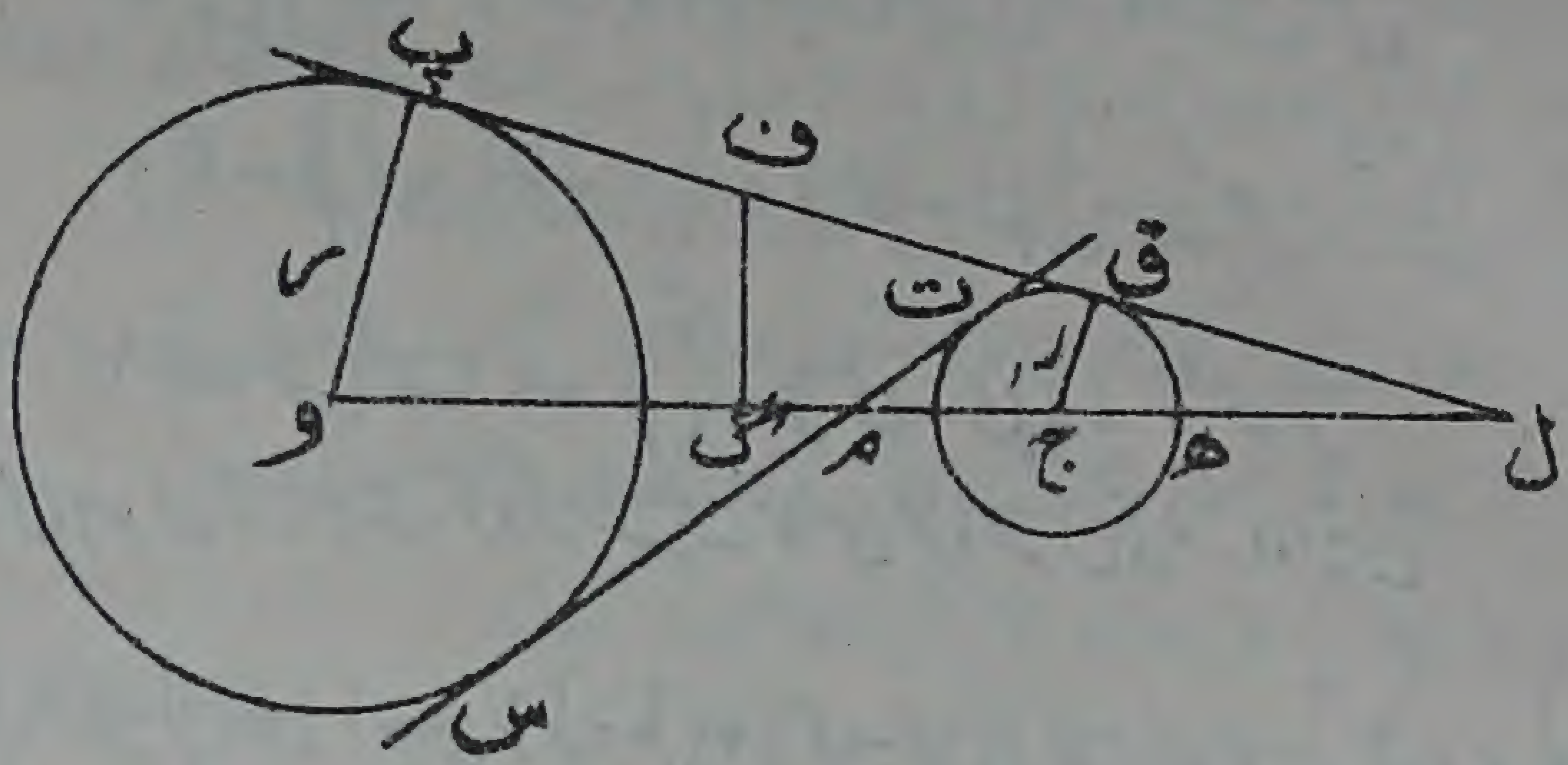
(ف ی + گ ی۱ ر\(ر - ر۱)) / (ف + گ)

سے ف اور گ کی خاص قیمتیں مقرر کرنے سے حاصل ہوں گے۔ جب اِن محددوں کو کسی ایک کرہ کی مساوات میں درج کیا جاتا ہے تو ف\گ میں ایک دودرجی مساوات اُن دو نقطوں کے متناظر حاصل ہوتی ہے جن پر ف ل اِس کرہ سے ملتا ہے۔ اُس کرہ کے لیے جس کا مرکز و ہے یہ مساوات ہو جاتی ہے

ف² (لا² + ما² + ی² - ر²) (ر - ر۱)²

+ ۲ ف گ ر (لا لا۱ + ما ما۱ + ی ی۱ - ر² - ر ر۱) (ر - ر۱)

$$+\text{گ}^2\,\text{ر}^2\left\{\text{ب}^2-(\text{ر}-\text{ر}_1)^2\right\}=0$$



شکل (۷۸)

اب اِس شرط کو بیان کرنے سے کہ اِس دو درجی کی اصلیں مساوی ہونی چاہئیں کیونکہ ف ل کرہ کو مس کرتا ہے ہم اُس مشترک مماس مخروط کی مساوات معلوم کرتے ہیں جس کا راس ل ہے، چنانچہ یہ مساوات

$$(\text{لا}\,\text{لا}_1+\text{ما}\,\text{ما}_1+\text{ی}\,\text{ی}_1-\text{ر}^2+\text{ر}\,\text{ر}_1)^2$$

$$=(\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{ر}^2)(\text{ب}^2-\text{ر}^2-2\,\text{ر}\,\text{ر}_1-\text{ر}_1^2)\ldots(1)$$

ہے۔ اِسی طرح اُس مخروط کی مساوات جس کا راس م ہے

$$(\text{لا}\,\text{لا}_1+\text{ما}\,\text{ما}_1+\text{ی}\,\text{ی}_1-\text{ر}^2-\text{ر}\,\text{ر}_1)^2$$

$$=(\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2-\text{ر}^2)(\text{ب}^2-\text{ر}^2-2\,\text{ر}\,\text{ر}_1-\text{ر}_1^2)\ldots(2)$$

ہے۔ اگر کوئی مُشاہد ق اور ل کے درمیان مخروط (۱) پر سے دیکھے تو دو دائرے اپنے مشترک مماس کے ایک ہی جانب نظر آئیں گے۔ برخلاف اِس کے اگر کوئی مشاہد س ت پر سے جو ت سے آگے

خارج کیا گیا ہے دیکھے تو یہ دو دائرے اپنے مشترک مماس کی مخالف جانبوں میں نظر آئیں گے ۔

مثال* ۱ ۔ اگر متذکرۂ بالا دو کرُوں کی مساواتیں شکل

$$(\text{لا}-\text{لا}_{۱})^{۲}+(\text{ما}-\text{ما}_{۱})^{۲}+(\text{ی}-\text{ی}_{۱})^{۲}-\text{ر}_{۱}^{۲}=۰ ،$$ (۳۱۶)

$$(\text{لا}-\text{لا}_{۲})^{۲}+(\text{ما}-\text{ما}_{۲})^{۲}+(\text{ی}-\text{ی}_{۲})^{۲}-\text{ر}_{۲}^{۲}=۰$$

میں دی گئی ہوں تو ثابت کرو کہ مشترک مماسی مخروطوں کی مساواتیں

$$\left\{(\text{لا}-\text{لا}_{۱})(\text{لا}_{۲}-\text{لا}_{۱})+(\text{ما}-\text{ما}_{۱})(\text{ما}_{۲}-\text{ما}_{۱})+(\text{ی}-\text{ی}_{۱})(\text{ی}_{۲}-\text{ی}_{۱})-\text{ر}_{۱}^{۲}\pm\text{ر}_{۱}\text{ر}_{۲}\right\}^{۲}$$

$$=\left\{(\text{لا}-\text{لا}_{۱})^{۲}+(\text{ما}-\text{ما}_{۱})^{۲}+(\text{ی}-\text{ی}_{۱})^{۲}-\text{ر}_{۱}^{۲}\right\}\left\{(\text{لا}_{۲}-\text{لا}_{۱})^{۲}+(\text{ما}_{۲}-\text{ما}_{۱})^{۲}+(\text{ی}_{۲}-\text{ی}_{۱})^{۲}-(\text{ر}_{۲}\mp\text{ر}_{۱})^{۲}\right\}$$

ہیں۔ اِس مساوات کے مختلف اجزائے ضربی کے ہندسی مفہوم سمجھاؤ ۔

مثال* ۲ ۔ ثابت کرو کہ مخروطوں (۱) اور (۲) کی مساواتیں شکل

$$(\text{لا}\,\text{لا}_{۱}+\text{ما}\,\text{ما}_{۱}+\text{ی}\,\text{ی}_{۱}-\text{ب}^{۲}\mp\text{ر}\,\text{ر}_{۱}+\text{ر}_{۱}^{۲})^{۲}$$

$$=\{\text{ب}^{۲}-(\text{ر}\mp\text{ر}_{۱})^{۲}\}\{(\text{لا}-\text{لا}_{۱})^{۲}+(\text{ما}-\text{ما}_{۱})^{۲}+(\text{ی}-\text{ی}_{۱})^{۲}-\text{ر}_{۱}^{۲}\}$$

میں بھی لکھی جا سکتی ہیں ۔

مثال* ۳ ۔ اگر نقطہ ف سے (شکل ۸۰) خط ف گ ، و ج پر عمود کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{و گ}\times\text{و ج}-\text{پ ف}\times\text{پ ق}=\text{ر}(\text{ر}-\text{ر}_{۱})$$

اور اس سے مساوات (۱) حاصل کرو ۔

۱۰۷ ۔ اندرونی تماسوں (۲) اور (۳) کے اوقات معلوم کرنے کی مساوات

ہم دیکھ چکے ہیں کہ عطارد یا زہرہ کا مرُور سورج کے قرص پر اس وقت واقع ہونا چاہئے جبکہ سیارہ اپنے عقدوں میں سے ایک سے کافی طور پر

قریب ہو، قربت کے حدود عقدہ کے کسی جانب جب $\frac{1}{2}$ مہ مس ق کے ہیں جہاں سیّارہ کے مدار کا میلان مہ ہے اور سورج کا نیم قطر ق۔ ہم فرض کریں گے کہ سیارہ طریق الشمس پر کے صعودی عقدے سے قریب ہے اور ہم اپنی توجہ اندرونی تماسوں تک محدود رکھینگے اور وہ مساوات معلوم کرینگے جس سے یہ تماس متعین ہوتے ہیں۔

حوالے کے محور اور مستعملہ علامتیں حسب ذیل ہیں:-

و، سورج کے مرکز پر محددوں کا مبدا ہے،

+لا، و سے ♈ کی جانب ہے،

+ما، و سے اُس سماوی نقطہ کی جانب جس کا طول بلد ۹۰° اور عرض بلد صفر ہے،

+ی، و سے طریق الشمس کے شطب کی جانب۔

مشاہد کے محدد اِن محوروں کے لحاظ سے لا، ما، ی ہیں اور سیارہ کے مرکز کے محدد لا، ما، ی ہیں۔

وَ زمین کا مرکز ہے۔ و لا، و ما، و ی کے متوازی اور وَ میں سے گزرنے والے محور وَ لا، وَ ما، وَ ی ہیں۔ اِن محوروں کے لحاظ سے زمین کی سطح پر اُس نقطہ کے محدد جہاں مشاہد ہے لاَ، ماَ، یَ ہیں۔

ل، زمین کا شمس مرکزی طول بلد ہے،

ر، رَ، ب، سورج سے زمین اور زہرہ تک سمتی نیم قطر ہیں،

نہ، زمین کے مرکز سے مشاہد کا فاصلہ ہے،

فہ، مشاہد کا ارض مرکزی عرض بلد ہے،

تہ، مشاہد کے نصف النہار پر کوکبی وقت ہے،

قہ، سیارہ کے صعودی عقدہ کا طول بلد ہے،

صہ، طریق الشمس کے ساتھ سیارہ کے مدار کا میلان ہے،

طہ، و کے گرد وہ زاویہ ہے جو سیّارہ اپنے صعودی عقدے میں سے

گزرنے کے بعد سے اپنے مدار میں طے کر چکا ہے۔

دفعہ ۱۰۶۔ اکی مساوات (۱) سے سیارہ کے اندرونی تماس کے اوقات معلوم ہو سکتے ہیں اگر لا، ما، ی، لاَ، ماَ، یَ، لا،، ما،، ی، کی بجائے ہم رکھیں

لا = ر جم لہ + لاَ
ما = ر جب لہ + ماَ .... (۱)
ی = یَ

لاَ = غہ جم فہ جم تہ
ماَ = غہ جم سہ جم فہ جب تہ + غہ جب سہ جب فہ ...(۲)
یَ = غہ جب سہ جم فہ جب تہ + غہ جم سہ جب فہ

لا، = ب جم قہ جم طہ ـ ب جب قہ جب طہ جم سہ
ما، = ب جب قہ جم طہ + ب جم قہ جب طہ جم سہ ..(۳)
ی، = ب جب طہ جب سہ

یہ مساواتیں حسب ذیل طریقے سے حاصل ہوتی ہیں:۔
وَ کے محدد ر جم لہ، ر جب لہ، ۰، ہیں اور لا، ما، ی معلوم کرنے کے لیے وَ کے محددوں میں مشاہد کے متناظر محددوں



شکل (۷۹)

لاَ، ماَ، یَ کو جو وَ میں سے گذرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے ہیں جمع کرنا چاہئے۔

ہم شکل (۷۹) سے لاَ، ماَ، یَ کے لیے مساواتیں (۲) حاصل کر سکتے ہیں، اِس شکل میں مُشاہد کا محل ف ہے، ف ھ اُس کا نصف النہار اور لاَ ھ ارضی خط اُستواء۔ زمین کے مرکز میں سے گذرنے والا اور طریق الشمس کے متوازی مُستوی، زمین کی سطح سے خط لاَ ماَ میں ملتا ہے اور لاَ ماَ = ۹۰°۔ چونکہ وَلاَ، و ۲ کے متوازی ہے اس لیے قوس لاَ ھ جو زمین کی گردش کی وجہ سے بڑھ رہی ہے مشاہد کے نصف النہار ف ھ کے لیے ۲ کا ساعتی زاویہ (مغرب) ہونی چاہئے یعنی مقامی کوکبی وقت تہ۔ اگر ف ق، لاَ ماَ پر عمود ہو تو مُشاہد کے محددؔ وَ میں سے گذرنے والے محوروں کے لحاظ سے حسب ذیل ہیں:-

لاَ = غہ جم ف لاَ،

ماَ = غہ جم ف ماَ = غہ جب ف لاَ جم (ف لاَ ھ - سہ)،

یَ = غہ جب ف ق = غہ جب ف لاَ جب (ف لاَ ھ - سہ)

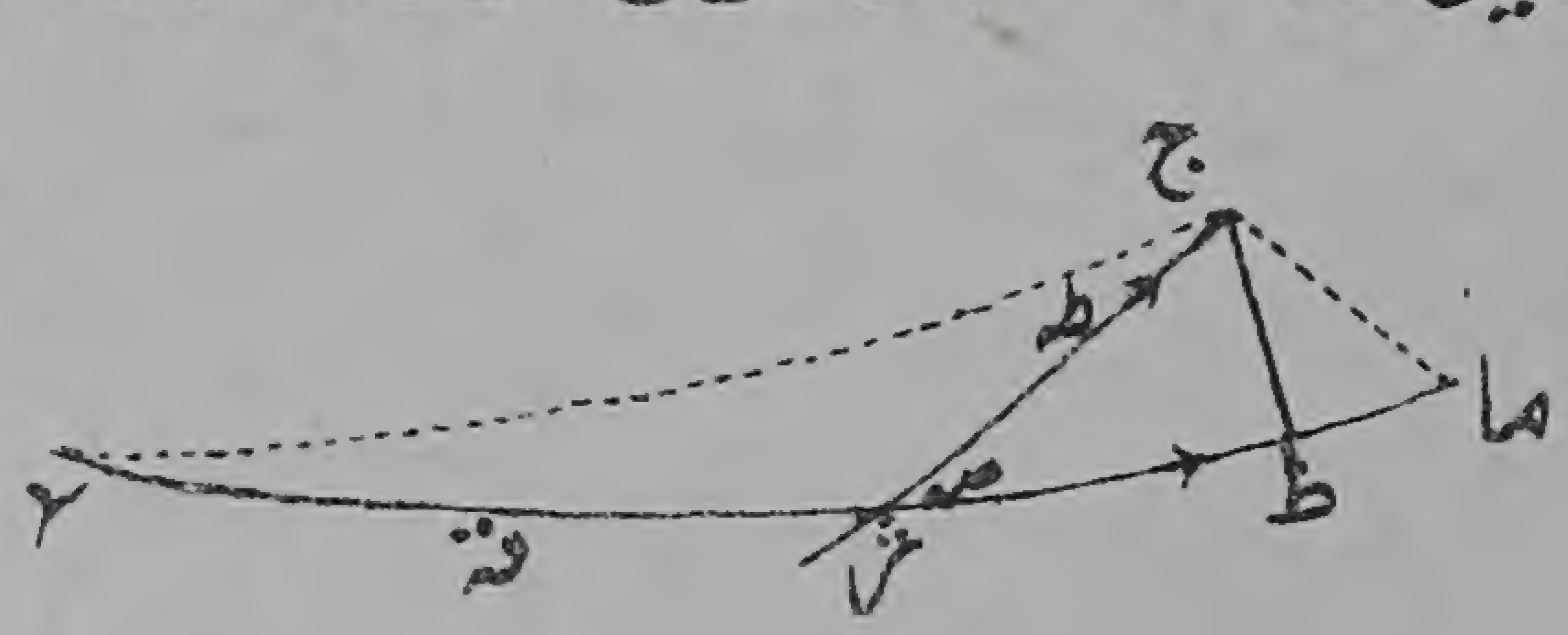
لیکن چونکہ

جب ف لاَ جم ف لاَ ھ = جم فہ جب تہ، جب ف لاَ جب ف لاَ ھ = جب فہ،

اور

جم ف لاَ = جم فہ جم تہ

اسلیے، ہم دیکھتے ہیں کہ لاَ، ماَ، یَ کی قیمتیں وہ ہیں جو (۲) میں دکھائی گئی ہیں۔



شکل (۸۰)

شکل ۸۰ میں سیارہ کا مرکز ج ہے اور اس کے مدار کا صعودی عقدہ طریق الشمس ۷ ما پر ٹھہرا ہے۔ اگر ج ط طریق الشمس پر عمود ہو اور ۷ ما = ۹۰° تو ج کے محدد لا، ما، ی علی الترتیب ب جم ج ۷، ب جم ج ما، ب جب ج ط ہیں اور ضابطوں (دفعہ ۱) سے لا، ما، ی کی وہ قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جو (۳) میں دی گئی ہیں۔

۱۰۸ — اندرونی تماس کی عام مساوات کا تقریبی حل۔

اب ہمیں وہ اندراج کرنا ہے جو دفعہ ماسبق میں بتایا گیا ہے، چنانچہ

لا لا، + ما ما، + ی ی، = ب ر { جم ط جم (لہ - قہ) + جم ع جب ط جب (لہ - قہ) }
+ لاَ لا، + ماَ ما، + یَ ی،

(۳۱۹) لا^2 + ما^2 + ی^2 - س^2 = ر^2 + ۲ ر لاَ جم لہ + ۲ ر ماَ جب لہ + غہ^2 - س^2

پھر ہم اس واقعہ سے استفادہ کرتے ہیں کہ

ر^2 / ب^2، غہ^2 / ر^2، غہ س / ر^2، س^2 / ر^2

علی الترتیب تقریباً

۱ / (۱۸۰۰۰)^2، ۱ / (۲۳۰۰۰)^2، ۱ / ۲۱۵ × ۲۳۰۰۰^2، اور ۱ / ۲۱۵^2

ہونے کی وجہ سے بہت چھوٹی مقداریں ہیں (دیکھو "نظام شمسی کے عنصروں کی جدول" اس جلد کے ختم پر) اور اس لیے انہیں ناقابل قدر سمجھ کر نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ پس تقریباً حاصل ہوتا ہے

(لا^2 + ما^2 + ی^2 - س^2)$^{\frac{1}{2}}$ = ر - س^2 / ۲ ر + لاَ جم لہ + ماَ جب لہ،

{ ب^2 - (س - س،)^2 }$^{\frac{1}{2}}$ = ب - س^2 / ۲ ب + س س، / ب

اِن اندراجوں کو عمل میں لانے سے دفعہ ۱۰۶ کی مساوات (۱) کے طرفین کا جذرالمربع لینے اور اس کی منفی علامت کو مسترد کرنے کے بعد

جم طہ جم (لا - قہ) + جم صہ جب طہ جب (لہ - قہ)

= ۱ - ں^۲ (ر - ب)^۲ \ ۲ ر^۲ ب^۲ + ں ر۱ (ر - ب) \ ر ب^۲

+ (لاَ ب جم لہ + ماَ ب جب لہ - لاَ لا۱ - ماَ ما۱ - یَ ی۱) \ ر ب ......(۱)

ہو جاتی ہے۔ جذرالمربع کی منفی علامت کو مسترد کرنے کی وجہ یہ ہے کہ یہ علامت صرف اُس صورت سے متعلق ہے جبکہ سیّارہ سورج کے پیچھے سے گذر رہا ہو۔

ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات بالا میں وقت جو وہ مجہول مقدار ہے جس کی ہمیں تلاش ہے صریحی طور پر نظر نہیں آتا۔ لیکن وہ لہ، طہ لاَ، ماَ، یَ، لا، ما، ی، کے جملوں میں ضمنی طور پر شامل ہے اور اسلیے یہ مساوات بڑی پیچیدہ معلوم ہوتی ہے لیکن یہ پیچیدگی ناگزیر ہے کیونکہ مساوات جس شکل میں کہ وہ اِس وقت پیش ہے ماضی اور مستقبل ہر وقت سیّارہ کے مُروروں پر اطلاق پذیر ہونی چاہیئے۔ اگر ہم اپنی نظر صرف ایک مُرور پر محدود رکھیں تو یہ مساوات ایسی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے جس سے وہ تمام چیزیں معلوم ہوتی ہیں جو اس خاص مُرور کے لیے ضروری ہیں۔

اب ہم ابتداً اُن اوقات پر غور کرتے ہیں جن پر مُرور کا اغاز اور اختتام ہوگا اگر اُسکو زمین کے مرکز سے دیکھا جا سکے، اِس صورت میں لاَ، ماَ، یَ سب صفر ہیں اور مساوات مندرجۂ بالا لکھی جا سکتی ہے

جم طہ جم (لہ - قہ) + جم صہ جب طہ جب (لہ - قہ)

= ۱ - ں^۲ (ر - ب)^۲ \ ۲ ر^۲ ب^۲ + ں ر۱ (ر - ب) \ ر ب^۲ ...(۲)

اِس مساوات کی ہر جانب، اُس زاویہ سا کی جیب التمام کو بیان کرتی ہے

جو سورج کے مرکز پر زہرہ اور زمین کے مرکزوں کے محاذی بنتا ہے۔ اگر طہ، لہ وہ معلومہ شرحیں فی گھنٹہ ہوں جن سے زہرہ اور زمین کی اصلی بے قاعدگیاں بڑھ رہی ہیں) اور اگر تب اور تت وہ گرینوچ اوسط وقت ہوں جن پر علی الترتیب زمین اور زہرہ عقدہ پر پہنچتے ہیں تو تقریباً

طہ = طہ (ت - ت۱)، لہ - قہ = لہ (ت - تب)

زہرہ کے جدید ترین مرُور کے موقع پر جو بتاریخ ۶ دسمبر ۱۸۸۲ء واقع ہوا تھا معلوم ہوا کہ (۳۲۰)

ر = ۰٫۹۸۵۰، ب = ۰٫۷۲۰۵، م = ۰٫۰۰۴۶۶۳، ر = ۰٫۰۰۰۴۰۲۶

جہاں سورج سے زمین کے اوسط فاصلہ کو اکائی کے طور پر لیا گیا ہے۔ اِن عددوں سے حاصل ہوتا ہے

م۲ (ر - ب)۲ \ ۲ ر۲ ب۲ = ۰٫۰۰۰۰۱۵۱۰،

م ر۱ (ر - ب) \ ر ب۲ = ۰٫۰۰۰۰۰۰۹۷

اِس لیے مساوات لکھی جا سکتی ہے

جم سا = جم طہ (ت - ت۱) جم لہ (ت - تب) + جم صہ جب طہ (ت - ت۱) جب لہ (ت - تب)

= ۱ - ۰٫۰۰۰۰۱۴۱۳ ..... (۳)

اِس طرح سا ۵َ ۴۴َ کا ایک چھوٹا زاویہ ہے اور چونکہ صہ ۳° ۲۳َ ۱۳ً ہے اِس لیے یہ دیکھنا آسان ہے کہ نہ تو طہ (ت - ت۱) اور نہ لہ (ت - تب) ۰°۴۴َ سے تجاوز ہو سکتے ہیں۔ اِس لیے ہم اِس مساوات کو کافی صحت کے ساتھ یوں بیان کر سکتے ہیں:

۱ - ۱/۲ (ت - ت۱)۲ طہ۲ - ۱/۲ (ت - تب)۲ لہ۲ + طہ لہ (ت - ت۱) (ت - تب) جم صہ

= ۱ - ۰٫۰۰۰۰۱۴۱۳

یہ ت میں دو درجی مساوات ہے اور ت معلوم ہونے پر دیگر تمام مقداریں معلوم ہوتی ہیں۔ جب طہ، لہ، صہ، ت۱، تب کی بجائے اِن کی قیمتیں درج کی جاتی ہیں تو یہ معلوم ہوتا ہے کہ اِس مساوات کی اصلیں حقیقی ہیں

جس سے ظاہر ہے کہ مرور واقع ہوتا ہے۔ اگر یہ اصلیں خیالی ہوتیں تو مرور واقع نہ ہوتا۔ اگر وہ مساوی ہوتیں تو زہرہ سورج کے کنارے کو صرف مس کرکے گزرتا ہوا نظر آتا۔

فرض کرو کہ اس دو درجی کی حقیقی اصلیں تَ ، تَ ہیں اور تَ > تَ۔ پس تَ وہ وقت ہے جس پر سیارہ سورج کی قرص پر پوری طرح داخل ہوتا ہوا نظر آئے گا یعنی وہ منزل (۲) میں ہوگا اور وقت تَ پر سیارہ قرص کو چھوڑنے لگیگا یعنی وہ منزل (۳) میں ہوگا۔ پس مرور کا وقفہ تَ ـ تَ ہے۔ پس زہرہ کے مرور کے لیے مسئلہ حل ہو چکا اگر اس مرور کو زمین کے مرکز سے دیکھا جا سکے۔

۱۰۹ ـ سورج کا فاصلہ معلوم کرنے میں زہرہ کے مرور کا اطلاق

یہ اطلاق دوسرے اور تیسرے تماسوں کے مشاہدوں پر منحصر ہوتا ہے جو مختلف مقاموں سے کیے گئے ہوں اور ہمیں سب سے پہلے تماس کے وقتوں کے لیے نظری جملے حاصل کرنا پڑتا ہے۔

دفعہ ۱۰۷ کی مساواتوں (۲) اور (۳) سے یہ ظاہر ہے کہ ہم لکھ سکتے ہیں

لَ = غہ عہَ　　اور　لا = ب عہ‘

مَ = غہ بہَ　　〃　ما = ب بہ‘

یَ = غہ جہَ　　〃　یا = ب جہ‘　　(۳۲۱)

جہاں عہَ ، بہَ ، جہَ ، عہ‘ ، بہ‘ ، جہ‘ ، مختلف زاویوں فہ ، تہ ، سہ ، قہ ، طہ اور صہ کے تفاعل ہیں اور خطی مقداروں غہ اور ب کے تابع نہیں ہیں۔

اس طرح دفعہ ۱۰۸ کی مساوات (۱) کی آخری رقم

(لَاب جم لہ + مَاب جب لہ ـ لَالا ـ مَاما ـ یَ یا) / ر ب

حسب ذیل ہو جاتی ہے

(عہَ جم لہ + بہَ جب لہ ـ عہَ عہ‘ ـ بہَ بہ‘ ـ جہَ جہ‘) غہ / ر

اگر ایک مشاہد جس کے ارضی محدد لاَ، ماَ، یَ ہوں تماسوں کا مشاہدہ کرے تو دوسرے اور تیسرے تماسوں کے وقتوں تَ + مف تَ اور تَ + مف تً کو حاصل کرنے کے لیے اول ہم اَ کو محسوب کرتے ہیں جو

عَہ عہ + بَہ بہ + جَہ جہ - عَہ جم لہ - بَہ جب لہ

کی قیمت ہے جبکہ بَہ، طہ اور لہ کی وہ قیمتیں جو وقت تَ کے متناظر ہیں داخل کی جا چکی ہوں۔ اسی طرح اً، وقت تً کے متناظر اسی تفاعل کی قیمت کو تعبیر کرتا ہے۔ پس دوسرے تماس کے لیے حاصل ہوتا ہے

جم سا۔ جب سا × سا مف تَ = ا - ر (ر - ب) \ ۲ ر ب + ر ا ر (ر - ب) \ ر ب - اَ غہ ر

اس لیے مف تَ = اَ غہ \ ر سا جب سا

اور اس لیے لاَ، ماَ، یَ پر کا مشاہد دوسرے تماس کو وقت

تَ + اَ غہ \ ر سا جب سا .... (۱)

پر دیکھتا ہے۔

اسی طرح یہ معلوم ہوتا ہے کہ اسی مشاہد کے لیے تیسرے تماس کا وقت

تً - اً غہ \ ر سا جب سا .... (۲)

ہوگا اور اسلیے اس مشاہد کے لیے دوسرے سے تیسرے تماس تک مرور کا وقفہ حسب ذیل ہے:

تً - تَ - (اَ + اً) غہ \ ر سا جب سا ... (۳)

اگر دوسرے مقام سے بھی اسی مرور کا مشاہدہ کیا جائے اور اَ، اً کے متناظر اس دوسرے مقام کے لیے مقداریں بَ، بً ہوں تو مرور کا وقفہ جو وہاں نظر آئے گا حسب ذیل ہوگا:

تً - تَ - (بَ + بً) غہ \ ر سا جب سا ..... (۴)

پس اگر اِن دو وقفوں کا فرق ف ہو تو

ف = (بَ + بً - اَ - اً) غہ \ رساجب سا ... (۵)

اِس مساوات میں اَ ، اً ، بَ ، بً کو دفعۂ ۱ کے ضابطوں سے محسوب کیا گیا ہے۔ زاویہ سا دفعۂ ۱۰۸ کی مساوات (۳) سے معلوم ہوتا ہے اور وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے پر سا حاصل ہوتا ہے۔ (۳۲۳)

اگر بالآخر ف کو مشاہدہ سے معلوم کیا گیا ہو تو چونکہ غہ معلوم ہے اس لیے ر مساوات (۵) سے معلوم ہو جاتا ہے۔ سورج کے فاصلہ کو معلوم کرنے کا یہ وہ مشہور طریقہ ہے جو ہیلی (Halley) کا تجویز کردہ ہے۔ اِس میں اِس امر کی ضرورت ہے کہ دو مقاموں میں سے ہر ایک مقام پر دوسرے اور تیسرے تماسوں کا مشاہدہ کیا جائے۔

زہرہ کے مرور کے مشاہدوں سے سورج کا فاصلہ اخذ کرنے کا دوسرا طریقہ بھی ہے جو اس کے بانی ڈی لیل (De Lisle) کے نام سے موسوم ہے۔ اِس طریقہ میں ہیلی کے طریقہ کی بہ نسبت ایک فائدہ یہ ہے کہ اِس میں چار کی بجائے صرف دو متواتر مشاہدوں کی ضرورت ہوتی ہے اور اس لیے موسم کی خرابی کی وجہ سے ناکامی کے خطرات نسبتاً گھٹ جاتے ہیں۔

فرض کرو کہ دو مقاموں پر مشاہدہ کرکے دوسرے تماس کے وقت معلوم کر لیے گئے ہیں تو مساوات (۱) کی رُو سے وقفہ ہوگا

(تَ + اَ غہ \ رساجب سا) - (تً + بً غہ \ رساجب سا)

= (اَ - بً) غہ \ رساجب سا

پس اگر یہ وقفہ معلوم ہو سکے تو ر کے لیے ایک مساوات حاصل ہوگی۔

بلاشبہ ڈی لیل کے عمل کا اطلاق تیسرے تماس کے مشاہدوں کے زوج پر بھی ہو سکتا ہے جو دو مختلف مقاموں سے کیے گئے ہوں۔

زہرہ کے مرور سے سورج کا فاصلہ معلوم کرنے کے طریقہ میں خاص خرابی اُس مشکل سے پیدا ہوتی ہے جو سیارہ کے قرص اور سورج کے کنارہ کے درمیان تماس کی آن کا ٹھیک طور پر مشاہدہ کرنے میں پیش آتی ہے۔ سیارہ کی

حرکت اس قدر سست اور سورج کا کنارہ اسقدر غیر واضح ہے کہ ہر مشاہدہ میں متعدد ثانیوں کی خطا ممکن ہے۔

چودھویں باب پر مثالیں

مثال ۱ — ثابت کرو کہ مساوات (۱) صفحہ ۱۱۰ میں مستعملہ مقدار $\overline{ا}$ تقریباً ساجب ی ہے جہاں ی سورج کا راسی فاصلہ ہے اور جہاں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ مشاہد اس مستوی میں ہے جس میں سورج، زمین اور سیارہ کے مرکز واقع ہیں۔

مثال ۲ — بتاؤ کہ زہرہ کے مرور سے شمسی اختلاف منظر معلوم کرنے کا طریقہ عطارد کے مرور پر کیوں اسی طرح قابل اطلاق نہیں ہوگا۔

اعظم قیمت $\overline{ا}$ = ساجب ی لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مف تَ = ثہ جب ی \ سا یا ثہ جب ی = سا مف تَ جہاں ثہ اختلاف منظر ہے۔ پس اگر مف تَ کے مشاہدہ سے ثہ حاصل کرنا ہو تو یہ ظاہر ہے کہ سا جتنا چھوٹا ہوگا اتنا کم اثر مف تَ کی قیمت کی خطاؤں کا ثہ کی محسوبہ قیمت پر پڑیگا۔ مقدار سا سیارہ کی اقترانی مدت کے بالعکس متناسب ہوتی ہے اور یہ مدت عطارد کی صورت میں ۱۱۶ یوم اور زہرہ کی صورت ۵۸۴ یوم ہے۔ اس لیے عطارد کے تماس کی آن معلوم کرنے میں کوئی خطا سورج کے محسوبہ اختلاف منظر میں اس خطا کی پانچ گنی خطا پیدا کرے گی جو زہرہ کی صورت لینے میں پیدا ہوتی ہے۔ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ سورج کا راسی فاصلہ دونوں صورتوں میں ایک ہی ہے۔

مثال ۳ — ثابت کرو کہ زہرہ کا مرور واقع ہوگا بشرطیکہ جب سیارہ طریق الشمس کو عبور کرے تو زمین اور زہرہ کے درمیان شمس مرکزی زاوی فاصلہ $1^\circ\!\cdot\!8$ سے متجاوز نہ ہو۔ سورج کا ظاہری زاوئی نیم قطر $16'$ لیا گیا ہے اور سورج سے زہرہ کا فاصلہ زمین کے فاصلہ کا ۰٫۷۲ گنا اور اس کے (زہرہ) مدار کا میلان طریق الشمس کے ساتھ جب$^{-1}\frac{1}{12}$ ہے۔

[Math. Trip. 1. 1902]

مثال ۴ — اگر دفعہ ۱۰۸ کی مساوات کا جذر المربع لینے میں مثبت علامت کی بجائے جذر المربع کی منفی علامت لیجائے تو ثابت کرو کہ مساوات کے حل سے جو وہاں حاصل کیا گیا ہے وہ موقع ملتے جن پر سیارہ سورج کے پیچھے سے گذرتا۔

مثال ۵ — یہ فرض کر کے کہ زمین کے خط استواء کا مستوی اور عطارد کے مدار کا مستوی، طریق الشمس پر منطبق ہیں ثابت کرو کہ عرض بلد فہ پر کے مشاہد کیلئے جس کا نصف النہار وہی ہے جو خط استواء پر کے ایک مشاہد کا ہے جو عطارد کو بوقت ظہر سورج کے قرص کے مرکز پر مظلل دیکھتا ہے مرور کا وقفہ تقریباً ۲ گ گھنٹے ہوگا جبکہ

$$ر(ر - ب)\,سہ\,گ + ب\,غہ\,جم\,فہ\,جب\left(\frac{۲۴\,گ}{۱۲}\right) = ر'^2(ر - ب)^2 - ب^2\,غہ^2\,جب^2\,فہ$$

جہاں زمین و عطارد کے مداروں کے نصف قطر ر، ب ہیں، زمین و سورج کے نصف قطر غہ اور ر′، اور عطارد و سورج کی ظاہری ساعت واری حرکتوں کا فرق سہ ہے۔

[Math. Trip]

اگر سورج کا ساعتی زاویہ مرور کے آغاز پر عا ہو تو مرور کا وقفہ ۲ عا ہوگا،

$$لا = ر\,جم\,لہ - غہ\,جم\,فہ\,جم\,(عا + لہ)، \qquad لا_1 = ب\,جم\,طہ،$$

$$ما = ر\,جب\,لہ - غہ\,جم\,فہ\,جب\,(عا + لہ)، \qquad ما_1 = ب\,جب\,طہ،$$

$$ی = غہ\,جب\,فہ \qquad ی_1 = ۰$$

اب اس شرط سے کہ وہ خط جو مشاہد سے عطارد (جسکو ایک نقطہ فرض کیا گیا ہے) میں سے گذرتا ہوا کھینچا گیا ہو سورج کو مس کرتا ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(ر^2 + غہ^2 - ۲\,ر\,غہ\,جم\,فہ\,جم\,عا - ر'^2)(ب^2 - ر'^2)$$

$$= \{ب\,ر\,جم\,(طہ - لہ) - ب\,غہ\,جم\,فہ\,جم\,(عا + لہ - طہ) - ر'^2\}^2$$

اس مساوات کو

$$ر'^2\{ر^2 + ب^2 + غہ^2 - ۲\,ر\,غہ\,جم\,فہ\,جم\,عا - ۲\,ب\,ر\,جم\,(طہ - لہ) + ۲\,ب\,غہ\,جم\,فہ\,جم\,(عا + لہ - طہ)\}$$

= ب۲ { ر جب (طہ - لہ) - غہ جم فہ جب (طہ - لہ - عا) }۲ + ب۲ غہ۲ جب۲ فہ

میں منتقل کیا جا سکتا ہے - یہ وہ مساوات ہے جبکہ کوئی مقداریں چھوٹی ہونے کی وجہ سے رد نہ کی گئی ہوں، لیکن اگر ہم اس کا خیال رکھیں کہ طہ - لہ، غہ \ ر، ک \ ر سب چھوٹے ہیں تو مساوات بالا

ب { ر (طہ - لہ) + غہ جم فہ جب عا } = √(ک۲ (ر - ب)۲ - ب۲ غہ۲ جب۲ فہ)

میں تحویل ہوتی ہے -

نیز سہ عا = (طہ - لہ) ب \ (ر - ب) جہاں عا = π گ \ ۱۲ اور اس لیے
مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے - (۳۲۴)

مثال ۶ - پانچ اقترانی مدتوں میں سیارہ کی حرکت اپنے عقدہ سے ۱۳ مکمل گردشوں کی بہ نسبت تقریباً °۲ ′۲۲ کم ہے اور سورج پر اس کا ایک مرور واقع ہوگا جبکہ عقدہ سے سیارہ کا فاصلہ زمین کے ساتھ اس کے اقتران کے وقت °۱ ′۳۴ سے کم ہو - اس واقعہ کی ایک عام توضیح کرو کہ زہرہ کے متواتر مروروں کے درمیان وقفے ترتیب

۸، ۱۲۱ ½، ۸، ۱۰۵ ½ سال تقریباً

میں تکرار پاتے ہیں -

کیا تکرار کی یہ ترتیب دائمی ہوگی ؟ [Smith's Prize Exam.]

مثال ۷ - یہ فرض کر کے کہ اجرام صرف اس وقت مشاہدہ کئے جا سکتے ہیں جبکہ اُن کا ارتفاع، عہ سے بڑا ہو ثابت کرو کہ مرور میں زہرہ کے سریع اور بطی دخول کے درمیان وقفہ جو زمین پر حاصل ہو سکتا ہے تقریباً (۱۱ م ۵ ۳ ش) جم عہ ہے - شمسی اختلاف منظر کو ۸٫۹۳″ لیا گیا ہے اور زہرہ اور زمین کی دوری مدتیں علی الترتیب ۲۲۴٫۷ یوم اور ۳۶۵٫۲۵ یوم لی گئی ہیں -

[Math. Trip. I]

مثال ۸ - اگر زمین اور زہرہ کے مداروں کو دائری اور زمین کے خطِ استواء کے ساتھ ہم مستوی سمجھا جائے اور اگر زمین اور زہرہ کی دوری مدتیں

علی الترتیب ۲۵ء ۳۶۵ یوم اور ۷ء ۲۲۴ یوم ہوں اور شمسی اختلاف منظر ۸″ء ۹۳ ہو؛ نیز اگر $ت_1$ اور $ت_2$ وہ لمحے ہوں جن پر زہرہ کا دخول (یا خروج) سورج کے قرص پر دو مقاموں سے مشاہدہ کیا گیا ہے جو توازی فہ پر واقع ہیں اور اگر مشاہدہ کے وقت ان دو مقاموں پر سورج کے ساعتی زاوئے (مغرب) علی الترتیب $س_1$ اور $س_2$ ہوں تو ثابت کرو کہ مشاہدہ کردہ دخول (یا خروج) کے فرق میں منٹوں کی تعداد مساوات

$$ت_1 - ت_2 = (۹۴۷ء۵)^{م}\ \text{جم فہ}\left(\text{جب}\ \frac{۱۱س_2}{۱۲} - \text{جب}\ \frac{۱۱س_1}{۱۲}\right)$$

سے حاصل ہوگی۔

مثال ۵ کی رُو سے

$$ب\left\{ر(طہ - لہ) + \text{غہ جم فہ جب}\ \frac{۱۱س}{۱۲}\right\} = \sqrt{ر^2(ر-ب)^2 - ب^2 غہ^2 \text{جب}^2 فہ}$$

فرض کرو $طہ = ن_1 ت + صہ_1$ ، $لہ = ن_2 ت + صہ_2$

$$\text{تو}\quad ب\,ر(ن_1 - ن_2)ت_1 + ب\,ر(صہ_1 - صہ_2) + ب\ \text{غہ جم فہ جب}\ \frac{۱۱س_1}{۱۲}$$

$$= \sqrt{ر^2(ر-ب)^2 - ب^2 غہ^2 \text{جب}^2 فہ}$$

$$ب\,ر(ن_1 - ن_2)ت_2 + ب\,ر(صہ_1 - صہ_2) + ب\ \text{غہ جم فہ جب}\ \frac{۱۱س_2}{۱۲}$$

$$= \sqrt{ر^2(ر-ب)^2 - ب^2 غہ^2 \text{جب}^2 فہ}$$

اِس لیے $ر(ن_1 - ن_2)(ت_1 - ت_2) = \text{غہ جم فہ}\left(\text{جب}\ \frac{۱۱س_2}{۱۲} - \text{جب}\ \frac{۱۱س_1}{۱۲}\right)$

لیکن $ن_1$ اور $ن_2$ علی الترتیب ۰ء۰۰۰۱۹۴۱۹ اور ۰ء۰۰۰۱۱۹۴۷ ہیں کیونکہ نیم قطریوں میں یہ وہ زاوئے ہیں جو زہرہ اور زمین علی الترتیب ۱ م میں مرتسم

کرتے ہیں۔ نیز ر/غ = ۹۳ء۸ جیب أ اور اِن قیمتوں کو درج کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۹۔ زمین کے، اور عطارد کے مداروں کو علی الترتیب نصف قطروں ۰۰۰ء۱ اور ۳۸۷ء۰ کے دائرے، سورج کے اختلاف منظر کو ۸۰ء۸″ اور اس کے قطر کو ۳۲′ ۰ء۴″ لیکر طریق الشمس کے ساتھ عطارد کے مدار کا بڑے سے بڑا میلان معلوم کرو تاکہ زمین کی سطح کے کسی خاص مقام پر ہر اقتران ادنیٰ کے وقت اِس کا مرور نظر آسکے۔ (۳۲۵)

[Sheepshanks Exhibition.]

مثال ۱۰۔ یہ معلوم ہوا کہ زمین کی سطح پر کے دو مقاموں پر جو طریق الشمس کے مستوی میں اور زمین کے ایک قطر کے سِروں پہ واقع ہیں سورج کے قرص کے اوپر مرور میں زہرہ کے دخول اور خروج کے اوقات کے فرق علی الترتیب ۱۱م ۱۹ثا اور ۱۱م ۲۱ثا ہیں۔ اگر یہ دیا گیا ہو کہ زہرہ کی اقترانی مدت ۵۸۴ یوم ہے تو اعشاریہ کے دو مقاموں تک قوس کے ثانیوں میں سورج کا اختلاف منظر محسوب کرو۔

[Coll. Exam.]

مثال ۱۱۔ یہ مانکر کہ زمین اور زہرہ کے قطر قابلِ نظر انداز ہیں ثابت کرو کہ سا جو مرور کے آغاز یا اختتام کے لمحہ پر زمین سے زہرہ کا شمس مرکزی ابتعاد ہے مساوات

ب٢ ر٢ جم٢ سا - ٢ ب ر ر١٢ جم سا + ر١٢ (ب٢ + ر٢) - ب٢ ر٢ = ۰

سے صحیح طور پر حاصل ہوتا ہے جہاں سورج کا نصف قطر ر١ ہے اور سورج کے مرکز سے زہرہ اور زمین کے فاصلے ب اور ر ہیں۔

مثال ۱۲۔ فرض کرو کہ زمین اور زہرہ کی شمس مرکزی زاوئی رفتاریں ﻟہ، طہ ہیں، زہرہ سے زمین کا شمس مرکزی ابتعاد لا ہے جبکہ سیّارہ طریق الشمس کو عبور کر رہا ہو، زہرہ کے مدار کا میلان صہ ہے اور سا وہ زاویہ ہے جس کی تعریف مثال ۱۱ میں کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر زہرہ کا مرور واقع ہونے کو ہو تو لا > سا (طہ - ﻟہ) \ طہ جیب صہ تقریباً۔

مثال ۱۳۔ ثابت کرو کہ اگر زہرہ کا مرور واقع ہونے کو ہو تو زہرہ کا شمس مرکزی عرض بلد > سا ہونا چاہیئے جبکہ سیارہ زمین کے ساتھ طول بلد میں اقتران میں ہو اور نیز ثابت کرو کہ نہ زمین کا شمس مرکزی ابتعاد اور نہ عقدہ سے سیارہ کا فاصلہ سا قم صہ سے متجاوز ہو سکتا ہے۔

(۳۲۶)

پندرھواں باب

ستاروں کا سالانہ اختلافِ منظر

۱۱۰ — تمہید —

چاند یا کسی سیّارہ کے فاصلہ کی تحقیق میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کافی طول والا قاعدہ کا خط حاصل ہو سکتا ہے اگر مناسب ارضی مقاموں کو سِروں کے طور پر انتخاب کیا جائے۔ اِس قاعدہ کے خط کے دونوں سِروں پر پیمائشیں عمل میں لانے سے مطلوبہ فاصلہ حاصل ہو سکتا ہے۔

اگر کسی ستارہ کے فاصلہ کی پیمائش عمل میں لانا مقصود ہو تو قاعدہ کا خط اِتنی بڑی مقدار کا ہونا چاہیئے کہ اُس کا رتبہ

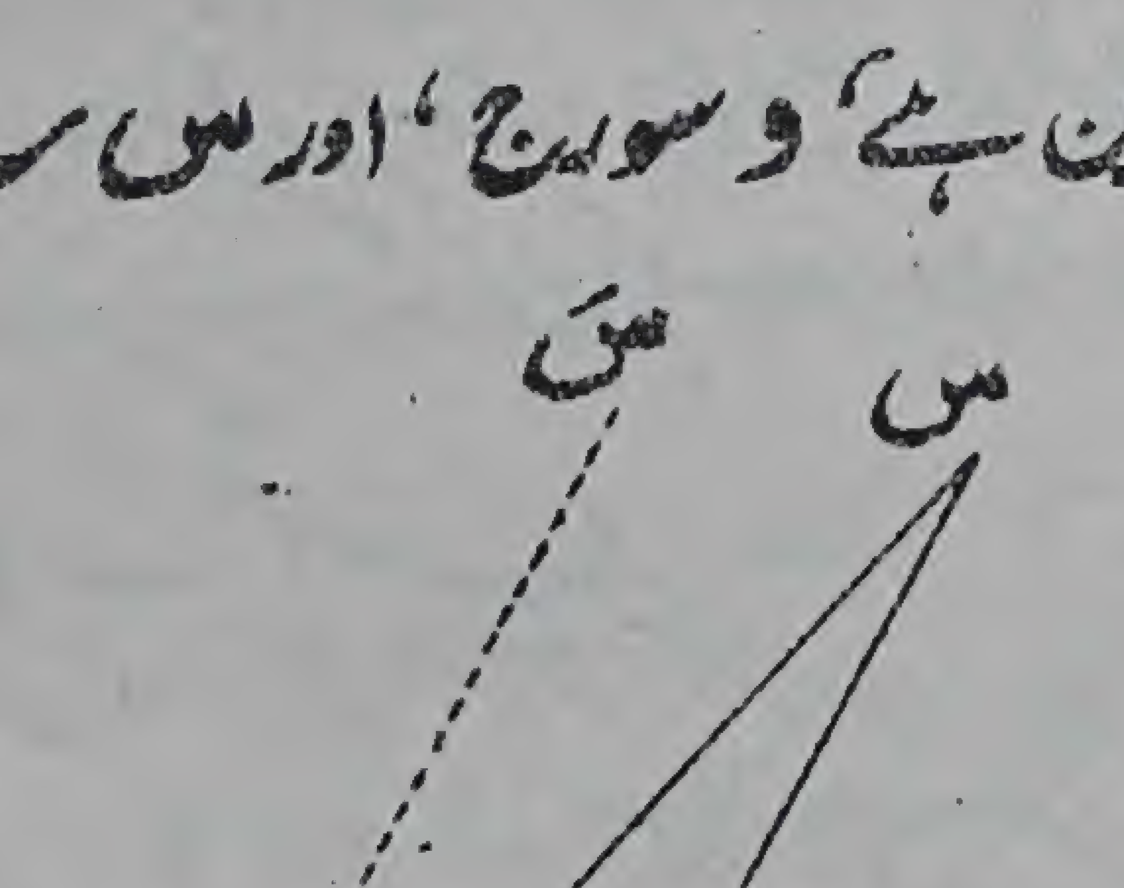
زمین کے قطر سے بہت ہی اعلیٰ ہو (دیکھو صفحہ ۷۴)۔ چنانچہ کوکبی پیمائشوں کے لیے قاعدہ کا خط زمین کے سالانہ مدار کا قطر لیا جاتا ہے جو زمین کے قطر کا

۲۰۶۲۶۵ / ۸٫۸۰ = ۲۳۴۰۰ گُنا

ہے۔ ارضی مشاہد چھ مہینوں میں زمین کے مدار کے قطر کے ایک سرے سے دوسرے سرے پر منتقل ہوتا ہے۔ قطر کے ہر سرے سے وہ ایک ستارہ کے ظاہری مقاموں کے مشاہدے کرتا ہے اور اگر ان ظاہری مقاموں کے درمیان قابل قدر فرق ہو تو اس ستارہ کا فاصلہ معیّن کرنے کے ذرائع بہم پہنچتے ہیں۔

فرض کرو کہ زمین کا اوسط فاصلہ سورج سے غہ ہے اور ستارہ کا
فاصلہ سورج سے ر ہے تو غہ / ر جیب اً کو ستارہ کا سالانہ اختلاف منظر
کہتے ہیں۔ یہ قوس کے ثانیوں کی وہ تعداد ہے جو اُس متساوی الساقین
(۳۲۷) مثلث کے زاویہ راس میں ہوتی ہے جس کا قاعدہ غہ اور جس کے
مساوی ضلعوں میں سے ہر ایک ر ہے۔ ہم اختصار کے مدنظر سالانہ
اختلاف منظر کو خہ سے تعبیر کرینگے۔

فرض کرو کہ ت (شکل ۸۱) زمین ہے، و سورج، اور س ستارہ۔ ت سَ، و س کے متوازی کھینچو۔



شکل (۸۱)

تب ت سَ ستارہ کی اصلی سمت ہے یعنی وہ سمت جس میں وہ سورج کے مرکز سے نظر آئے گا اور زاویہ سَ ت س (= ت س و) ستارہ کے ظاہری مقام پر اختلاف منظر کا اثر ہے۔ چونکہ یہ زاویہ بہت چھوٹا ہوتا ہے اس لیے ہم اس کی جیب کی بجائے خود اس زاویہ کو

رکھ سکتے ہیں۔ پس سورج سے ستارہ کے ابتعاد س ت و کو ط سے تعبیر کرنے پر قوس کے ثانیوں میں اختلاف منظر کے لیے حسب ذیل جملہ حاصل ہوتا ہے :-

زاویہ ت س و = جب ط × غہ \ رجب اً = خہ جب ط

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اختلاف منظر کا اثر ستارہ کو اپنے اوسط مقام سے سورج کی طرف ایسے زاویہ میں سے ہٹانے کا ہوتا ہے جو ستارہ اور سورج کے درمیانی زاویہ کی جیب کے متناسب ہے۔ اس لیے خہ جب ط یا سالانہ اختلاف منظر خہ اور سورج سے ستارہ کے ابتعاد ط کی جیب کا حاصل ضرب اختلاف منظری ہٹاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔

اِس کتاب کا جہاں تک تعلق ہے ہم کو کبھی اختلاف منظر کی بحث میں زمین کے مدار کی ناقصیت کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور غہ کو مستقل سمجھ سکتے ہیں۔

زمین کے مدار کے قطر سے جسکا طول ...... ۸۶ میل ہے وہ طویل ترین قاعدہ کا خط حاصل ہوتا ہے جو کبھی فاصلوں کی پیمائش کے لیے ارضی مشاہد کو میسر آسکتا ہے۔ بریں ہم ستاروں کی کثیر تعداد کے فاصلے اسقدر بڑے ہوتے ہیں کہ ان کے ظاہری مقاموں کی تبدیلیاں بمشکل قابل قدر ہوتی ہیں جب انہیں اول اس قاعدہ کے خط کے ایک سرے سے اور پھر دوسرے سرے سے دیکھا جاتا ہے۔ اب تک جو بڑے سے بڑا سالانہ اختلاف منظر معلوم ہوا ہے وہ غہ قنطوری (a Centauri.) کا ہے جو ۰٫۷۵″ ہے۔ یہ اختلاف منظر حسب ذیل فہرست میں سب سے اوپر ہے (*Annuaire public par le Bureau des Longitudes.*)

اِس فہرست سے یہ ظاہر ہوگا کہ ستاروں کے اختلاف منظروں کی تعیین بہت ہی نزاکت اور نفاست کا کام ہے۔ سماک رامح کے سالانہ اختلاف منظر سے جس کا دائری ناپ ۱\ ...... ۸۶ ہے یہ بات واضح ہوتی ہے کہ اگر اس ستارہ سے زمین کا مدار دیکھا جائے تو وہ ایک تمٹ

ستاروں کے اختلاف منظر

نام	مقدار	ص۔م سنہ ۱۹۰۰ء گھ	م	ث	میل سنہ ۱۹۰۰ء	ذاتی حرکت	سالانہ اختلاف منظر	سورج کے فاصلہ کا دس لاکھ گنا	نوری سال
ع قنطورس	۰٫۶۲	۱۴	۳۲	۴۸	−۶۰° ۲۵′	″۳٫۶۷	″۰٫۷۵ ± ″۰٫۰۱	۰٫۲۸	۴٫۴
۲۱۱۸۵ لالاند	۷٫۵	۱۰	۵۷	۵۳	+۳۶° ۳۸′	۴٫۷۳	۰٫۴۸ ± ۰٫۰۲	۰٫۴۳	۶٫۸
۶۱ دجاجہ	۴٫۸	۲۱	۲	۲۵	+۳۸° ۱۶′	۵٫۲	۰٫۳۷ ± ۰٫۰۲	۰٫۵۶	۸٫۸
شعریٰ	−۱٫۴	۶	۴۰	۴۴	−۱۶° ۳۵′	۱٫۳	۰٫۳۷ ± ۰٫۰۱	۰٫۵۶	۸٫۸
قرطبہ منطقہ ۵ گ	۸٫۵	۵	۷	۴۲	−۴۴° ۵۹′	۸٫۷	۰٫۳۱	۰٫۶۷	۱۱
کلب اصغر	۰٫۵	۷	۳۴	۴	+۵° ۲۹′	۱٫۳	۰٫۳۱	۰٫۶۹	۱۱
الطائر	۰٫۹	۱۹	۴۵	۵۴	+۸° ۳۶′	۰٫۷	۰٫۲۸ ± ۰٫۰۲	۰٫۷۴	۱۲
الدبران	۱٫۱	۴	۳۰	۱۱	+۱۶° ۱۹′	۰٫۲	۰٫۱۷ ± ۰٫۰۲	۱٫۴	۲۲
عیوق	۰٫۲	۵	۹	۱۸	+۴۵° ۵۴′	۰٫۴	۰٫۱۲ ± ۰٫۰۲	۱٫۷	۲۷
نسر واقع	۰٫۱	۱۸	۳۳	۳۳	+۳۸° ۴۱′	۰٫۴	۰٫۱۲ ± ۰٫۰۲	۱٫۷	۲۷
۱۸۳۰ گردم برج	۶٫۴	۱۱	۴۷	۳۳	+۳۸° ۲۶′	۷٫۰	۰٫۱۰ ± ۰٫۰۲	۲٫۰	۳۳
قطب تارہ	۲٫۱	۱	۲۲	۱۳	+۸۸° ۴۶′	۰٫۰	۰٫۰۷ ± ۰٫۰۲	۳٫۰	۴۷
سماک رامح	۰٫۲	۱۴	۱۱	۶	+۱۹° ۴۲′	۲٫۳	۰٫۰۲۴	۸٫۷	۱۴۰
ع حمالہ	۲٫۲	۲۲	۱	۵۶	−۴۷° ۲۷′		۰٫۰۱۵	۱۴٫۰	۲۲۰

نصف قطر کے اُس دائرے سے بڑا نظر نہیں آئے گا جس کو ۲۰۶۳۰ میل کے فاصلہ سے دیکھا گیا ہو۔ ظاہر ہے کہ تقریباً ۱۶۳۰ میل دُور کسی شئے کے (۳۲۸)

(۳۲۹) فاصلہ کو مشاہدوں سے متعین کرنا جو صرف دو فٹ لمبے قاعدہ کے خط کے سروں سے کئے گئے ہوں بہت نازک معاملہ ہے۔ بڑا احتیاط مشاہدوں کی کثیر تعداد کو جن میں مشاہدے کی خطائیں تدریجاً ساقط کی گئی ہوں اکٹھا کر کے اِن پر غور کرنے سے ہی کامیابی ہو سکتی ہے۔

ستاروں کے مقاموں کے بہترین نصف النہاری مشاہدے بھی کو کبی اختلاف منظر کی تعیین کے لیے بہت کم کام دیتے ہیں۔ اِس مقصد کے لیے ہمیں اُس جماعت کے مشاہدوں کی ضرورت ہے جنہیں "فرقی" کہا جاتا ہے۔ اس اصطلاح کا مفہوم اب سمجھایا جائے گا۔

اگر کوئی ستارہ لا انتہا بڑے فاصلے پر ہوتا تو اِس کا اختلاف منظری ہٹاؤ صفر ہوتا اور اس لیے اُس کا مقام وہی ہوتا جب اُسے زمین کے مدار کے کسی نقطہ سے دیکھا جاتا۔ ستاروں کی ایک بڑی اکثریت کا اختلاف منظر اسقدر چھوٹا ہے کہ وہ ہماری پیمائشوں پر اثر انداز نہیں ہوتا۔ ایسی کسی صورت میں اگر ہم اختلافِ منظر کو صفر لیں تو اس سے کوئی قابل قدر خطا پیدا نہیں ہو گی۔ اب ہمیں ایسے مشاہدوں پر غور کرنا ہے جن میں ایک ستارے کے محل کا مقابلہ جو اختلاف منظر سے متاثر ہو ایک ایسے ستارے سے کیا جاتا ہے جو اختلاف منظر نہیں رکھتا لیکن جو اس طرح واقع ہوتا ہے کہ کرۂ سماوی پر ان دو ستاروں کے ظِل ایک دوسرے سے بہت قریب نظر آتے ہیں۔ یہ دو ستارے کافی طور پر قریب نظر آنے چاہئیں تاکہ دُوربین کے ایک ہی میدان نظر میں ہوں۔ تب ہم اِن دو ستاروں کی فرقی پیمائشیں عمل میں لاتے ہیں۔ اِس طریقے سے بعض خطائیں مثلاً وہ جو آلہ کو موڑنے سے پیدا ہوتی ہیں اور نیز دیگر بہت سی خطائیں ساقط ہو جاتی ہیں کیونکہ وہ دونوں ستاروں کو برابر متاثر کرتی ہیں۔ انعطاف کے اثر کی رعایت بھی صحت کے ساتھ رکھی جا سکتی ہے کیونکہ انعطاف میں بے قاعدگیاں دونوں ستاروں کو مساوی طور پر متاثر کرتی ہیں اور اس لیے وہ فرقی پیمائش میں سے خارج ہو جائیں گی۔ اگر دوسرا ستارہ بھی اسقدر

قریب ہو کہ اس کا اختلافِ منظر قابل قدر ہے تو اس طریقے سے جو نتیجہ حاصل ہوگا وہ ان دو ستاروں کے اختلاف منظروں کا فرق ہوگا۔

مُشاہدے جو کیے جاتے ہیں وہ بالعموم اِن دو ستاروں کے درمیان فاصلہ اور زاویہ محل سے متعلق ہوتے ہیں۔ یہ مُشاہدے کم از کم ایک سال کے دوران میں جتنے موقعوں پر ممکن ہو دُہرائے جاتے ہیں اور ان سے وہ مواد ملتا ہے جس کے ذریعے، ضروری تحویل کے بعد اختلافِ منظر متعین ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر ایک ستارے کا سالانہ اختلافِ منظر خہ ہو اور اگر ن سال میں اِس ستارے سے نور زمین تک پہنچے تو ثابت کرو کہ ن = ۱۳\|۴ خہ۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ نور کو ۶۱ دجاجہ سے (جس کا اختلاف منظر ۳۷ء۰″ ہے) زمین تک آنے میں ۸ء۸ سال لگتے ہیں۔

[دیکھو جدول صفحہ ۱۲۰]

(۳۳۰) ۱۱۱۔ سالانہ اختلاف منظر کا اثر ایک ثابت ستارہ کے ظاہری صعود مستقیم اور مَیل پر۔

اگر سورج کے مرکز سے ایک ستارہ کا فاصلہ ر ہو اور اس کے اصلی صعود مستقیم اور مَیل یعنے وہ جو سورج کے مرکز کے حوالہ سے لیے جائیں عہ، ضہ ہوں اور اگر زمین کے مرکز کے حوالہ سے متناظر محدد رَ، عَہ، ضَہ ہوں، سورج کا طول بلد ۞، اُس کا فاصلہ زمین سے غہ، اور طریق الشمس کا میلان سہ ہو تو حسب دفعہ ۹۳ ذیل کی اساسی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:

رَ جم ضَہ جم عَہ = ر جم ضہ جم عہ + غہ جم ۞ .... (۱)

رَ جم ضَہ جیب عَہ = ر جم ضہ جیب عہ + غہ جیب ۞ جم سہ ...... (۲)

رَ جیب ضَہ = ر جیب ضہ + غہ جیب ۞ جیب سہ ...... (۳)

اسلیے مس عَہ = رجم ضہ جب عہ + غہ جب ☉ جم سہ / رجم ضہ جم عہ + غہ جم ☉

لیکن چونکہ (عَہ - عہ) ایک چھوٹی مقدار ہے جس کو قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہے اِس لیے

مس عَہ = مس (عہ + عَہ - عہ) = مس عہ + قط² عہ (عَہ - عہ)

اور اِس لیے سالانہ اختلاف منظر غہ / ر کو خہ سے تعبیر کرنے سے صعود مستقیم میں حسب ذیل سالانہ اختلاف منظر حاصل ہوتا ہے

عَہ - عہ = خہ قط ضہ (جم عہ جم سہ جب ☉ - جب عہ جم ☉) ..... (۴)

(۱) اور (۲) کا مربع لیکر جمع کرنے اور یہ ذہن میں رکھنے سے کہ غہ بمقابلہ ر چھوٹا ہے حاصل ہوتا ہے

ر² جم² ضَہ = ر² جم² ضہ + ۲ ر غہ (جم ضہ جم عہ جم ☉ + جم ضہ جب عہ جم سہ جب ☉)

اور جذر المربع لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

رجم ضَہ = رجم ضہ + غہ (جم عہ جم ☉ + جب عہ جم سہ جب ☉)

اِس سے (۳) کو تقسیم کریں تو

مس ضَہ = رجب ضہ + غہ جب ☉ جب سہ / رجم ضہ + غہ (جم عہ جم ☉ + جب عہ جم سہ جب ☉)

مس ضَہ کی بجائے جملہ مس ضہ + قط² ضہ (ضَہ - ضہ) درج کرنے سے میل میں اختلاف منظر حسب ذیل حاصل ہوتا ہے

ضَہ - ضہ = خہ [جم ضہ جب سہ جب ☉ - جب ضہ جم عہ جم ☉

- جب ضہ جب عہ جم سہ جب ☉] .... (۵)

پس صعود مستقیم اور میل میں کسی ستارہ کا اختلافِ منظری ہٹاؤ، سورج کے طول بلد پر جو واحد متغیر عنصر ہے منحصر ہے اور ہم اس واقعہ کو مختصر جملے حاصل کرنے کیلئے چھ نئی مقداریں اَ، بَ، اَ، بَ، اً، بً داخل کرکے استعمال کر سکتے ہیں۔ اِن چھ مقداروں کی تعریف حسب ذیل مساواتوں سے (۳۳۱)

ہوتی ہے:

اُجم ب = جبب عہ، اَجب بَ = جبب سہ، اُجب بً = اُجبہ(بہ-ضہ)،
اُجب ب = جم عہ جم سہ، اَجم بَ = جم سہ جب عہ، اُجم بً = جم عہ جب ضہ

چونکہ اِن مقداروں میں صرف ستارہ کا محل اور طریق الشمس کا میلان شامل ہیں اِس لیے وہ سالتمام مستقل ہوتی ہیں۔ اِس لیے ضابطوں

(عہ - عَہ) جم ضہ = خہ ا جم (ب + ٥)

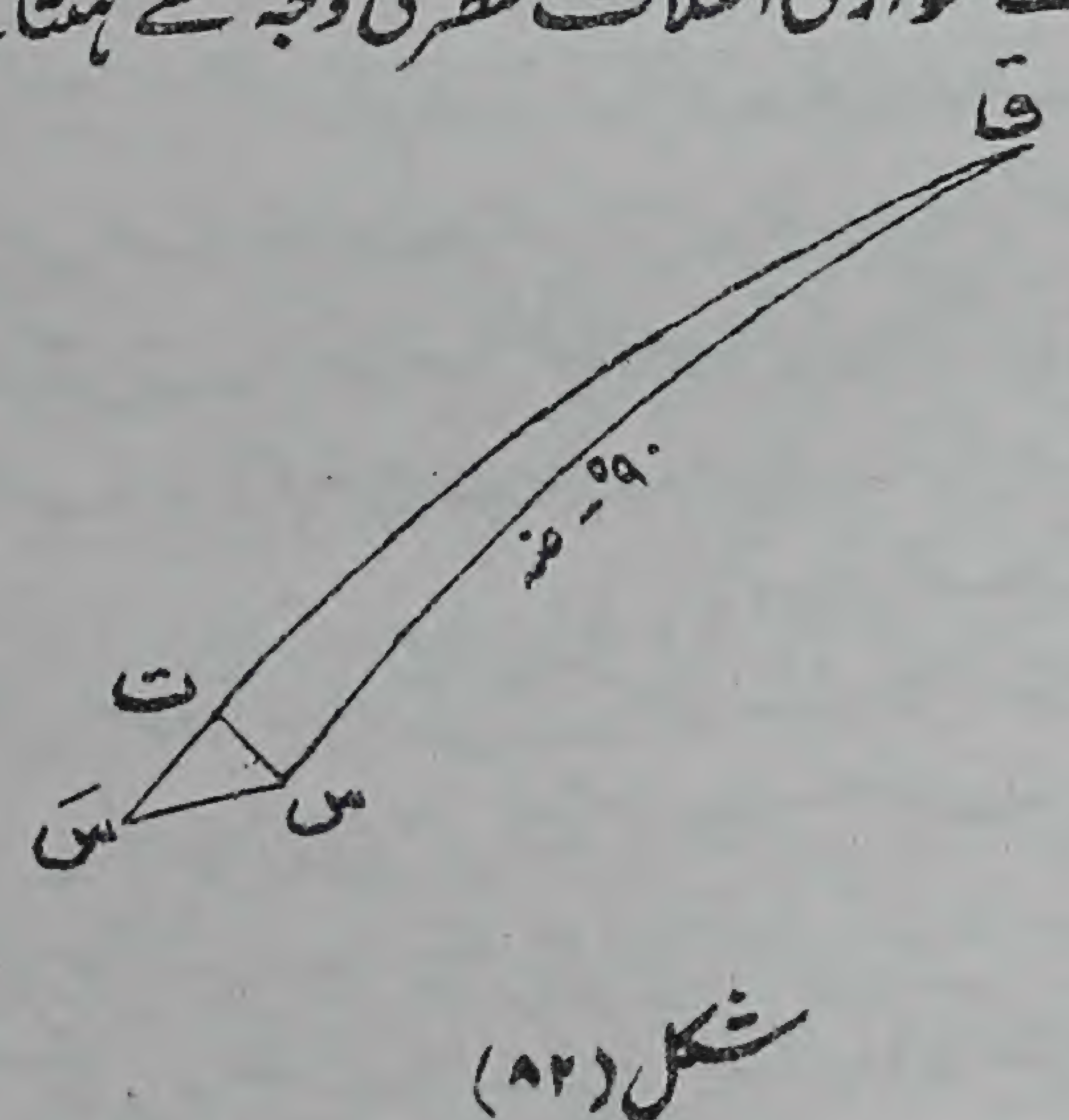
ضہ - ضَہ = خہ اُجم (بً + ٥)

سے سال کے مختلف حصوں پر اختلاف منظری اثر، ٥ کی متناظر قیمتیں داج کرکے بہت سادہ طریقہ سے محسوب کیا جا سکتا ہے۔

فرض کرو کہ س (شکل ۸۲) ستارہ کا اصلی مقام ہے، سَ وہ مقام جہاں ستارہ اختلاف منظر کی وجہ سے بظاہر نظر آتا ہے۔ س ت، سَ ق پر عمود کھینچو جہاں ق قطب ہے۔ اب ق س = ۹۰° - ضہ اور

(عہ - عَہ) جم ضہ = س ت، ضہ - ضَہ = سَ ت

جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ خہ ا جم (ب + ٥) وہ فاصلہ ہے جس میں سے ستارہ خط استواء کے متوازی اختلاف منظر کی وجہ سے ہٹتا ہے۔ اِس



شکل (۸۲)

ضابطہ سے ظاہر ہے کہ ستارہ کا ظاہری مقام جو اختلاف منظر سے متاثر ہے ایک سال کے دوران میں ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے۔ کیونکہ س ت اور س ق کو علی الترتیب لا اور ما کے محور لینے سے

لا = خہ ا جم (ب + ۝) ، ما = ۔ خہ اَ جم (بَ + ۝)

اور ۝ کے اسقاط سے سَ کا طریق ایک قطع ناقص حاصل ہوتا ہے۔

(۳۳۲) مثال ۱۔ ۱۸۷۶ء میں بڑے لوبی سحاب ۱۵ مہ کا اوسط مقام عہ = ۱۳گ ۲۴م ۳۵ث ، ضہ = + ۷ ۴۰ ۵َ تھا۔ اگر اس کا اختلاف منظر خہ تھا اور اگر اِس کا ظاہری مقام اختلاف منظر کی وجہ سے عَہ ، ضَہ تھا تو ثابت کرو کہ

(عہ - عَہ) جم ضہ = خہ [۸۷۶۹۶؛۹] جم (۝ + ۴۷° ۲' ۸")

ضہ - ضَہ = خہ [۸۴۳۹۳؛۹] جم (۝ + ۱۴۳° ۱' ۴۷")

جہاں ۝ سے سورج کا طول بلد تعبیر ہوتا ہے۔ نیز وہ تاریخیں معلوم کرو جن میں میل میں اختلاف منظر حتی الامکان بڑا ہو اور نیز صعود مستقیم میں اعظم اختلاف منظر دریافت کرو۔

نوٹ :۔ خطوط واحدانی کے اندر کے اعداد لوگارثم ہیں۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ (طول بلد میں سورج کی حرکت کو یکساں فرض کر کے) صعود مستقیم عہ کے ایک ستارہ کے مرور کے وقت میں جو تصحیح سالانہ اختلاف منظر کی وجہ سے عائد کرنی ہوگی اُس کی مقدار ایک انقلاب کے $\frac{1}{\pi^2}$ × ۳۶۵$\frac{1}{4}$ × مسا (قط سہ مس عہ) دنوں بعد بڑی سے بڑی ہوگی جہاں سہ طریق الشمس کا میلان ہے۔

اگر ستارہ کا اختلاف منظر خہ ہو تو صعود مستقیم پر اس کا اثر

عَہ - عہ = خہ قط ضہ (جم عہ جیب ۝ جم سہ - جیب عہ جم ۝)

ہے۔ اِس کے اعظم ہونے کے لیے

مس (۝ - ۹۰°) = قط سہ مس عہ

اس لیے سورج کا طول بلد انقلاب کے طول بلد سے بقدر مسا (قط سہ مس عہ) نق بڑا ہے۔ لیکن سورج فی یوم طول بلد کے ۲π \ ۳۶۵$\frac{1}{4}$ نق مرتسم کرتا ہے۔ پس مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ ایک ستارہ کے صعود مستقیم اور میل پر سالانہ

اختلاف منظر کے اعظم اثرات جملوں

خہ قط ضہ (۱ - جم^{2} عہ جب^{2} سہ)$^{\frac{1}{2}}$ ، اور خہ (جب^{2} لہ + جب^{2} سہ جم^{2} عہ)$^{\frac{1}{2}}$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں خہ سالانہ اختلاف منظر کا سر ہے، طریق الشمس کا میلان سہ، اور ستارہ کا صعود مستقیم عہ، میل ضہ، اور عرض بلد لہ ہے۔

ہ کی کسی حقیقی قیمت کے لیے (۴) کی اعظم قیمت

خہ قط ضہ (جم^{2} عہ جم^{2} سہ + جب^{2} عہ)$^{\frac{1}{2}}$ = خہ قط ضہ (۱ - جم^{2} عہ جب^{2} سہ)$^{\frac{1}{2}}$

اور (۵) کی اعظم قیمت

خہ {(جم ضہ جب سہ - جب ضہ جم سہ جب عہ)^{2} + جب^{2} ضہ جم^{2} عہ}$^{\frac{1}{2}}$

= خہ {(جب ضہ جم سہ - جم ضہ جب سہ جب عہ)^{2} + جب^{2} سہ جم^{2} عہ}$^{\frac{1}{2}}$

= خہ (جب^{2} لہ + جب^{2} سہ جم^{2} عہ)$^{\frac{1}{2}}$

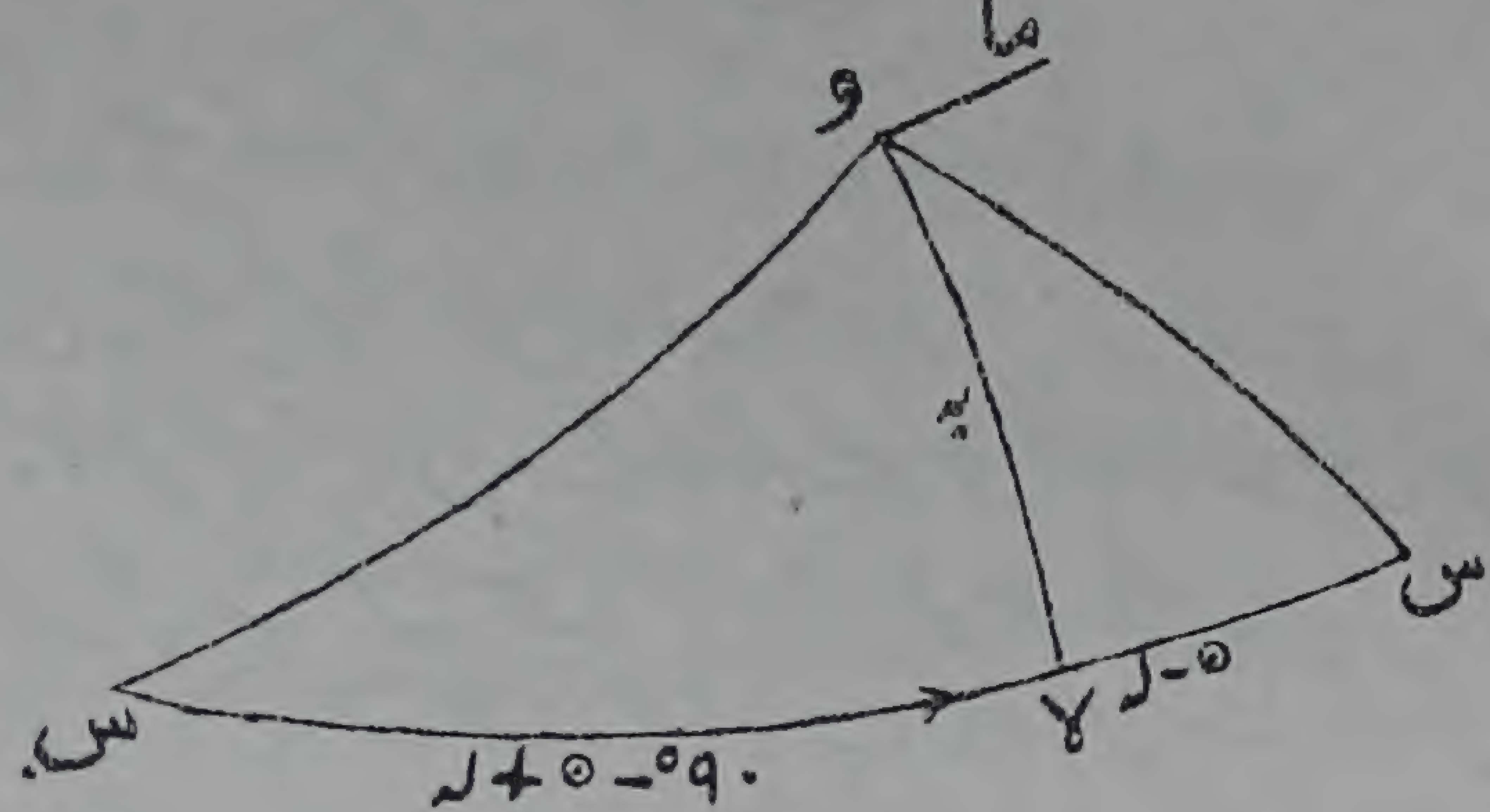
ہے۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ ایک ستارہ کے سالانہ اختلاف منظر کا عام اثر اس چھوٹے قطع ناقص میں اس کے محل کو بدلنے کا ہوتا ہے جو وہ ضلالت کی وجہ سے سالانہ مرتسم کرتا نظر آتا ہے، نیز کسی دئے ہوئے ستارہ کے لیے معلوم کرو کہ کس طرح یہ تبدیلی سال کے وقت کے ساتھ متغیر ہوتی ہے۔

[Math. Trip.]

فرض کرو کہ س (شکل ۸۳) سورج ہے، س' ایک نقطہ ہے جو طریق الشمس پر سورج سے ۹۰° پیچھے ہے۔ فرض کرو کہ و ایک ستارہ ہے جس کے محدد لہ، بہ ہیں اور جس کا اختلاف منظر خہ ہے۔ خط و لا، س س' پر عمود ہے۔ فرض کرو کہ و ما، و لا پر عمود ہے۔ ان محوروں کے لحاظ سے و پر کے ایک ستارہ کے محدد لا، ما

معلوم کرنا ہے جبکہ ستارہ اختلاف منظر اور ضلالت دونوں سے متاثر ہو۔ یہ تسلیم کرلیا (۳۴۳)
گیا ہے کہ ضلالت کا مستقل ک ہے اور یہ کہ خہ\ک کے مربع اور اعلیٰ قوتیں نظر انداز
ہو سکتی ہیں۔



شکل (۸۳)

چونکہ ضلالت ستارہ کو و س. پر فاصلہ ک جب و س. تک متحرک کرتی ہے اور اختلاف منظر ستارہ کو س کی طرف فاصلہ خہ جب و س میں سے ہٹاتا ہے اس لیے

لا = ک جب یہ جب (☉ - لہ) + خہ جب یہ جم (☉ - لہ)،

ما = - ک جم (☉ - لہ) + خہ جب (☉ - لہ)

اِن کو لکھا جا سکتا ہے:

لا = ک جب یہ جب (☉ + خہ\ک - لہ)،

ما = - ک جم (☉ + خہ\ک - لہ)

اسیلیے لا² قم² یہ + ما² = ک²

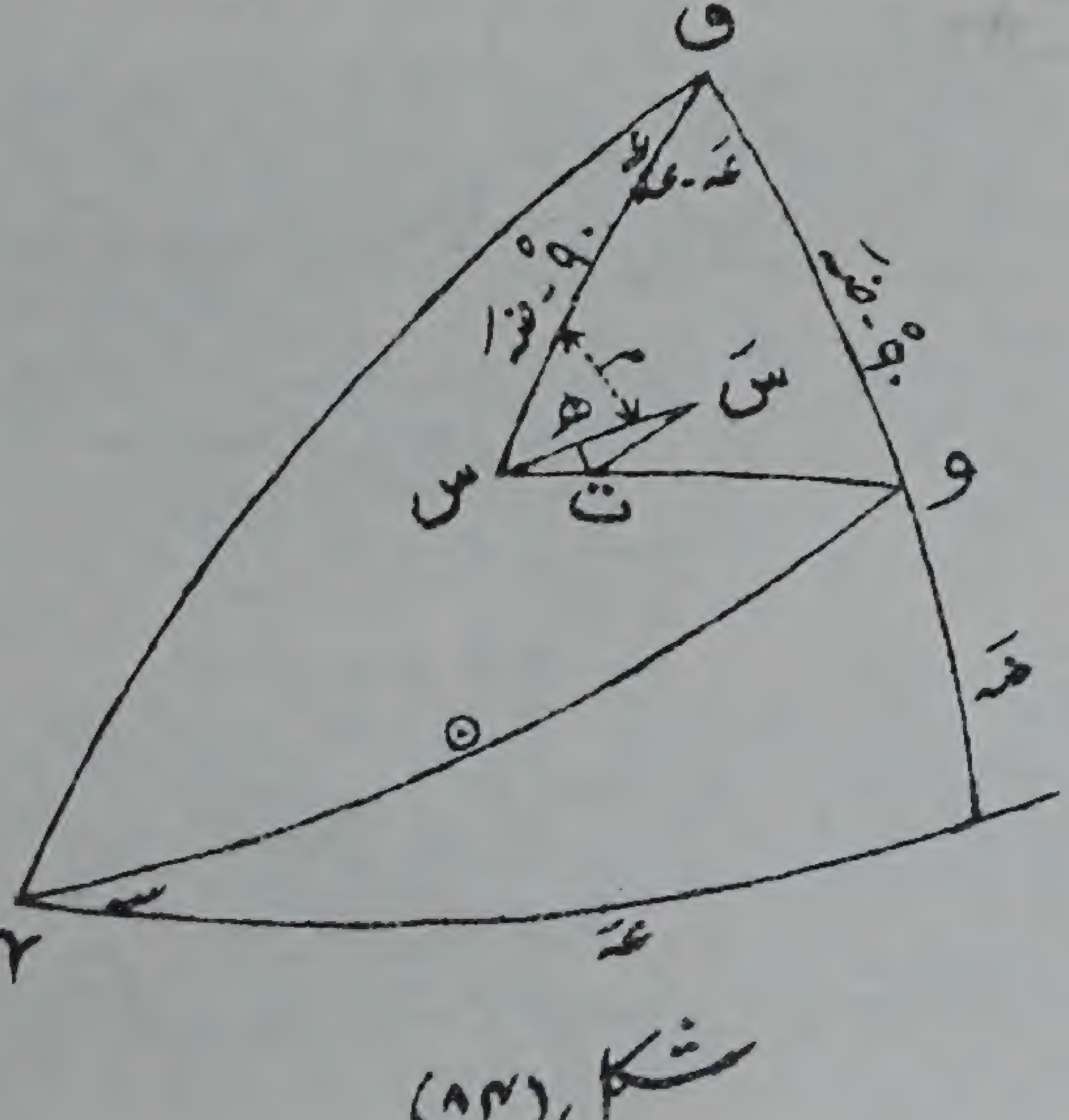
اِس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اختلاف منظر کو حساب میں شریک رکھنے کا صرف یہ اثر ہوتا ہے کہ ضلالت کے قطع ناقص پر ستارہ کا ظاہری مقام ☉ کے متناظر نقطہ سے اُس نقطہ تک بدلتا ہے جو ☉ + خہ\ک کے متناظر ہے۔

۱۱۲۔ایک ستارہ س کے اختلاف منظر کا اثر ایک متصلہ ستارہ کے فاصلہ اور زاویہ محل پر۔

شکل ۸۴ میں فرض کرو کہ و سورج ہے، ۲ و طریق الشمس، اور ق قطب شمالی۔ فرض کرو کہ س کا صعود مستقیم اور میل عہ، ضہ ہیں، سورج کے عَہ، ضَہ۔ فرض کرو کہ س کے لحاظ سے سَ کا فاصلہ س سَ، ف سے اور زاویہ محل ق س سَ، م سے تعبیر ہوتے ہیں۔

س پر اختلاف منظر خہ کا اثر یہ ہے کہ وہ اِس ستارہ کو اِس کے اوسط محل س سے سمت س و میں ایک ایسے ظاہری مقام پر لیجاتا ہے کہ س ت = خہ جب س و۔

اِن دو ستاروں کا ظاہری فاصلہ ت سَ ہے اور یہ بڑی حد تک ھ سَ کے مساوی ہے اگر ت ھ، س سَ پر عمود ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ س ھ جسے ہم فَ سے تعبیر کرینگے اختلاف منظر کے اُس اثر کی پیمائش کرتا ہے جو ستاروں کے درمیانی فاصلہ ف پر ہے۔ (۴۳۴)



شکل (۸۴)

چونکہ اختلاف منظر سمت سَ س کو سَ ت میں تبدیل کرتا ہے اسلیے زاویہ س سَ ت کا فی تقرب تک س کے لحاظ سے سَ کے زاویہ محل کی تبدیلی ہے۔

ظاہری فاصلہ پر اختلاف منظر کا اثر حسب طریقہ ذیل محسوب کیا جاتا ہے:-

فَ = س ھ = جب س ت جم ت س ھ

= خہ جب س و جم (ق س و - م)

لیکن جب س و جب ق س و = جم ضہ جب (عہَ - عہ)

جب س و جم ق س و = جب ضہَ جم ضہ

- جم ضہَ جب ضہ جم (عہَ - عہ)

اور اس لیے فاصلہ میں اختلاف منظر فَ کے لیے حاصل ہوتا ہے

فَ = خہ جب م جم ضہَ جب (عہَ - عہ)

+ خہ جم م {جب ضہَ جم ضہ - جم ضہَ جب ضہ جم (عہَ - عہ)}

اسکو سورج کے طول بلد کی رقوم میں بیان کیا جائے تو چونکہ

جم ٥ = جم ضہَ جم عہَ ،

جم سہ جب ٥ = جم ضہَ جب عہَ ،

جب سہ جب ٥ = جب ضہَ

اسلیے فَ = خہ جم ٥ (- جم عہ جب ضہ جم م - جب عہ جب م)

+ خہ جب ٥ (- جب عہ جب ضہ جم سہ جم م

+ جم ضہ جب سہ جم م + جم عہ جم سہ جب م)

اسی طرح ہم ت سَ س یا مَ کو محسوب کر سکتے ہیں جہاں مَ وہ تصحیح ہے جو س سے سَ کے مشاہدہ کردہ زاویہ محل پر عائد کرنی ہوگی (۳۳۵)

تاکہ وہ زاویہ محل حاصل ہو جو سورج سے دیکھنے کی صورت میں نظر آتا

مَ = ت سَ س = خہ جب س و جب (ق س و - م) قم ف

= خہ جم ٥ (- جم م جب عہ + جب م جم عہ جب ضہ) قم ف

+ خہ جب ٥ (+ جم عہ جم سہ جم م + جب عہ جب ضہ جم سہ جب م

- جم ضہ جب سہ جب م) قم ف

چونکہ اِن ضابطوں میں صرف ہ متغیر مقدار ہے اس لیے اُن کو بہت زیادہ سہولت بخش شکل میں بعض امدادی مقداروں ص، ص، صَ، صَ کو داخل کر کے رکھا جا سکتا ہے - اِن مقداروں کی تعریف میں م کی تقریبی قیمت کافی ہوگی چنانچہ

ص جم ص = - جم عہ جب ضہ جم م - جب عہ جب م،

ص جب ص = - جب عہ جب ضہ جم سہ جم م + جم ضہ جب سہ جم م + جم عہ جم سہ جب م

صَ جم صَ = - جم م جب عہ + جب م جم عہ جب ضہ،

صَ جب صَ = + جم عہ جم سہ جم م + جب عہ جب ضہ جم سہ جب م - جم ضہ جب سہ جب م

اِن کو درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

فَ = خہ ص جم (ہ - ص)،

مَ = خہ صَ جم (ہ - صَ) قم ف

جن میں فَ، مَ، اور خہ قوس کے ثانیوں میں بیان کیے گئے ہیں۔

مثال ۱ - سُرخ تاروں (عہ = ۱۵گ ۵م ۱ث، ضہ = +۳۹° ۷ً۵) کے کیٹلاگ[1] میں ستارہ ۱۸۲ء پر اختلاف منظر خہ کا اثر بلحاظ ایک متصلہ ستارہ کے محسوب کرو جو اختلافِ منظر نہیں رکھتا اور جو فاصلہ ۹۲ ۳ً اور زاویہ محل ۳۴۰.۴° ۵۹ً پر ہے۔

فاصلہ میں اختلاف منظر

[۹٫۹۶۳۸۱] خہ جم (ہ - ۸۵° ۵۲ً) ثانئے

ہے اور زاویہ محل میں اختلافِ منظر

[۲٫۶۸۹۳۶] خہ جم (ہ + ۱۳° ۵۲ً) ثانیہ ہے -

مثال ۲ - ثابت کرو کہ بتاریخ ۹ ـ جنوری ۱۸۷۶ء جبکہ ہ = ۲۸۹° ۲۵ً مشاہدہ کردہ فاصلۂ (دیکھو پچھلی مثال) میں تصحیح ۰٫۸۴۳- × خہ عائد کرنی ہوگی تاکہ وہ اختلاف منظر کے اثر سے پاک ہو اور مشاہدہ کردہ زاویہ محل میں تصحیح ۲۶۸ × خہ عائد

[1] Schjellern's Catalogue

کرنی ہوگی ۔
مثال ۳ ۔ فرض کرو کہ ایک ستارہ کا صعود مستقیم اور میل عہ ، ضہ ہیں اور اُس کا سالانہ اختلاف منظر خہ ہے ۔ فرض کرو کہ ایک متصلہ ستارہ کا مشاہدہ کردہ زاویہ محل اور فاصلہ م ، ف ہیں اور یہ ستارہ اختلاف منظر نہیں رکھتا ۔ اگر غہ ، طہ ، لہ ، مہ امدادی مقداریں ہوں جن کی تعریف مساواتوں

غہ جم طہ = جب ضَہ ، لہ جم مہ = جم ضَہ جب (عَہ - عہ) ،

غہ جب طہ = جم ضہ جم (عَہ - عہ) لہ جب مہ = غہ جم (طہ + ضہ)

(۳۳۶) سے کی گئی ہو تو اختلافِ منظر کی وجہ سے جو تصحیحیں مشاہدہ کردہ زاویہ محل اور فاصلہ پر عائد کرنی ہونگی تاکہ وہ زاویہ محل اور فاصلہ حاصل ہوں جو سورج سے دکھائی دیتے ہیں حسب ذیل ہیں :۔

خہ لہ جم (م + مہ) قم ف اور خہ لہ جب (م + مہ)

بشرطیکہ ہم زمین کے مدار کو دائرہ مان لیں ۔
مثال ۴ ۔ اگر مشاہدے اسوقت کئے جائیں جبکہ ستارہ سورج سے ۹۰° ہو تو ثابت کرو کہ

جب (طہ + ضہ) = ۰ ، اور لہ^{۲} = ۱

اس لیے جملے ہو جاتے ہیں

اختلاف منظر فاصلہ میں ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ لا ر جب (م + مہ) ،
" زاویہ محل میں ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ لا ر جم (م + مہ) قم ف

جہاں مہ ،

جب مہ = جب ضَہ \ جم ضہ ، جم مہ = جم ضَہ جب (عَہ - عہ)

سے متعین ہوتا ہے ۔
مثال ۵ ۔ ایک ستارہ جس کا محل عہ = ۱۶° ۳۳ََ ، ضہ = +۴۶° ۵۱َ اور اختلاف منظر خہ ہے ایک دوسرے ستارہ سَ (جو بغیر اختلافِ منظر کے فرض کیا گیا ہے) سے متصل ہے جس کا زاویہ محل ۹۱° ۲ ۳۲َ ہے ۔ اِن دو ستاروں کا فاصلہ بتاریخ ۲۸ فروری ۱۸۷۵ء پیمائش کیا گیا جبکہ سورج کے ظاہری محدد عہَ =

۲۲° ۶ہَ ۲۰ً ، ضہَ = - ۷° ۸ہَ ۱۹ً تھے۔ ثابت کرو کہ ۹۸۲ء۱ + خہ وہ
تصحیح ہے جو مشاہدہ کردہ فاصلہ پر عائد کرنی ہوگی تاکہ وہ فاصلہ حاصل ہو جو زمین کی بجائے سورج سے دیکھنے پر معلوم ہوتا۔

۱۱۳ — ایک ستارہ کے عرض بلد اور طول بلد میں اختلافِ منظر

اگر ایک ستارے کا شمس مرکزی عرض بلد، طول بلد، اور فاصلہ بہ، لہ، ر ہوں اور اس کا سالانہ اختلاف منظر خہ ہو اور اگر اسی ستارہ کا ارض مرکزی عرض بلد، طول بلد، اور فاصلہ بہَ، لہَ، رَ ہوں جبکہ سورج کا طول بلد ۵ ہو اور اس کا فاصلہ غہ تو دفعہ ۱۱۱ کی مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) میں سہ = ۰ رکھنے اور ضہ، عہ، ضہَ، عہَ کی بجائے بہ، لہ، بہَ، لہَ لکھنے سے

رَ جم بہَ جم لہَ = ر جم بہ جم لہ + غہ جم ۵ .... (۱)
رَ جم بہَ جیب لہَ = ر جم بہ جیب لہ + غہ جیب ۵ .... (۲)
رَ جیب بہَ = ر جیب بہ .... (۳)

اِن سے ہم حاصل کرتے ہیں

رَ جم بہَ جیب (لہَ - لہ) = غہ جیب (۵ - لہ)

اس لیے اگر خہ = غہ\ر کے مربع اور اعلیٰ تر قوتیں نظر انداز ہو سکیں تو

لہَ - لہ = خہ قط بہ جیب (۵ - لہ)

(۱) اور (۲) سے ہم حاصل کرتے ہیں

رَ جم بہَ = ر جم بہ + غہ جم (۵ - لہ)

اور اِس لیے (۳) کے ساتھ اِس کو لینے سے

بہَ - بہ = - خہ جیب بہ جم (۵ - لہ)

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر اختلاف منظر خہ کے ایک ستارہ کا شمس مرکزی عرض بلد بہ ہو اور طول بلد لہ تو اِن کے جواب میں ارض مرکزی مقداریں حسب ذیل ہیں:

{ بہ - خہ جب بہ جم (ھ - لہ) } اور { لہ + خہ قط بہ جب (ھ - لہ) }

(۳۳۷) ہم ایک دوسرے طریقہ پر ستارہ بہ، لہ کے فاصلہ اور زاویہ محل پر اختلاف منظر کے اثر کی تحقیق دوسرے ستارہ بہ، لہ کے لحاظ سے جسکے اختلاف منظر کو صفر سمجھا گیا ہو کر سکتے ہیں۔ کروی مثلث ا ب ج پر غور کرو جس کا ا، (بہ، لہ) ہے؛ ب، (بہ، لہ) ہے اور ج، طریق الشمس کا قطب ہے۔ فرض کرو کہ نقطے ا، ج ثابت ہیں لیکن نقطہ ب میں خفیف ہٹاؤ واقع ہوتا ہے، تب مف ب = . اور صفحہ ۲۰ حصہ اول کے ضابطوں (۱) سے

مف ا = جم ب مف ج + ھ جب ب جب ج مف ا،

مف ج = جم ب مف ا + ھ جب ا جب ب مف ج

جہاں ھ = جب ا \ جب ا۔ اس لیے مف ج کو ساقط کرنے اور مف ا کے لیے حل کرنے سے

مف ا = - جب ا قم ج جم ب مف ج + قم ج جب ب مف ا

اگر ب پر کے ستارہ کا ہٹاو اختلاف منظر کی وجہ سے ہے تو جیسا کہ اوپر ثابت کیا گیا

مف ج = مف لہ = خہ قط بہ جب (ھ - لہ)

اور　　مف ا = - مف بہ = خہ جب بہ جم (ھ - لہ)

جہاں　بہ = ۹۰° - ا اور اس لیے

زاویہ محل میں ہٹاؤ یا مف ا،

خہ قم ج { - جم ب جب (ھ - لہ) + جب ب جب بہ جم (ھ - لہ) }

ہے اور فاصلہ میں ہٹاؤ یا مف ج

خہ { جب بہ جم ب جم (ھ - لہ) + جب ب جب (ھ - لہ) }

ہے جہاں ب، ج، مثلث

ب ج = ۹۰° - بہ، ا ج = ۹۰° - بہ، زاویہ ا ج ب = لہ - لہ.

سے متعین ہوتے ہیں۔

اِن نتیجوں کی تصدیق اس طرح ہو سکتی ہے کہ اختلاف منظر کی وجہ سے جو کُل ہٹاؤ پیدا ہوتا ہے اُس کے مربع کو خہ^2 سے تقسیم کریں تو خارج قسمت
(جب ج مف ا)^2 + (مف ل)^2 اور (مف بہ)^2 + (جم بہ مف لہ)^2
دونوں ہونا چاہئے اور اِن میں سے ہر ایک جب^2(ہ - لہ) + جب^2 بہ جم^2 (ہ - لہ) میں تحویل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ دو ستاروں کے عرض بلد بہ اور بہ. ہیں اور ان کے طول البلد کا فرق ل ہے۔ دوسرے ستارہ کا اختلاف منظر ناقابل التفات ہے اور پہلے کا خہ ہے۔ ثابت کرو کہ اُس قوس کے انتہائی محلوں کا درمیانی زاویہ جو انہیں ملاتی ہے تقریباً

$$\frac{۲\ \text{خہ}\ \sqrt{\{\text{جب}^2(\text{بہ} - \text{بہ.}) + \text{جب ۲ بہ جب ۲ بہ. جب}^2 \tfrac{1}{2}\ \text{ل}}}{\text{جب}^2(\text{بہ} - \text{بہ.}) + \text{جب ۲ بہ جب ۲ بہ. جب}^2 \tfrac{1}{2}\ \text{ل} + \text{جم}^2\ \text{بہ جم}^2\ \text{بہ. جب}^2\ \text{ل}}$$

ہے۔

[Math: Trip. 1.]

چونکہ اختلاف منظر کی وجہ سے زاویہ محل میں ہٹاؤ
خہ قم ج {- جم ب جب (ہ - لہ) + جب ب جب بہ جم (ہ - لہ)}
ہے اِس لیے اِس کی انتہائی قیمتیں حسب ذیل ہونی چاہئیں

$$\pm\ ۲\ \text{خہ قم ج}\ (\text{جم}^2\ \text{ب} + \text{جب}^2\ \text{بہ جب}^2\ \text{ب})^{\frac{1}{2}}$$

(۲۴۸) اور اُس مثلث میں جس کے ضلع ۹۰° - بہ، ۹۰° - بہ. ہیں اور درمیانی زاویہ ل ہے وہ زاویہ جو ۹۰° - بہ. کے مقابل ہے ب ہے اور ج وہ ضلع ہے جو ل کے مقابل ہے، اِس لیے ب، ج ساقط ہو سکتے ہیں اور مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ ستارہ سَ سے جس کا کوئی اختلاف منظر نہیں ہے ستارہ س کے ظاہری فاصلہ میں جس کا اختلاف منظر خہ ہے بڑے سے بڑا تغیر

$$۲\ \text{خہ}\ (\text{جب}^2\ \text{بہ جم}^2\ \text{ب} + \text{جب}^2\ \text{ب})^{\frac{1}{2}}$$

ہے جبکہ بہ، س کا عرض بلد ہو اور جہاں ب وہ زاویہ ہے جو س پر سَ اور طریق الشمس کے کسی ایک قطب کے محاذی بنتا ہے۔

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ اُن سمتوں کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام جن میں ایک ستارہ کرہ سماوی پر سالانہ ضلالت کی وجہ سے اور سالانہ اختلاف منظر کی وجہ سے ہٹتا ہے

$$\text{جب } ۲\,(\text{ه} - \text{لہ})\ \text{جم}^۲\ \text{بہ}\ \left[۴\ \text{جب}^۲\ \text{بہ} + \text{جم}^۴\ \text{بہ}\ \text{جب}^۲\ ۲\,(\text{ه} - \text{لہ}) \right]^{-\frac{۱}{۲}}$$

ہے جہاں ستارہ کا عرض بلد بہ اور طول بلد لہ ہے اور سورج کا طول بلد ہ ہے۔

[Coll. Exam.]

۱۱۴*۔ ایک ستارہ کا اختلاف منظر مشاہدہ کے ذریعہ معلوم کرنا۔

فرض کرو کہ ایک ستارہ س ہے جس کا اختلاف منظر خہ ہے اور دوسرا ستارہ سَ ہے جس کا کوئی اختلاف منظر نہیں ہے۔ اب ہم یہ بتائینگے کہ سَ اور س کے درمیانی فاصلہ اور زاویہ محل کا مسلسل مشاہدہ کر کے کس طرح خہ کی قیمت کو متعین کیا جا سکتا ہے۔ اگر ہم یہ مان سکتے کہ ستاروں س اور سَ میں سے ایک یا دونوں میں کسی ذاتی حرکت کی وجہ سے سوال میں کوئی پیچیدگی نہیں ہے اور نیز یہ تسلیم کر سکتے کہ ہمارے مشاہدوں کی خطائیں بمقابلہ مطلوبہ مقدار کے ناقابل التفات ہیں تو فاصلہ یا زاویہ محل کسی ایک کے مُشاہدوں کے ذریعہ اختلاف منظر کی تعیین بہت ہی سادہ معاملہ ہوتا۔

فرض کرو کہ س سے سَ کا فاصلہ جبکہ سورج سے دیکھا جائے ف ہے تو مشاہدہ کردہ فاصلہ ف ۔ فَ ہے جہاں

$$\text{فَ} = \text{خہ}\ \text{ص}\ \text{جم}\,(\text{ه} - \text{صَ})$$

جس میں ص، صَ معلوم ہیں کیونکہ وہ دفعہ ۱۱۲ میں مندرجہ ضابطوں کے ذریعہ ستاروں کے کسی مخصوص زوج کے لیے ہمیشہ کے لیے معلوم کیے جا سکتے

ہیں۔ فرض کرو کہ فاصلے کے دو مشاہدے ف_1 اور ف_2 کیے گئے ہیں جبکہ سورج کے طول بلد ہ_1 اور ہ_2 تھے، تو مساواتیں ملتی ہیں

$$\text{ف} = \text{ف}_1 + \text{خہ ص جم}\,(\text{ہ}_1 - \text{ص})\text{،}$$

$$\text{ف} = \text{ف}_2 + \text{خہ ص جم}\,(\text{ہ}_2 - \text{ص})$$

اس لیے اختلاف منظر کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{خہ} = \frac{\text{ف}_1 - \text{ف}_2}{\text{ص}\,\{\text{جم}\,(\text{ہ}_2 - \text{ص}) - \text{جم}\,(\text{ہ}_1 - \text{ص})\}} \qquad (۳۳۹)$$

چونکہ اس مساوات کی بائیں جانب کی سب رقمیں معلوم ہیں اس لیے خہ متعین ہو جاتا ہے۔ لیکن چونکہ مشاہدے کرنے میں خطائیں ناگزیر ہیں اس لیے $\text{ف}_1 - \text{ف}_2$ بالضرور ایک حد تک جو غیر معلوم ہے خطاوار ہوگا لیکن ہم چاہتے ہیں کہ خہ پر اِن خطاؤں کا اثر کم سے کم ہو۔ اگر خطاء مف $(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)$ کی وجہ سے خہ میں خطا مف خہ ہے تو تفرق سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{مف خہ} = \frac{\text{مف}\,(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)}{\text{ص}\,\{\text{جم}\,(\text{ہ}_2 - \text{ص}) - \text{جم}\,(\text{ہ}_1 - \text{ص})\}}$$

مف خہ کے حتی الامکان چھوٹا ہونے کے لیے مف $(\text{ف}_1 - \text{ف}_2)$ کو حتی الامکان چھوٹا ہونا چاہیے اور $\{\text{جم}\,(\text{ہ}_2 - \text{ص}) - \text{جم}\,(\text{ہ}_1 - \text{ص})\}$ کو حتی الامکان بڑا۔ پہلی شرط ہم اپنے مشاہدوں کو ممکنہ احتیاط سے کر کے پورا کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ دوسری شرط کے لیے ہم اپنے مشاہدوں کو بعض مخصوص منتخبہ تاریخوں پر کرتے ہیں۔ اگر $\text{ہ}_2 - \text{ص} = ۰°$ اور $\text{ہ}_1 - \text{ص} = ۱۸۰°$ تو مف خہ کا شمار کنندہ ۲ ص ہو جاتا ہے اور وہ اس مقدار سے بڑھ نہیں سکتا۔ پس اگر ہم اپنے مشاہدوں کے لیے وہ دو دن منتخب کریں جن کا درمیانی وقفہ چھ ماہ ہے اور جبکہ $\text{ہ}_1 = ۱۸۰° + \text{ص}$ اور $\text{ہ}_2 = \text{ص}$ تو

موافق ترین حالات ہوں گے اور حاصل ہوگا

مف خہ = مف (ف، - ف،) / ۲ ص

لیکن تمام ستاروں کے اختلاف منظر موجودہ علم کی حد تک اسقدر خفیف ہیں کہ دو مشاہدے، جیسا کہ اوپر فرض کیا گیا ہے ہمارے مقصد کے لیے ناکافی ہیں۔ ظاہر ہے کہ جہاں اختلاف منظر ایک ثانیہ کے صرف چند عشرات ہو اور جہاں مشاہدہ کی اتفاقی خطائیں بھی ایک ثانیہ کے چند عشرات ہو سکتی ہیں وہاں مشاہدوں کا ایک واحد زوج قابل اعتماد نتیجہ پیدا نہیں کر سکتا۔ کم از کم ۳۰ یا ۴۰ مشاہدے جو پورے سال پر مناسب طور پر پھیلے ہوئے ہوں ضروری ہیں اور اب ہم وہ طریقہ کار بیان کریں گے جسے اختیار کرنا ہوگا لیکن یہ ذہن نشین رہے کہ تحقیق کو عملاً جاری کرنے میں مختلف چھوٹے چھوٹے امور پر جن کا ذکر یہاں نہیں کیا گیا ہے توجہ کرنی پڑے گی۔ ہم فرض کرینگے کہ اختلاف منظر کی تعئین فاصلہ س سَ کے مشاہدوں سے کی گئی ہے اگرچہ زاویہ محل کے مشاہدوں سے بھی اس کی تحقیق کیجا سکتی ہے فرض کرو کہ ن لمحوں ت، ت، ..... پر جو ایک سال یا اس سے زائد عرصہ پر پھیلے ہوئے ہیں س اور سَ کے درمیان ظاہری فاصلوں کی پیمائشیں ف، ف، .... فن حاصل کیجا چکی ہیں۔ ہم مان لینگے کہ انعطاف کے لیے ان مشاہدوں کی تصحیح اُن اصولوں کے ذریعہ ہو چکی ہے جو دفعہ ۸۴ میں دو متصلہ ستاروں کے ظاہری فاصلہ پر انعطاف کا اثر معلوم کرنے کے لیے بیان کیے جا چکے ہیں۔

(۲۴۰) اولاً ان دو ستاروں میں سے ایک یا دونوں کی بالعموم ایک چھوٹی ذاتی حرکت ہوگی جس کی وجہ سے ان کا فاصلہ مسلسل بدل رہا ہوگا۔ چونکہ سال میں جب پر مشاہدات پھیلے ہوے ہیں ستاروں کا فاصلہ ذاتی حرکت اضافی سے کئی گنا بڑا ہوتا ہے اس لیے اس سبب سے فاصلہ میں جو تبدیلی پیدا ہوتی ہے اُس کو وقت کے متناسب سمجھنے سے کوئی قابل قدر خطا داخل نہیں ہوگی۔ اس طرح اس تبدیلی اور اختلافِ منظری تبدیلی میں

جو لازماً دوری ہے امتیاز ہو سکتا ہے۔

اگر کوئی ذاتی حرکت اضافی ہے تو ستارہ کا ظاہری راستہ وہ قطع ناقص نہ ہوگا جو صرف اختلافِ منظر سے بنتا ہے اور نہ وہ سیدھی قوس ہوگا جو صرف ذاتی حرکت سے بنتا ہے بلکہ وہ ایک لہریلی قوس ہوگا جو دونوں کا حاصل ہے۔ اکثر یہ ہوتا ہے کہ وہ تبدیلی جو ذاتی حرکت سے پیدا ہوتی ہے اُس ہٹاؤ سے بڑی ہوتی ہے جو اختلاف منظر کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے۔

ذاتی حرکت اضافی کی وجہ سے دو ستاروں کے درمیانی فاصلہ میں جو اضافہ ہوتا ہے اس کو ہم م ات سے تعبیر کرینگے جہاں م ایک مجہول مقدار ہے جو اثنائے تحقیقات میں متعین ہوگی اور ت، سال کی وہ کسر ہے جو گذشتہ یکم جنوری سے گذر چکی ہے۔

س اور سَ کے درمیان اصلی فاصلہ جو یکم جنوری کو سورج سے دیکھنے پر نظر آتا غیر معلوم ہے، اس لیے ہم اُسے لا فرض کرینگے، پس مشاہدہ کے وقت ت، پر اصلی فاصلہ

$$لا + م ات_{۱}$$

ہے۔ فرض کرو کہ وقت ت، پر سورج کا طول بلد ہ ہے، تب اختلاف منظر کے لیے تصحیح جو مشاہدہ کردہ فاصلہ ف، پر عائد کرنی ہوگی

$$خہ ص جم (ہ_{۱} - ص)$$

ہے اور اس لیے اصلی فاصلہ ہے

$$ف_{۱} + خہ ص جم (ہ_{۱} - ص)$$

اصلی فاصلہ کی ان قیمتوں کو مساوی رکھنے سے اور اسی طرح دیگر سب لمحوں کے لیے متشابہ مساواتیں بنانے سے حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{aligned} &لا + م ات_{۱} - خہ ص جم (ہ_{۱} - ص) - ف_{۱} = ۰ \\ &لا + م ات_{۲} - خہ ص جم (ہ_{۲} - ص) - ف_{۲} = ۰ \\ &\vdots \\ &لا + م ات_{ن} - خہ ص جم (ہ_{ن} - ص) - ف_{ن} = ۰ \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (۱)$$

پس ان مشاہدوں سے تین مجہول مقداروں لا، ما، خہ کے درمیان ن خطی مساواتیں ملتی ہیں، اور اسلئے جس تحقیقات سے س کا اختلاف منظر معلوم ہوتا ہے اُسی سے لا بھی معلوم ہوتا ہے جو آغاز سال پر اصلی فاصلہ س ہی ہے اور ما بھی معلوم ہوتا ہے جو وہ سالانہ شرح ہے جس سے یہ فاصلہ بڑھتا ہے۔ (۳۴۱)

بلاشبہ اِن ن مساواتوں میں سے تین مساواتیں لا، ما، خہ معلوم کرنے کے لیے کافی ہوتیں اگر ف۱، ف۲ اور ف۳ بالکل صحیح ہوتے۔ لیکن ف۱، ف۲، ف۳ میں خطاؤں کی وجہ سے یہ معلوم ہوا ہے کہ اِن مساواتوں میں سے کسی تین مساواتوں سے لا، ما، خہ کی جو قیمتیں ملتی ہیں وہ ٹھیک طور پر بقیہ مساواتوں کو پورا نہیں کرتیں۔ اس لیے ممکن صورت صرف یہ ہے کہ اِن مجہول مقداروں کی ایسی قیمتیں حاصل کی جائیں جن سے اِس پورے نظام کی معقول نمایندگی ہو جائے۔ اس کے لیے ہمیں کمترین مربعوں کا طریقہ اختیار کرنا چاہئے جس کا اصول اب ہم سمجھائیں گے۔

ہم فہ (ع) فرع سے وہ اغلبیت تعبیر کرینگے کہ کسی غیر معلوم مقدار کی پیمائش میں ایک خطا سرزد ہوئی ہوگی جو ع اور ع + فرع کے درمیان واقع ہے۔ اِس اہم تفاعل فہ (ع) کو خطاء کا تفاعل کہتے ہیں اور اس کی شکل اِس مفروضہ سے متعین ہوتی ہے کہ اگر ن پیمائشیں ا۱، ا۲، ..... ان ہوں جو یکساں حالات کے تحت کسی غیر معلوم مقدار کے لیے جیسے کہ دو ستاروں کے درمیان قوسی فاصلہ ہے عمل میں لائے گئے ہیں تو حسابی

اوسط (ا۱ + ا۲ + ... + ان) \ ن اِس مقدار کی اغلب ترین قیمت ہے۔

فرض کرو کہ اِس مجہول مقدار کی قیمت لا ہے تو خطائیں (ا۱ - لا)، (ا۲ - لا)، ..... (ان - لا) ہیں اور وہ اغلبیتیں کہ اِن میں سے ہر خطا جداگانہ سرزد ہوئی ہو علی الترتیب فہ (ا۱ - لا)، فہ (ا۲ - لا)، ..... فہ (ان - لا) ہیں۔ پس اغلبیتوں کے قوانین سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ وہ اغلبیت کہ عین یہی خطائیں سرزد ہوئی ہوں اِن سب جداگانہ اغلبیتوں کا

مسلسل حاصل ضرب ہے یعنی

$$\text{فہ}(\text{ا}_1-\text{لا})\,\text{فہ}(\text{ا}_2-\text{لا})\ldots\text{فہ}(\text{ا}_n-\text{لا})$$

ہم اِس تفاعل کو اغلبیت کا وہ جملہ سمجھ سکتے ہیں کہ لاَ مجہول مقدار کی اصلی قیمت ہے۔ اِس لیے لا کی وہ قیمت جو اس تفاعل کو اعظم بنادے مجہول مقدار کی اغلب ترین قیمت ہوگی۔

اِس جملہ کے لوکارثمی تفرقہ کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(\text{ا}_1-\text{لا})\frac{\text{فہَ}(\text{ا}_1-\text{لا})}{(\text{ا}_1-\text{لا})\,\text{فہ}(\text{ا}_1-\text{لا})}+(\text{ا}_2-\text{لا})\frac{\text{فہَ}(\text{ا}_2-\text{لا})}{(\text{ا}_2-\text{لا})\,\text{فہ}(\text{ا}_2-\text{لا})}+\ldots$$

$$+(\text{ا}_n-\text{لا})\frac{\text{فہَ}(\text{ا}_n-\text{لا})}{(\text{ا}_n-\text{لا})\,\text{فہ}(\text{ا}_n-\text{لا})}=0$$

لیکن ہمارے اساسی مفروضہ کی رُو سے لا کی یہ مساوات مساوات (۲۹۳)

$$(\text{ا}_1-\text{لا})+(\text{ا}_2-\text{لا})+\ldots+(\text{ا}_n-\text{لا})=0$$

سے مختلف نہیں ہونی چاہیئے، اِس لیے

$$\frac{\text{فہَ}(\text{ا}_1-\text{لا})}{(\text{ا}_1-\text{لا})\,\text{فہ}(\text{ا}_1-\text{لا})}=\frac{\text{فہَ}(\text{ا}_2-\text{لا})}{(\text{ا}_2-\text{لا})\,\text{فہ}(\text{ا}_2-\text{لا})}=\ldots=-2\,\text{ھ}^2$$

جس میں ھ۲ مستقل ہے۔ اِس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ خطا کا تفاعل فہ(ع)، شرط

$$\frac{\text{فہَ}(\text{ع})}{\text{ع}\,\text{فہ}(\text{ع})}=-2\,\text{ھ}^2$$

کو پورا کرنا چاہیئے اور اس لیے

$$\text{فہ}(\text{ع})=\text{ا}\,\text{قو}^{-\text{ھ}^2\text{ع}^2}$$

جہاں ا مستقل ہے جو عمل تکمل کی وجہ سے داخل ہوا ہے۔
چونکہ کوئی نہ کوئی خطا (بشمول صفر) سرزد ہونی چاہئے، اس لیے ہر خطا ء کے لیے $-\infty$ سے $+\infty$ تک اغلبیتوں کا مجموعہ اکائی ہونا چاہئے اس لیے

$$۱ = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{فہ}(\text{ء})\,\text{فرء} = \text{ا}\int_{-\infty}^{+\infty} \text{قو}^{-\text{ہ}^۲\text{ء}^۲}\,\text{فرء} = \text{ا}\,\text{ہ}^{-۱}\int_{-\infty}^{+\infty} \text{قو}^{-\text{ی}^۲}\,\text{فری}$$

اور اب اس محدود تکملہ کی قیمت معلوم کرنا ہے۔
فرض کرو کہ طول $\text{قو}^{-\text{ر}^۲}$ کے عمودوں کے سروں سے جو ایک مستوی میں کے ہر نقطہ پ پر کھڑے کئے گئے ہیں ایک سطح بنائی گئی ہے جہاں ر مستوی میں کے ایک ثابت نقطہ و سے پ کا فاصلہ ہے۔ تب اس سطح اور مستوی کے درمیان حجم

$$\int_{0}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ر}^۲} \times ۲\pi\,\text{ر} \times \text{فرر} = \pi \int_{0}^{\infty} \text{قو}^{-\text{ر}^۲}\,\text{فرر}^۲ = \pi$$

ہے۔ لیکن اگر و میں سے قائم محور لا اور ما کھینچے جائیں تو حجم

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \text{قو}^{-\text{لا}^۲-\text{ما}^۲}\,\text{فرلا}\,\text{فرما} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{قو}^{-\text{لا}^۲}\,\text{فرلا}\int_{-\infty}^{+\infty} \text{قو}^{-\text{ما}^۲}\,\text{فرما} = \pi$$

کے مساوی ثابت کیا جا سکتا ہے۔ اس لیے

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{قو}^{-\text{لا}^۲}\,\text{فرلا} = \sqrt{\pi}$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ $۱ = \text{ا}\,\text{ہ}^{-۱}\sqrt{\pi}$ اور اس لیے خطا کے تفاعل کے لیے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فہ}(\text{ء}) = \frac{\text{ہ}}{\sqrt{\pi}}\,\text{قو}^{-\text{ہ}^۲\text{ء}^۲}$$

کمترین مربعوں کا طریقہ ۔ فرض کرو کہ ایک مشاہدہ کردہ مقدار (۳۴۳

ک ہے اور ف، ق، ر مجہول ہیں جو ک کے ساتھ خطی مساوات

$$\text{ک} = \text{ا}\,\text{ف} + \text{ب}\,\text{ق} + \text{ج}\,\text{ر}$$

کے ذریعہ مربوط ہیں جہاں ا، ب، ج معلومہ مقداریں ہیں جو ہر مخصوص مشاہدہ کے حالات پر منحصر ہیں۔ تب مشاہدوں کے ایک سلسلہ $\text{ک}_{۱}$، $\text{ک}_{۲}$، $\text{ک}_{۳}$ ..... $\text{ک}_{\text{ن}}$ کے جواب میں مساواتوں کا ایک سلسلہ ملتا ہے جس کو لکھا جا سکتا ہے

$$\left.\begin{array}{l} \text{ک}_{۱} - \text{ا}_{۱}\text{ف} - \text{ب}_{۱}\text{ق} - \text{ج}_{۱}\text{ر} = ۰ \\ \text{ک}_{۲} - \text{ا}_{۲}\text{ف} - \text{ب}_{۲}\text{ق} - \text{ج}_{۲}\text{ر} = ۰ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{ک}_{\text{ن}} - \text{ا}_{\text{ن}}\text{ف} - \text{ب}_{\text{ن}}\text{ق} - \text{ج}_{\text{ن}}\text{ر} = ۰ \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (۲)$$

اگر ہمارے مشاہدے کامل ہوتے تو ف، ق، ر کی ایسی قیمتیں حاصل ہوتیں کہ $\text{ع}_{۱} = \text{ع}_{۲} = \ldots = \text{ع}_{\text{ن}} = ۰$، لیکن ایسا بالعموم نہیں ہوتا۔ وہ اغلبیت کہ یہ تمام خطائیں پیدا ہو چکی ہیں اُن اغلبیتوں کا حاصل ضرب ہے کہ خطاؤں میں سے ہر ایک جداگانہ پیدا ہو چکی ہے یعنے خطاؤں کے عین اس نظام کے وقوع کی اغلبیت

$$\left(\frac{\text{ھ}}{\sqrt{\pi}}\right)^{\text{ن}} \text{ی}^{-\text{ھ}^{۲}\left(\text{ع}_{۱}^{۲} + \text{ع}_{۲}^{۲} + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}}^{۲}\right)}$$

ہے۔ اسلیے ف، ق، ر کی اغلب ترین قیمتیں وہ ہونگی جو اس جملہ کو بڑے سے بڑا بنادیں اور اس لیے $\text{ع}_{۱}^{۲} + \text{ع}_{۲}^{۲} + \ldots + \text{ع}_{\text{ن}}^{۲}$ اقل ہونا چاہیئے۔ اسطرح ہمیں کمترین مربعوں کا طریقہ ملتا ہے جو اس امر پر مشتمل ہوتا ہے کہ ف، ق، ر کی ایسی قیمتیں معلوم کی جائیں کہ جملہ

$$(\text{ک}_{۱} - \text{ا}_{۱}\text{ف} - \text{ب}_{۱}\text{ق} - \text{ج}_{۱}\text{ر})^{۲} + (\text{ک}_{۲} - \text{ا}_{۲}\text{ف} - \text{ب}_{۲}\text{ق} - \text{ج}_{۲}\text{ر})^{۲} + \ldots + (\text{ک}_{\text{ن}} - \text{ا}_{\text{ن}}\text{ف} - \text{ب}_{\text{ن}}\text{ق} - \text{ج}_{\text{ن}}\text{ر})^{۲}$$

حتی الامکان چھوٹا ہو۔

اس طرح کے کسی مسئلہ میں کمترین مربعوں کے طریقہ کی معقولیت حسب ذیل ابتدائی طریقہ سے بھی نظر آسکتی ہے:۔

اُن مساواتوں کے جُٹ کو جو (۲) کے تمام بائیں جانبی ارکان کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں حتی الامکان پورا کرنے کیلئے ف، ق، ر کی ایسی قیمتیں ملنی چاہئیں کہ وہ بحیثیت مجموعی اصلی بقیوں $ع_۱$، $ع_۲$، .... $ع_ن$ کو اتنا چھوٹا بنائیں جتنا ممکن ہو اور تشاکل سے پتہ چلتا ہے کہ

$$ع_۱^م + ع_۲^م + \ldots\ldots + ع_ن^م$$

کے مانند کوئی جملہ اقل ہونا چاہئے۔ ظاہر ہے کہ م کو ایک جفت صحیح عدد ہونا چاہئے کیونکہ اگر ایسا نہو تو اس امر کا کوئی اطمینان نہیں ہوگا کہ منفرد مقداریں (۳۴۴) سب کی سب چھوٹی ہیں باوجودیکہ ان کا مجموعہ چھوٹا ہو۔ اس لیے سادہ ترین طریقہ یہ ہے کہ م کو ۲ کے مساوی بنایا جائے جو کمترین مربعوں کا طریقہ ہے

ایک ستارہ کے فاصلہ کے مشاہدوں سے اس کے اختلاف منظر خہ کو متعین کرنے میں اس طریقہ کو استعمال کیا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ حسب ذیل مقدار کو اقل بنانا ہے

$$\{لا + ما ت_۱ - خہ ص جم (ہ_۱ - ص) - ف_۱\}^۲$$

$$+ \{لا + ما ت_۲ - خہ ص جم (ہ_۲ - ص) - ف_۲\}^۲$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \{لا + ما ت_ن - خہ ص جم (ہ_ن - ص) - ف_ن\}^۲$$

ہم لا، ما، خہ کو متبوع متغیروں کے طور پر لیکر ان کے لحاظ سے اس جملہ کے تفرقی سر لیتے ہیں اور اُن کو صفر کے مساوی رکھتے ہیں تو وہ اساسی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جن سے لا، ما، خہ متعین ہوں گے

ن لا + ما Σ ت۱ - خہ ص Σ جم (ہ۱ - ص) - Σ ف۱ = ۰،

لا Σ ت۱ + ما Σ ت۱² - خہ ص Σ ت۱ جم (ہ۱ - ص) - Σ ت۱ ف۱ = ۰،

لا Σ جم (ہ۱ - ص) + ما Σ ت۱ جم (ہ۱ - ص) - خہ ص Σ جم² (ہ۱ - ص)
- Σ ف۱ جم (ہ۱ - ص) = ۰

جنمیں وہ مجموعے جو Σ سے تعبیر کیے گئے ہیں اسے ن تک لیے گئے ہیں۔ اِن خطی مساواتوں کو لا، ما، خہ کے لیے حل کرنے سے نہ صرف سالانہ اختلاف منظر خہ معلوم ہوتا ہے بلکہ لا بھی جو آغاز سال پر ان دو سیاروں کا اوسط فاصلہ ہے اور ما بھی جو وہ سالانہ شرح ہے جس سے اِن کی ذاتی حرکتیں فاصلہ کو متاثر کرتی ہیں معلوم ہوتے ہیں۔

کمترین مربعوں کے طریقہ کا یہ اصول علم ہیئت میں بے حد اہم ہے کیونکہ بہت سے ایسے مسئلے پیش ہوتے ہیں جن میں ایسی مساواتوں کا اغلب ترین حل معلوم کرنا ہوتا ہے جن کی تعداد مجہول مقداروں کی تعداد سے زیادہ ہوتی ہے۔
(دیکھو Chauvenet's "*Practical & Spherical Astronomy*" جلد دوم کا ضمیمہ)

پندرہویں باب پر مثالیں

مثال ۱ — ۶۱ دجاجہ کا اختلاف منظر ۳۷ ۰ء ۰ً ہے اور اس کی ذاتی حرکت خطِ نظر کے عمود وار ۵ ۲ء ۵ً سالانہ ہے۔ اِس سمت میں اُس کی رفتار کا مقابلہ زمین کی اُس رفتار سے کرو جو سورج کے گرد اُس کے مدار میں ہے۔

اگر ر میل فاصلہ پر کے ایک ستارہ کی سالانہ ذاتی حرکت میں ثانیوں کی تعداد ن ہو تو ایک سال میں یہ ستارہ ر ن جب اً میل حرکت کرتا ہے۔ اگر ستارہ کا سالانہ اختلاف منظر خہ ثانیئے ہو تو خہ جب اً = ا \ ر جہاں ا سورج کا اوسط فاصلہ ہے۔ اِس لیے ستارہ کی سالانہ حرکت ا ن \ خہ ہے۔ زمین کی سالانہ حرکت ۲ ط ا ہے اور اِس لیے ستارہ کی رفتار کو زمین کی رفتار کے ساتھ ن \ ۲ ط خہ کی نسبت ہے۔ موجودہ صورت میں یہ نسبت ۲۳ء ۲ میں تحویل ہوتی ہے۔

مثال ۲ — اگر فضا میں سورج کی ذاتی حرکت سماوات کے (۳۴۵)
اُس نقطہ کی جانب ہو جس کا صعود مستقیم ا اور میل د ہے تو ثابت کرو کہ صعود مستقیم عہ، میل ضہ، اور سالانہ اختلاف منظر خہ والے ایک ستارہ کے محددوں کے تغیر کی شرحوں میں شکل

عہ = (خہ / ت) · (جم د جب (عہ - ا)) / (جم ضہ)، ضہ = (خہ / ت) · (جم د جم (عہ - ا) جب (ضہ - فہ)) / (جم فہ)

ز = - (ا / ت) · (جم د جم (عہ - ا) جم (ضہ - فہ)) / (جم فہ)

کی رقمیں شمر یک ہیں جہاں مس فہ ≡ مس د قط (ا - عہ)، زمین کے مدار کا نصف قطر ا ہے، ت وہ وقت ہے جس میں سورج فاصلہ ا طے

کرتا ہے، اور سورج اور ستارہ کے جدا ہونے کی رفتار رٖ ہے۔

[Math. Trip.]

وقت ت = ۰ پر سورج کا جو محل ہے اُس کو مبداء قرار دیکر اُس میں سے محور لا، ما، ی ان نقطوں تک کھینچے گئے ہیں جن کے صعودِ مستقیم اور میل علی الترتیب (۰°، ۰°)، (۹۰°، ۰°)، (۰°، ۹۰°) ہیں۔ وقت ت پر سورج کے محدد ہیں

ا ت جم ا جم د | ت ا ت جب ا جم د | ت، ا ت جب د | ت

اگر مبداء کے لحاظ سے ستارے کے محدد لاَ، ماَ، یَ ہوں اور سورج میں سے گذرنے والے متوازی محوروں کے لحاظ سے اُسکے محدد رجم عہ جم ضہ، رجب عہ جم ضہ، رجب ضہ ہوں تو

رجم عہ جم ضہ = لاَ - ا ت جم ا جم د | ت ...... (۱)

رجب عہ جم ضہ = ماَ - ا ت جب ا جم د | ت ...... (۲)

رجب ضہ = یَ - ا ت جب د | ت .... (۳)

مُربع لینے، جمع کرنے اور یہ دیکھنے سے کہ لاَ، ماَ، یَ کے حوالے سے ا بہت چھوٹا ہے حاصل ہوتا ہے

ر^۲ = لاَ^۲ + ماَ^۲ + یَ^۲ - ۲ ا (لاَ جم ا جم د + ماَ جب ا جم د + یَ جب د) ت | ت

اس لیے تفرق کرنے سے

ررٖ = - ا (لاَ جم ا جم د + ماَ جب ا جم د + یَ جب د) | ت

یا رٖ = - ا (جم د جم ضہ جم (ا - عہ) + جب د جب ضہ) | ت

= - ا/ت · جم د جم (عہ - ا) جم (ضہ - فہ) / جم فہ ...... (۴)

(۲) کو (۱) سے تقسیم کرنے اور مختصر کرنے سے

لاَ^۲ مس عہ = لاَ ماَ + ا ت ماَ جم ا جم د | ت - ا ت لاَ جب ا جم د | ت

تفرق کرنے سے ر^۲ جم^۲ ضہ × عہٖ = ا جم د (ماَ جم ا - لاَ جب ا) | ت

= ا ر جم ضہ جم د جب (عہ - ا) ت

اِس لیے

$$\text{عہ} = \frac{\text{خہ}}{\text{ت}} \; \frac{\text{جم د جب(عہ - ۱)}}{\text{جم ضہ}}$$

بالآخر (۳) کو تفرق کرنے سے

$$\text{ز جب ضہ} + \text{ر ضہ جم ضہ} = -\text{ا جب د} / \text{ت}$$

اِس لیے (۴) سے ز کی قیمت درج کرنے سے ضہ حاصل ہوتا ہے۔

(۳۴۶)

سولھواں باب

چاند گرہن

دفعہ صفحہ

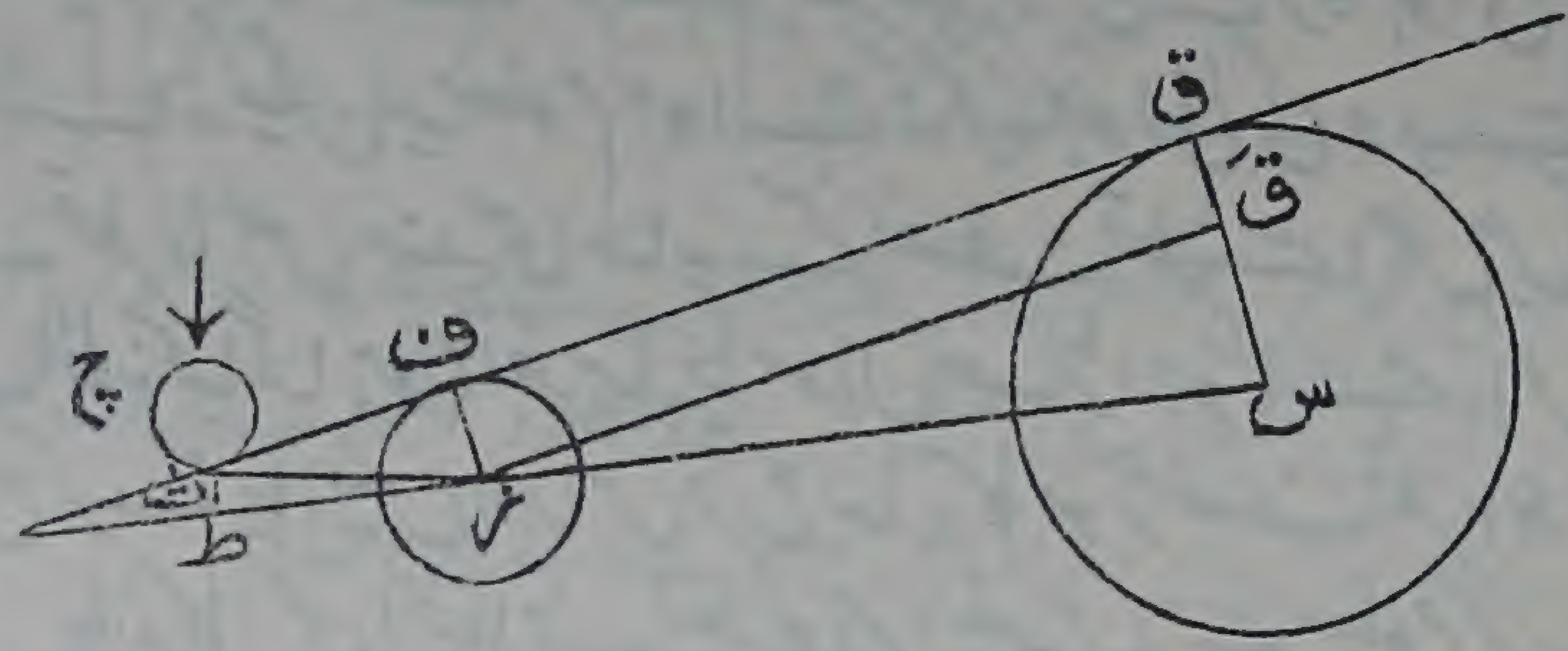
۱۱۵ — چاند گرہن۔

جب چاند زمین کے سایہ میں داخل ہوتا ہے تو چاند گرہن واقع ہوتا ہے۔ اب ہم ان ہندسی شرطوں کی تحقیق کریں گے جن کے تحت چاند گرہن واقع ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ چ (شکل ۸۵) چاند ہے جو نقطہ ت پر عین پہنچ رہا ہے جہاں وہ ف ق کو مس کرتا ہے جو زمین اور سورج کے بیرونی مشترک مماس مخروط کا ایک مکون ہے اور فرض کرو کہ زمین اور سورج کے مرکز علی الترتیب ن اور س ہیں۔ چاند اس وقت زمین کے سایہ میں عین

داخل ہونے کو ہے۔ زمین کے اِس سایہ کو ظلِ محض (Umbra.) کہتے ہیں تاکہ اِس میں اور ظلِ مشوب (Penumbra.) میں جس کا ذکر آگے آئے گا تمیز ہو۔ پس اِس موقع پر چاند گرہن کا آغاز ہو رہا ہے۔

ہم اول زاویہ ت ز ط کو محسوب کریں گے یعنی اُس زاویہ کو جو زمین کے مرکز پر سایہ کے مخروط کی اُس دائری تراش کے نصف قطر کے محاذی بنتا ہے جو ت میں سے گذرنے والے اور ز س پر عمود وار مستوی سے منقطع ہوتی ہے۔



شکل (۸۵)

اگر ز قَ، ف ق کے متوازی ہو تو

زاویہ قَ ز س = (ق س - ف ز) / ز س = ر٥ - خ

جہاں ر٥ سورج کا زاویٔ نیم قطر ہے جو زمین کے مرکز پر بنتا ہے اور خ سورج کا اُفقی اختلاف منظر ہے۔ زاویہ ف ت ز کو موجودہ مقصد کے لیے کافی صحت کے ساتھ چاند کا اُفقی اختلاف منظر خَ سمجھ سکتے ہیں اور اس لیے

زاویہ ت ز ط = خ + خَ - ر٥

پس ہم نے حسب ذیل نتیجہ ثابت کیا ہے:-

زمین کے مرکز سے چاند کے فاصلہ پر زمین کے سایہ کی جو تراش ہے اس کے محاذی زمین کے مرکز پر کا زاویۂ نیم قطر اُس اضافہ کے مساوی ہوتا ہے جو چاند اور سورج کے افقی اختلاف منظروں کے مجموعہ کو سورج کے زاویۂ نیم قطر پر ہے۔

مثلاً ہم کامل چاند گرہن کے اُس موقع پر سایہ کا زاویۂ نصف قطر معلوم کر سکتے ہیں جو بتاریخ ۸ر فروری ۱۹۰۶ء واقع ہوا تھا جبکہ خ = ۹ً، خَ = ۵۸َ ۱ً، رِ = ۱۶َ ۱۳ً اور اس لیے زاویہ ت ن ط = ۴۱َ ۵۷ً۔

یہ سایہ کا نصف قطر ہے بشرطیکہ زمین کے کرہ ہوائی کا لحاظ نہ کیا جائے۔ لیکن یہ معلوم ہوا ہے کہ کرۂ ہوائی کی وجہ سے موثر سایہ کا نصف قطر خالص ہندسی سایہ کے نصف قطر سے (جس میں کرہ ہوائی کا لحاظ نہ کیا گیا ہو) تقریباً پچاسواں حصہ بڑا ہوتا ہے۔ اِس لیے ہمیں ۵۰ً جمع کرنے چاہئیں اور اس طرح سایہ کا موثر نصف قطر ۴۲َ ۴۷ً ہے۔

چاند کا افقی اختلاف منظر جو ہم ایفیمرس سے معلوم کرتے ہیں فی الواقع اُستوائی افقی اختلاف منظر ہے اور چونکہ زمین کو چاند گرہنوں کے محسوب کرنے میں ایک کرہ سمجھا جائیگا اِس لیے کسی اُستوائی مقام کے اختلاف منظر کی بجائے زیادہ صحیح یہ ہوگا کہ ایک ایسا افقی اختلاف منظر استعمال کیا جائے جو کسی اوسط عرض بلد مثلاً ۴۵° کے متناظر ہو۔ اِس سے خَ میں سے اُس کی کل مقدار کا $\frac{1}{500}$ حصہ گھٹ جائیگا۔ لیکن عمل حساب میں اتنی نفاست کا خیال رکھنا بالکل عبث ہے کیونکہ یہ تصحیح اگر داخل بھی کیجائے تو اُس ابہام کی حد سے بہت کم ہوگی جو اُس تصحیح کے ساتھ ناگزیر طور پر لگا ہوا ہے جو کرۂ ہوائی کے اثر کے لیے داخل کیجاتی ہے۔

فرض کرو کہ تقابل کے لمحہ پر یعنے جبکہ چاند کا صعود مستقیم اور سایہ کے مرکز کا صعود مستقیم ایک دوسرے پر منطبق ہوں چاند کا صعود مستقیم سایہ کے مرکز کے صعود مستقیم سے بشرح عاً گھنٹے فی گھنٹہ بڑھ رہا ہے تو

(۳۴۸) تقابل سے ت گھنٹوں بعد ان دو صعود مستقیموں کا فرق عا ت ہوگا۔
فرض کرو کہ تقابل کے وقت چاند کے مرکز اور سایہ کے مرکز کے میل ضہ اور ضہَ ہیں اور ضہ، ضہَ وہ شرحیں فی گھنٹہ ہیں جن کی بموجب ضہ اور ضہَ بدلتے ہیں تو ت پر یہ میل ضہ + ضہ ت اور ضہَ + ضہَ ت ہوں گے۔

اگر وقت ت پر چاند اور سایہ کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ قوس کے ثانیوں میں ف ہو تو چونکہ یہ فاصلہ چھوٹا ہے اسلئے دفعہ ۸ سے حاصل ہوتا ہے

ف۲ = (ضہ + ضہ ت - ضہَ - ضہَ ت)۲ + ۵۴۰۰۰۲ عا۲ ت۲ جم۲ ۱/۲ (ضہ + ضہَ)

کیونکہ آخری رقم میں ہم کسی قابل قدر خطار کے بغیر ان دو میلوں کی بجائے تقابل پر ان کی قیمتیں لے سکتے ہیں اور صعود مستقیم کے ایک گھنٹہ میں قوس کے ثانیوں کی تعداد ۵۴۰۰۰ ہے۔ فرض کرو کہ

ا = (ضہ - ضہَ)۲ + ۵۴۰۰۰۲ عا۲ جم۲ ۱/۲ (ضہ + ضہَ)

ب = (ضہ - ضہَ) (ضہ - ضہَ)، ج = (ضہ - ضہَ)۲

تو مساوات بالا ہو جاتی ہے

ف۲ = ا ت۲ + ۲ ب ت + ج ...... (۱)

یہ وہ اساسی مساوات ہے جس سے چاند گرہن کی مختلف ہیئتیں (phases) معلوم کی جائیں گی۔

جب خسوف کا آغاز یا اختتام ہو رہا ہو تو چاند سایہ کو بیرونی طور پر عین مس کرتا ہے اور چاند اور سایہ کے مرکزوں کا فاصلہ ف۱، سایہ کے ظاہری نصف قطر میں چاند کا زاوی نصف قطر لچ جمع کر کے معلوم کرنا چاہیئے (شکل ۸۵) یعنی

ف۱ = (خ + خَ - لہ) ۵۱/۵۰ + لچ ...... (۳)

جب گرہن پورا ہو جائے تو چاند سایہ میں پوری طرح غرق ہونا چاہیئے اور اس ہیئت کی ابتدا اور اختتام کے لیے حاصل ہونا چاہیئے

ف۲ = (خ + خَ - رہ) ۵۱\۵۰ - لچ ...... (۴)

پہلے مساوات (۱) میں ف۱ کو ف کی قیمت کے طور پر داخل کرنے سے ت میں ایک دو درجی مساوات ملتی ہے جس سے معلوم ہوگا کہ آیا گرہن واقع ہوگا اور اگر ایسا ہے تو ت کی دو اصلوں سے وہ لمحے حاصل ہوں گے جن پر جزوی گرہن شروع اور ختم ہوتا ہے۔

مساوات

ا ت² + ۲ ب ت + ج - ف۱ = ۰

کی اصلیں

- ب\ا ± (ب² - ا ج + ا ف۱)^½ \ا

ہونگی اور اگر گرہن ہے تو یہ اصلیں حقیقی ہونی چاہئیں۔ اس لیے

(خ + خَ - رہ) ۵۱\۵۰ + لچ > (ا ج - ب²) \ا .... (۵)

اب چونکہ ا، ب، ج سب معلومہ مقداریں ہیں اس لیے ہم وہ ضروری اور کافی شرط معلوم کر سکتے ہیں کہ کم از کم جزوی گرہن واقع ہو۔ (۳۴۹)

گرہن کا وقفہ ان دو اصلوں کا فرق ہے اور اس لیے یہ وقفہ

۲ (ب² - ا ج + ا ف۱)^½ \ا

ہے۔ اسی طرح ف۱ کی بجائے ف۲ درج کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر گرہن پورا ہو تو

(خ + خَ - رہ) ۵۱\۵۰ - لچ > (ا ج - ب²) \ا ..... (۶)

اور پورے گرہن کا وقفہ

٢(ب٢ - ا ج + ا ف٢)½ \ ا

ہے۔

گرہن کے وسط میں چاند اور سایہ کے مرکز ایک دوسرے سے قریب ترین ہوتے ہیں، اِس لیے ات٢ + ٢ ب ت + ج اقل ہوتا ہے۔ مرکزوں کا یہ فاصلہ (ا ج - ب٢)½ \ ا½ ہے اور یہ، وقت ت = - ب \ ا پر واقع ہوتا ہے جبکہ اس کی پیمائش صعود مستقیم میں اقتران کے وقت سے کی گئی ہو۔

چاند کے جزوی گرہن کی مقدار اس کے اُس قطر کی مخسوف کسر سے پیمائش کی جاتی ہے جو سایہ کے مرکز کی جانب اُس لمحہ پر ہوتا ہے جبکہ مرکزوں کے درمیان فاصلہ کم سے کم ہو۔ اب چونکہ ظلِ محض کا نصف قطر (خ + خَ - رہ) ۵۱ \ ۵۰ ہے اور مرکزوں کا چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ

ف = (ا ج - ب٢)½ \ ا½ ہے اس لیے گرہن کی مقدار

{(خ + خَ - رہ) ۵۱ \ ۵۰ + رچ - ف} \ ٢ رچ

آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۱ — ثابت کرو کہ ظلِ محض کے راس کا فاصلہ زمین کے مرکز سے س قم اً \ (رہ - خ) ہے جہاں زمین کا نصف قطر س ہے اور جہاں رہ اور خ، سورج کا ظاہری نصف قطر اور اس کا افقی اختلاف منظر ہیں جن کو قوس کے ثانیوں میں بیان کیا گیا ہے۔

مثال ٢ — ثابت کرو کہ اُس نقطہ کا اختلاف منظر جہاں چاند ظلِ مشوب کو مس کرتا ہے چاند کے مرکز کے اختلاف منظر سے قوس کے ایک ثالث ثانیہ کے برابر بھی فرق نہیں رکھتا۔

مثال ۳ ـــ ثابت کرو کہ چاند گرہن کے وقفہ میں طول بلد میں تقابل کے لمحہ کا شریک ہونا ضروری نہیں ہے اگر گرہن جزوی ہو لیکن ضروری ہے اگر گرہن پورا ہو۔

مثال ۴ ـــ عقدہ کے قریب صعود مستقیم میں اقتران کے لمحہ پر چاند کے زاوئی نصف قطر اور چاند کے فاصلہ پر زمین کے سایہ کے زاوئی نصف قطر کا مجموعہ ر ہے۔ اقتران سے ت گھنٹوں بعد زمین کے سایہ کے مرکز اور چاند کے مرکز کے درمیان زاوئی فاصلہ کا مربع ا ت² + ۲ ب ت + ج ہے جہاں ا، ب، ج میں سورج اور چاند کے محلوں کے عنصر بوقت اقتران اور ان کی تبدیلیاں فی گھنٹہ شامل ہیں، چاند کا اختلاف منظر شرح ھ فی گھنٹہ سے بدلتا ہے اور اس کا زاوئی نصف قطر غہ ہے۔ ثابت کرو کہ چاند گرہن واقع ہوگا اگر (۳۵۰)

{ا (ج - ر²) - ب²} > {ج (ھ + غہ)² - ۲ ب ر (ھ + غہ)}

[Coll. Exam.]

مثال ۵ ـــ زمین، چاند، اور سورج کو کروی تسلیم کر کے ثابت کرو کہ جب چاند جزوی طور پر یا کامل طور پر گرہن میں ہو تو اس کے مرکز کا ارض مرکزی زاوئی فاصلہ زمین کے سایہ کے محور سے مقدار

جبت⁻¹ (جب خ + جب ف) - جبت⁻¹ (جب فَ - جب خَ)

سے کم ہونا چاہئے جہاں خ، خَ سورج اور چاند کے افقی اختلاف منظر ہیں اور فَ، ف علی الترتیب ان کے نصف قطر ہیں۔

[Math. Trip. 1. 1900]

مثال ۶ ـــ ثابت کرو کہ خسوف قمر کے وسط اور تقابل کے وقت کے درمیان وقفہ تقریباً

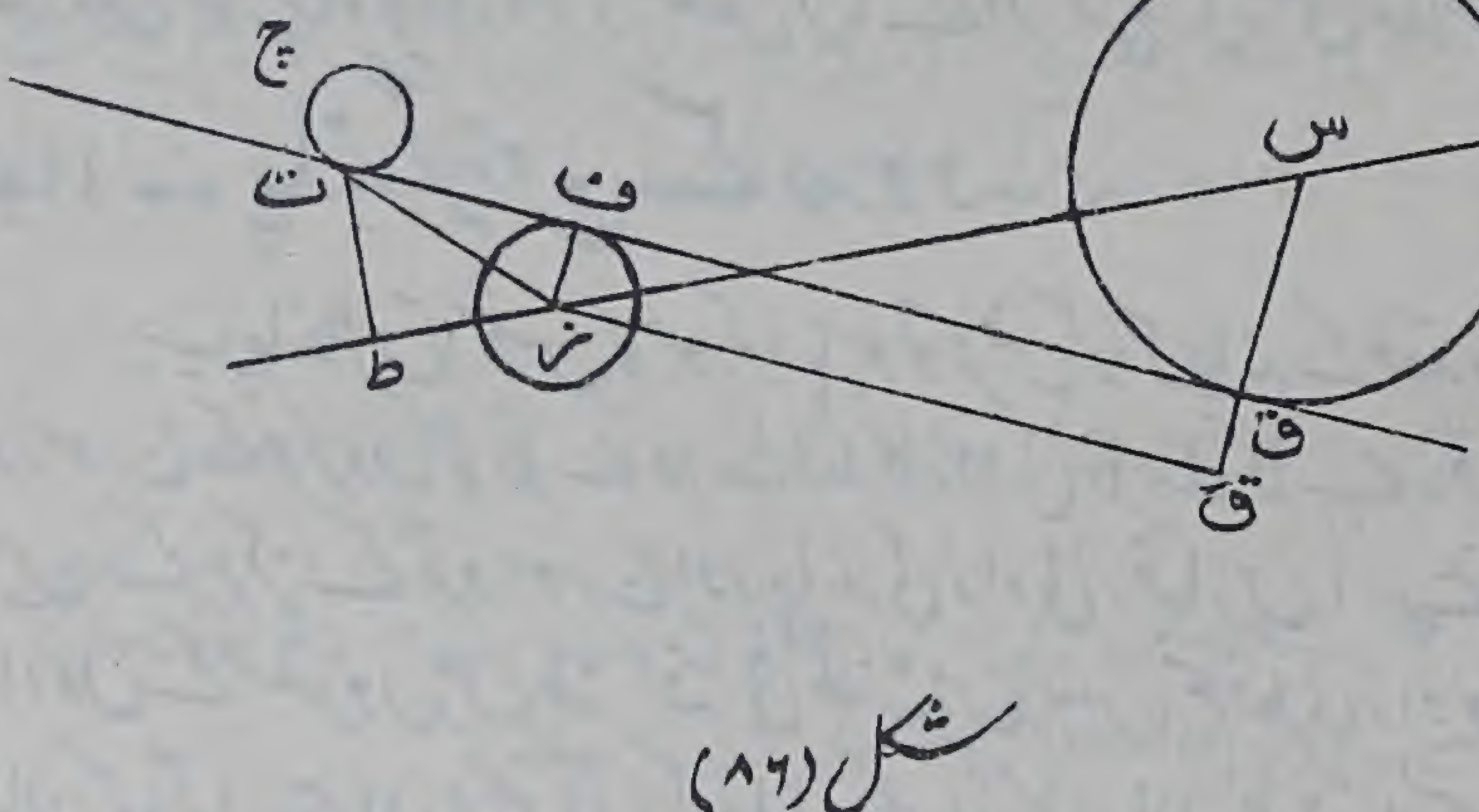
$$\frac{\text{م ط}}{\text{م}^2 + \text{ن}^2 \text{ جم ضہ جم ضہَ}} \text{ گھنٹے}$$

ہے جہاں چاند کی اور زمین کے سایہ کے مرکز کی میل میں اور صعود مستقیم میں فی گھنٹہ حرکتوں کے فرق علی الترتیب م اور ن ہیں؛ چاند کے مرکز اور زمین کے سایہ کے مرکز کے میلوں کا فرق بوقت تقابل ط ہے، اور سایہ اور چاند کے اوسط میل گرہن کے دوران میں ضہ، ضہَ ہیں۔

۱۱۶ ـ ظِلِ مشوب ـ

ابتک ہم نے صرف اُس صورت پر غور کیا ہے جس میں چاند ظلِ محض یا زمین کے سایہ میں داخل ہوتا ہے۔ اب ہم اُن شرطوں پر غور کریں گے جن کے تحت چاند ظلِ مشوب میں داخل ہوتا ہے جس میں وہ جزوی طور پر سورج سے چھپا ہوتا ہے یعنے جس میں چاند پر کا کوئی مشاہد سورج کا ایک جزوی گرہن دیکھیگا۔ جب چاند ظلِ مشوب میں داخل ہوتا ہے تو اُسے زمین اور سورج کے اندرونی مشترک مماس مخروط کے ساتھ تماس میں ہونا چاہیئے۔

فرض کرو کہ چ (شکل ۸۶) چاند ہے جو اندرونی مشترک مماس ف ق کے نقطہ ت پر عین وارد ہوا ہے۔ جب چاند ت سے گذرتا ہے تو وہ ظلِ مشوب میں داخل ہوتا ہے۔



شکل (۸۶)

خط ت ط جو س ز پر عمود ہے ظلِ مشوب کے مخروط کی اُس تراش کا نصف (۳۵۱)
قطر ہے جو چاند کے فاصلہ پر ہے۔ ہمیں وہ زاویہ مطلوب ہے جو ت ط
کے محاذی زمین کے مرکز ز پر بنتا ہے۔

اگر ز قَ، ف ق کے متوازی ہو تو تقریبی طور پر

$$\angle\,\text{ت ز ط} = \angle\,\text{ز ت ف} + \angle\,\text{س ز قَ}$$

$$= \text{ز ف}/\text{ز ت} + \text{ق قَ}/\text{ز س} + \text{س ق}/\text{ز س}$$

$$= \text{خَ} + \text{خ} + \text{رہ}$$

اس سے حسب ذیل بیان ثابت ہوتا ہے:—

چاند کے فاصلہ پر زمین کے ظلِ مشوب کے نصف قطر کے محاذی
زمین کے مرکز پر جو زاویہ بنتا ہے وہ

= چاند کا افقی اختلاف منظر + سورج کا افقی اختلاف منظر + سورج کا زاوئی نیم قطر۔

پس ہم حسب دفعہ ۱۱۵ دیکھتے ہیں کہ مساوات

$$\left\{(\text{خ} + \text{خَ} + \text{رہ})\,\text{۵۱}/\text{۵۰} \pm \text{رچ}\right\}^2 = \text{ا}\,\text{ت}^2 + \text{۲ ب ت} + \text{ج}$$

کو ت کے لیے حل کیا جائے تو اِس حل سے وہ لمحے ملتے ہیں جن پر
چاند ظلِ مشوب کو بیرونی طور پر اولاً اور آخراً مس کرتا ہے اگر رچ کی
مثبت علامت لی جائے اور وہ لمحے ملتے ہیں جن پر چاند ظلِ مشوب کو
اندرونی طور پر اولاً اور آخراً مس کرتا ہے اگر رچ کی منفی علامت لی جائے۔

۱۱۷ — چاند گرہن کے حدود۔

جب چاند طریق الشمس کو عبور کر رہا ہو تو فرض کرو کہ چاند کے عقدہ سے زمین
اور سورج کے مرکزوں کو ملانے والے خط کا زاوئی فاصلہ لا ہے۔ فرض کرو کہ
زمین کے مرکز کے گرد سورج اور چاند کی زاوئی رفتاریں اپنے اپنے
مداروں کے مستویوں میں طہ، فہ فی گھنٹہ ہیں جنہیں نیم قطری زاویوں میں
بیان کیا گیا ہے اور فرض کرو کہ چاند کے مدار کا میلان طریق الشمس کے

ساتھ مہ ہے۔ فرض کرو کہ وقت ت کی پیمائش گھنٹوں میں اُس لمحہ سے کی گئی ہے جس پر چاند کا مرکز اُس کے عقدہ میں سے گذرتا ہے۔ ہم اُس مثلث کو جو چاند اور سایہ کے مرکزوں اور اِس عقدہ کو ملانے سے بنتا ہے ایک مستوی مثلث سمجھ سکتے ہیں اور وقت ت پر سایہ کے مرکز اور چاند کے مرکز کے فاصلے عقدہ سے علی الترتیب لا + طہ ت اور فہ ت ہیں۔ پس اگر سایہ کے مرکز اور چاند کے مرکز کے درمیان فاصلہ ف ہو تو

$$\text{ف}^2 = (\text{لا} + \text{طہ ت})^2 - 2\,\text{فہ ت}\,(\text{لا} + \text{طہ ت})\,\text{جم مہ} + \text{فہ}^2\,\text{ت}^2$$

اس مساوات کو حسب ذیل شکل میں رکھا جا سکتا ہے

$$\text{ف}^2 = \frac{\text{لا}^2\,\text{فہ}^2\,\text{جب}^2\,\text{مہ}}{\text{طہ}^2 - 2\,\text{طہ فہ جم مہ} + \text{فہ}^2}$$

$$+ (\text{طہ}^2 - 2\,\text{طہ فہ جم مہ} + \text{فہ}^2)\left\{\text{ت} + \frac{\text{لا}(\text{طہ} - \text{فہ جم مہ})}{\text{طہ}^2 - 2\,\text{طہ فہ جم مہ} + \text{فہ}^2}\right\}^2 \dots (1)$$

اب چونکہ دوسری رقم صفر ہو سکتی ہے لیکن منفی ہرگز نہیں ہو سکتی اس لیے (352)

ف کی اقل قیمت ہونی چاہیے

$$\text{لا فہ جب مہ} \Big/ (\text{طہ}^2 - 2\,\text{طہ فہ جم مہ} + \text{فہ}^2)^{\frac{1}{2}}$$

اس لیے اگر کسی دئے ہوئے اقتران پر چاند گرہن کی ایک مخصوص ہیئت واقع ہوتی ہے تو سایہ کے مرکز کا فاصلہ لا جبکہ چاند عقدہ میں سے گذر رہا ہو حد

$$\text{لا} < \text{ف}\,(\text{طہ}^2 - 2\,\text{طہ فہ جم مہ} + \text{فہ}^2)^{\frac{1}{2}} \Big/ \text{فہ جب مہ}$$

کے اندر رہنا چاہئے جہاں اس دی ہوئی ہیئت کے متناظر چاند کے مرکز اور سایہ کے مرکز کا درمیانی فاصلہ ف ہے۔

لا کی حد کو عددی طور پر جس طرح محسوب کیا جاتا ہے اُس کی تمثیل کے لیے

ہم حسب ذیل اوسط قیمتیں لیں گے :-

خَ = ۹َ، خَ = ۲۲َ ۴۴ً ۳ً، ہ۵ = ۶۱ ۹ً، لبح = ۴۴ ۳۴ ۹ً، طہ/فہ = ۳/۴۰،

مہ = ۵° ۹َ

اِن سے حاصل ہوتا ہے

فہ جب مہ / (طہ² - ۲ طہ فہ جم مہ + فہ²)^½ = ۱۰٫۳

اِس میں جزو ضربی ۵۰/۵۱ داخل کرنے سے تاکہ کرہ ہوائی کی تصحیح ہو جائے گرہن کی مختلف ہیئتوں کے متناظر ف کی مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں

(خَ + خَ + ہ۵) ۵۰/۵۱ + لبح = ۹۰٫۲َ،

(خَ + خَ + ہ۵) ۵۰/۵۱ - لبح = ۵۹٫۱َ،

(خَ + خَ - ہ۵) ۵۰/۵۱ + لبح = ۵۷٫۶َ،

(خَ + خَ - ہ۵) ۵۰/۵۱ - لبح = ۲۶٫۵َ

اِن مقداروں پر جزو ضربی ۱۰٫۳ استعمال کرنے سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ جب چاند ایک عقدہ پر ہو اور سورج دوسرے عقدہ سے ۱۵٫۵°، ۱۰٫۲°، ۹٫۹° یا ۶٫۴° پر ہو تو علی الترتیب چاند جزوی طور پر ظل مشوب میں داخل ہوگا، پوری طرح ظل مشوب میں داخل ہوگا، جزوی طور پر ظل محض میں داخل ہوگا یا پوری طرح ظل محض میں داخل ہوگا۔

بلاشبہ یہ نتیجے صرف اوسط قیمتوں کے لیے حاصل کیے گئے ہیں اور اس لیے انہیں صرف اوسط نتیجوں کے طور پر قبول کرنا چاہیئے۔ اگر صحت مطلوب ہو تو اِن مختلف مقداروں کی وہ مخصوص قیمتیں استعمال

کرنی چاہئیں جو الیفیمرس میں دیجاتی ہیں۔

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ چاند کے کامل گرہن کا اعظم وقفہ تقریباً

$$\frac{\text{۲}(\text{خ.} + \text{خَ} - \text{ہ} - \text{ج})}{\text{م قط مہ}}\left(\text{۱} + \frac{\text{س جم}^{\text{۲}}\text{ مہ}}{\text{م}}\right) \text{ گھنٹے}$$

ہے اگر کرۂ ہوائی کے اثر کو نظر انداز کیا جائے، جہاں سورج اور چاند کے افقی اختلاف منظر خ. اور خَ، ان کے نیم قطر ہ اور ج، اور طول بلد میں ان کی حرکتیں فی گھنٹہ س اور م ہیں اور چاند کے مدار کا میلان طریق الشمس کے ساتھ مہ ہے۔

[Math. Trip. 1.]

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ چاند گرہن واقع ہوگا بشرطیکہ ماہ کامل کے وقت سورج چاند کے عقدہ سے نو دن کے اندر ہو۔ (۳۵۳

[Coll. Exam.]

مثال ۳۔ اگر زمین کے مرکز سے چاند کا فاصلہ زمین کے نصف قطر کا ۶۰ گنا لیا جائے، سورج کا زاوی قطر نصف درجہ، اور سورج اور چاند کی اقترانی مدت ۳۰ دن تو ثابت کرو کہ زمین کے ظل محض میں سے گذرنے میں چاند جو وقت لے سکتا ہے اُس کی بڑی سے بڑی مقدار تقریباً ۳ گھنٹے ہے۔

[Coll. Exam.]

مثال ۴۔ طول بلد میں تقابل کے لمحہ پر چاند کا بڑے سے بڑا عرض بلد معلوم کرو تاکہ پورا چاند گرہن ممکن ہو سکے۔ یہ دیا گیا ہے کہ چاند کا اختلاف منظر ۶۱َ ۲۳ً ہے، اس کا نیم قطر ۱۶َ ۴۶ً، سورج کا اختلاف منظر ۹ً، سورج کا نیم قطر ۱۵َ ۴۵ً، اور چاند کے مدار کا میلان طریق الشمس کے ساتھ ۵° ۵۲َ ہے۔

[Coll. Exam.]

مثال ۵۔ بتاریخ ۲۱ ستمبر ۱۸۹۴ء چاند کا ارتفاع گذشتہ ۱۹ سال کے عرصہ میں کسی اور وقت کے ارتفاع سے بڑا تھا، ثابت کرو کہ بتاریخ ۱۰ مارچ ۱۸۹۵ء چاند گرہن واقع ہو چکا ہوگا۔ چاند نے بتاریخ ۲۱ ستمبر ۱۸۹۴ء بمقام لندن نصف النہار کو کس وقت عبور کیا تھا۔

[اقترانی مہینہ کا طول $\frac{۱}{۲}$ ۲۹ دن ہے، چاند کا اختلاف منظر ۱° ، چاند اور

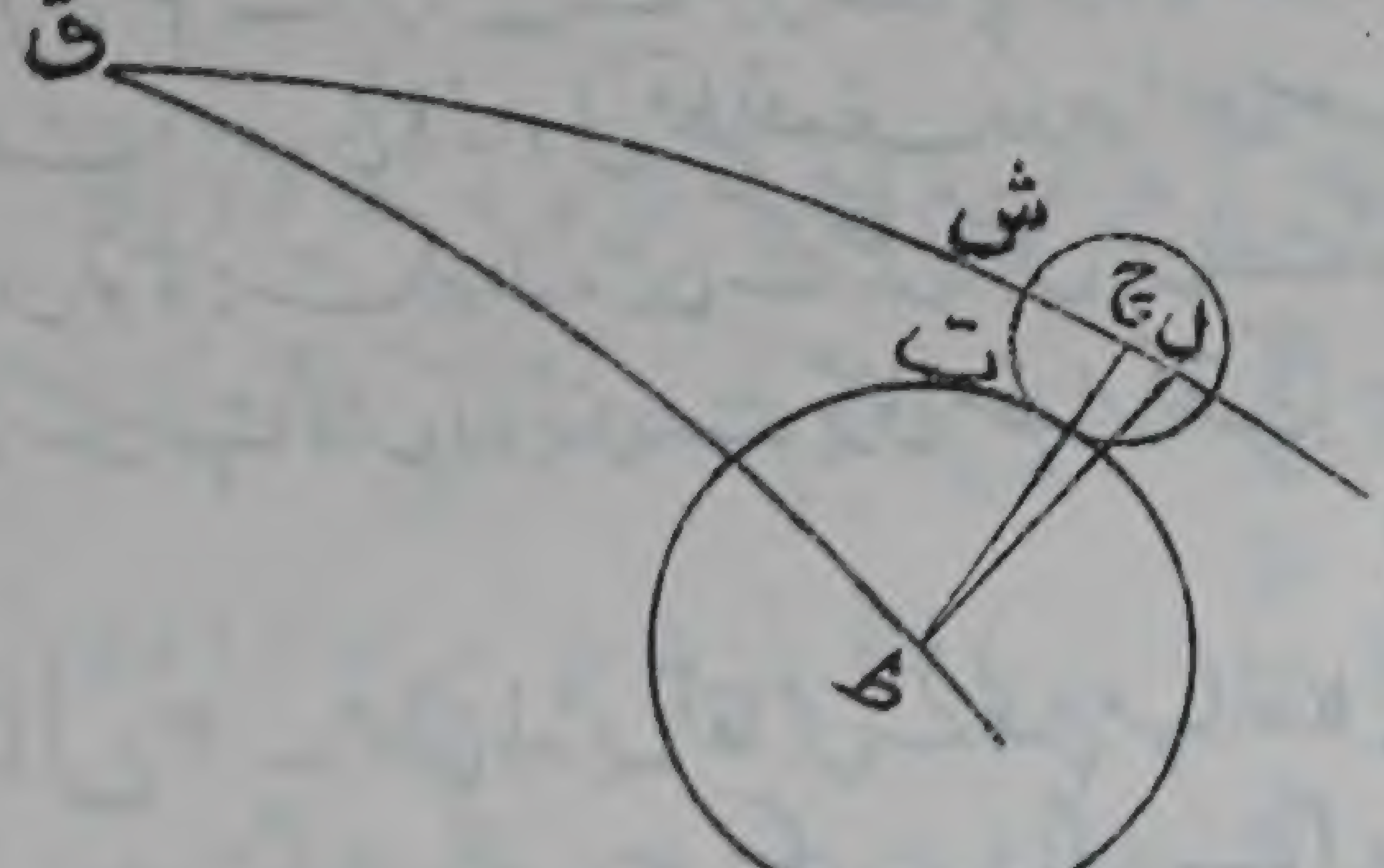
سورج کے مداروں کا میلان ۵° اور ہر ایک کا نیم قطر ۳۰َ لیا جا سکتا ہے۔]

[Coll.Exam.]

۱۱۸۔ چاند کا وہ نقطہ جہاں سے گرہن شروع ہوتا ہے۔

چاند کے کنارے کا وہ نقطہ معلوم کرنا رہ گیا ہے جہاں سے گرہن کی ابتدا ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ چاند اور سایہ کے مرکز علی الترتیب چ، ط (شکل ۸۷) ہیں جبکہ پہلا بیرونی تماس نقطہ ت پر واقع ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ ق قطب ہے تو چ ق چاند کے کنارہ کو ش پر قطع کرتا ہے جو چاند کے قرص پر سب سے زیادہ شمالی نقطہ ہے۔ ہمیں زاویہ ش چ ت مطلوب



شکل (۸۷)

ہے یعنے وہ زاویہ جس کی پیمائش چاند کے کنارہ پر خلاف سمت ساعت شمالی نقطہ ش سے نقطہ تماس ت تک کی گئی ہو۔ ط ل، ق چ پر عمود کھینچو۔ ہم کافی صحت کے ساتھ مثلث ط چ ل کو ایک مستوی مثلث سمجھ سکتے ہیں اور چ ل = ق ط - ق چ = ضہ - ضہَ جہاں ط اور چ کے میل علی الترتیب ضہ اور ضہَ ہیں جو معلوم ہیں کیونکہ پہلے تماس کا وقت (۳۵۴)

جیسا کہ ہم دیکھ چکے ہیں معلوم ہے۔ پس

جم ش چ ت = (ضہ - ضہ) | ط چ

اس لیے ش چ ت معلوم ہوتا ہے۔ اسی طرح وہ نقطہ جس پر گرہن بالآخر ختم ہوتا ہے معلوم ہو سکتا ہے۔

اگر چاند اور سایہ کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ر ہو اور اگر سایہ کا نصف قطر س اور چاند کا نصف قطر رچ ہو تو چاند کے کسی قطر کا وہ بڑے سے بڑا حصہ جو سایہ میں ہوگا س + رچ - ر ہے، اس حصہ کو قطر کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے اسکو یعنے (س + رچ - ر \ ۲ رچ کو گرہن کی مقدار کہتے ہیں۔

مثال ۔ چاند کے ایک جزوی گرہن میں سایہ کے ساتھ پہلا تماس چاند کے کنارہ کے شمال ترین نقطہ سے مشرق کی طرف زاویہ عہ پر واقع ہوتا ہے اور آخری تماس مغرب کی طرف زاویہ بہ پر۔

ثابت کرو کہ چاند کے قطر کا جتنا حصہ گرہن میں ہوتا ہے وہ، قطر کے ساتھ نسبت

$$\frac{1}{2}(1+س\backslash م)\left\{1 \mp جم \frac{1}{2}(عہ + بہ)\right\}$$

رکھتا ہے جہاں س اور م علی الترتیب سایہ اور چاند کے نیم قطر ہیں، اوپر کی علامت لیجاتی ہے جبکہ چاند کا مرکز سایہ کے مرکز کے شمال سے گذرتا ہے اور نیچے کی علامت جبکہ وہ جنوب سے گذرتا ہے۔

فرض کرو کہ قطب ق ہے، سایہ کے ساتھ چاند کے تماس کا پہلا نقطہ $ت_1$ اور آخری نقطہ $ت_2$ ہے اور سایہ کا مرکز ط ہے تو چونکہ ق $ت_1$ اور ق $ت_2$ کے درمیان صرف ایک چھوٹا زاویہ ہے اور چونکہ $ت_1$ $ت_2$ چھوٹا ہے اس لیے زاویہ $ت_1$ ط $ت_2$ = $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ) یا ۱۸۰° - $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ)، اسلیے چاند اور سایہ کے مرکزوں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ± (م + س) × جم $\frac{1}{2}$ (عہ + بہ) ہے۔ اس لیے چاند کے قطر کا بڑے سے بڑا حصہ جو سایہ میں

ہو سکتا ہے

$$\{(ع + ب) \tfrac{1}{2} جم ۱ \mp \} (م + س)$$

ہے اور ۲ م کے ساتھ اس کی نسبت مطلوبہ مقدار ہے۔

۱۱۹ — چاند گرہن کی تخمین۔

ضابطوں کی تمثیل کے لیے ہم چاند کے اُس کامل گرہن کا حساب لگائیں گے جو بتاریخ ۸ ، فروری سنہ ۱۹۰۶ء واقع ہوا تھا۔

حسب ذیل چیزیں معلوم ہیں (دیکھو بجری جنتری بابتہ سنہ ۱۹۰۶ء صفحہ ۴۸۳)۔

	صعود مستقیم میں چاند اور سایہ کے مرکز کے اقتران کی آن یا گرینوچ اوسط وقت	۱۹ گ	۹ م	۵۹ ث
(۳۵۵)	اِس آن پر چاند کا صعود مستقیم = عہ	۹	۲۸	۲۲
	" " میل = ضہ	°۱۴	۴۸′	۱۶″
	اِس آن پر سایہ کے مرکز کا میل = ضہَ	°۱۴	۵۵′	۲۴″
	صعود مستقیم میں چاند کی حرکت فی گھنٹہ = عہ		۳۴	۲۸
	" سایہ کی " " = عہ′		۲	۲۹
	میل میں چاند کی " " = ضہ		-۷	۴۲
	" سایہ کی " " = ضہ′			۴۸
	چاند کا اُستوائی اُفقی اختلاف منظر		۵۸	۱
	سورج کا اُستوائی اُفقی اختلاف منظر			۹
	چاند کا زاوئی نیم قطر = رج		۱۵	۴۷
	سورج کا زاوئی نیم قطر = رہ		۱۶	۱۳

اِن قیمتوں کو ا ، ب ، ج کے جملوں میں (دیکھو صفحہ ۱۵۱) درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ف^۲ = ...۱۸۳ + ...۳۵۴ ت + ...۱۳۶۱ ت^۲$$

جہاں چاند کے مرکز اور سایہ کے مرکز کے درمیان فاصلہ قوس کے ثانیوں میں

ف ہے اور جہاں ت، اقتران کی آن سے وقت ہے گھنٹوں میں اور جہاں اہم ہندسے تین سے زیادہ نہیں رکھے گئے ہیں۔

اِس مساوات کو ت کے لیے حل کرنے سے

ت = - ۰ء۴۹۱ ± √((ف \ ۱۹۰۰)^۲ - (۲ء۲۱۹۸)^۲)

اگر ہم رکھیں جم ط = ۴۱۸ \ ف تو

ت = - ۰ء۴۹۱ ± ۲ء۲۱۹۸ مس ط

اور معلوم ہوتا ہے کہ گرہن کے اوسط اوقات

۱۹گ ۴۷ء۱م ± ۲گ ۱۳ء۲م مس ط

پر چاند اور سایہ کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ف ہے۔ کم سے کم فاصلہ ف، ۴۱۸ ہے ورنہ ط خیالی ہوگا، اور کم سے کم فاصلہ کے متناظر وقت یعنے گرہن کا وسط ۱۹گ ۴۷ء۱م ہے۔

ظِل مشوب کے ساتھ پہلے اور آخری تماس معلوم کرنے کے لیے ہم رکھتے ہیں

ف = (خ چ + خ ہ + ر ہ) ۵۱ \ ۵۰ + ر چ = ۵۴۹۹

جم ط = ۴۱۸ \ ۵۴۹۹ = ۰ء۰۷۶۰ اور مس ط = ۱۳ء۱

اور اِس لیے مطلوبہ اوقات ہیں

۱۹گ ۴۷م ± ۲گ ۵۳م = ۱۶گ ۵۴م اور ۲۲گ ۴۰م

ظِل محض کے ساتھ پہلے اور آخری تماسوں کے لیے حاصل ہوتا ہے (۳۵۶)

ف = (خ چ + خ ہ - ر ہ) ۵۱ \ ۵۰ + ر چ = ۳۵۱۰

جم طہ = ۴۱۸\۳۵۱۴ = ۱۱۹ء، مس طہ = ۸ء۳۵

اور اس لیے مطلوبہ اوقات ہیں

۱۹گ ۱ء۷ ۴م ± ۱گ ۵۰ء۲م = ۱۷گ ۹ء۵۶م اور ۲۱گ ۳ء۳۷م

ظلِ محض کے ساتھ اندرونی تماس کے پہلے اور آخری لمحوں کے لیے حاصل ہوتا ہے

ف = (خج + خہ - رہ) ۵۱\۵۰ - رج = ۱۶۲۰،

جم طہ = ۴۱۸\۱۶۲۰ = ۲۵۸ء، مس طہ = ۳ء۷۵

اور اس لیے مطلوبہ اوقات ہیں

۱۹گ ۱ء۷ ۴م ± ۴ء۹ ۴م = ۱۸گ ۰ء۵۷م اور ۲۰گ ۶ء۳۶م

چاند کے کنارہ پر وہ نقطہ معلوم کرنے کے لیے جب پر سایہ کے ساتھ پہلا تماس واقع ہوتا ہے چاند اور سایہ کے میل وقت ۱۷گ ۵۷م پر معلوم کرنے چاہئیں۔ یہ اقتران کی آن سے ۱گ ۵۳م بیشتر ہے لیکن چاند میل میں جنوب کی طرف بشرح ۷َ ۲۴ً فی گھنٹہ حرکت کر رہا ہے۔ اس لیے پہلے تماس کے وقت چاند کا میل، اقتران کی آن پر اس کے میل سے بقدر ۶ء۱۴َ بڑا ہونا چاہیے اور اس لیے وہ ۲۵° ۲ء۹َ تھا۔ اس عرصہ میں سورج شمال کی طرف ۵ء۱َ اور اس لیے سایہ جنوب کی طرف ۵ء۱َ حرکت کر چکا ہوگا۔ اس لیے پہلے تماس کے وقت سایہ کے مرکز کا میل ۱۴° ۵۶ء۹َ ہونا چاہیے۔ پس صفحہ ۱۶۱ کی رُو سے

جم نش ج ت = - ۳۶۰\۳۵۱۴ = ۱۰۲ء۰

اور اس لیے پہلے تماس کا نقطہ چاند کے نقطہ شمال سے مشرق کی جانب ۹۶° پر ہے۔

وہ ارضی مقام معلوم کرنے کے لیے جہاں سے چاند گرہن کا مشاہدہ بہترین ہو سکتا ہے ہم زمین کے اُس مقام کا عرض بلد اور طول بلد معلوم کرتے ہیں جو وسط گرہن پر ٹھیک زمین اور چاند کے مرکزوں کو ملانے والے خط پر واقع ہو۔

چاند گرہن کا وسط گرینوچ اوسط وقت ۱۹ گ ۱،۷۴ م پر حاصل ہوا ہے اور اِس لیے وہ چاند اور سایہ کے مرکز کے اقتران (صعود مستقیم میں) کے وقت سے ۹،۲ م پیشتر ہے۔

۹،۲ م میں چاند ۷،۱ م صعود مستقیم میں اور ۰،۴' میل میں حرکت کر چکا ہوگا اور اِس لیے وسط گرہن پر چاند کے محدد حسب ذیل تھے:—

صعود مستقیم = ۹ گ ۲۸،۳ م − ۱،۷ = ۹ گ ۲۶،۶ م

اور　میل = ۱۴° ۴۸،۲' + ۰،۴' = ۱۴° ۴۸،۶'

اس لیے وہ خط جو زمین کے مرکز کو چاند کے مرکز سے ملاتا ہے زمین کی سطح کو اُس نقطہ پر قطع کریگا جس کا ارض مرکزی عرض بلد ۱۴° ۴۸،۶' ہے۔ اسکے جواب میں اصلی عرض بلد معلوم کرنے کے لیے اس زاویہ میں راس کا زاویہ (دفعہ ۱۵) جمع کرنا چاہیے جو اس صورت میں ۵' ہے۔ اس لیے جس مقام سے چاند گرہن بہترین طور پر دیکھا جا سکتا ہے اس کا اصلی عرض بلد ۱۴° ۵۴' ہے (۳۵۰)

اِس مقام کا طول بلد معلوم کرنے کے لیے ہمیں ایفیمرس سے معلوم ہوتا ہے کہ بتاریخ ۸ فروری اوسط ظہر پر کوکبی وقت ۲۱ گ ۷،۰ م تھا۔ گرینوچ ظہر اور وسط گرہن کے درمیان ۱۹ گ ۱،۷۴ م کا اوسط وقت کا وقفہ، کوکبی وقت کے ۱۹ گ ۳،۵۰ م کے مساوی ہے۔ اس لیے وسط گرہن کا گرینوچ کوکبی وقت

۲۱ گ ۷،۰۱ م + ۱۹ گ ۳،۵۰ م = ۱۷ گ ۰،۱۱ م

ہے کیونکہ بلاشبہ ہم ۲۴ گ کو ترک کر سکتے ہیں۔ چاند کا صعود مستقیم زیر بحث مقام پر

کو کبھی وقت ہونا چاہیے یعنی ۹ گ ۲۶،۶م۔ اس لیے اس مقام کا طول بلد
(مغرب) حسب ذیل ہونا چاہیے

۱۷ گ ۱۰،۱م − ۹ گ ۲۶،۶م = ۷ گ ۴۴،۴م

یا

= ۱۱۳،۶° قوس میں

چاند گرہن کی مقدار ہے

{(خچ + خچ̥ − ن) ۵۱/۵۰ + رچ − ف} / ۲رچ

جہاں ف کی قیمت اس صورت میں کم سے کم ہونی چاہیے یعنی ۴۱ ۱۸۔
حسب سابق دوسری مقداروں کی بجائے ان کی قیمتیں درج کرنے سے چاند گرہن
کی مقدار ۱،۶۴ حاصل ہوتی ہے۔

مثال — حسب ذیل معطیات سے ثابت کرو کہ چاند گرہن بتاریخ ۳ جولائی ۱۸۹۱ء
صرف جزوی تھا۔

طول بلد میں تقابل پر چاند کا عرض بلد	−۰ ۳۴′ ۴۰″
عرض بلد میں چاند کی حرکت فی گھنٹہ	۳۴′ ۴۰″
طول بلد میں 〃 〃	۳۸ ۲
〃 〃 سورج کی 〃	۲ ۲۲
چاند کا استوائی اُفقی اختلاف منظر	۶۱ ۲۱،۴
سورج کا 〃 〃 〃	۸،۷
چاند کا اصلی نیم قطر	۱۶ ۴۳
سورج کا 〃 〃	۱۵ ۴۴

زمین کے سایہ کے محور کے لحاظ سے چاند کی حرکت فی گھنٹہ طول بلد میں
۳۵′ ۴۰″ = ۲۱۴۰″ اور عرض بلد میں ۲،۲۰′ ہے۔ اس لیے زمین کے سایہ کے
محور سے چاند کا اقل فاصلہ تقریباً

(۳۰′ ۴۰″) × ۲۱۴ / √(۲۱۴² + ۲۲²) = (۳۰′ ۴۰″) × ۰٫۹۹۵ = ۳۰′ ۳۱″

ہے جو ۶۱′ ۴٫۲۱″ + ۷٫۸″ − ۱۶′ ۴۳″ − ۱۵′ ۴۴″
اور ۶۱′ ۴٫۲۱″ + ۷٫۸″ + ۱۶′ ۴۳″ − ۱۵′ ۴۴″
کے درمیان واقع ہے۔ اس لیے چاند گرہن تھا مگر صرف جزوی (دیکھو صفحہ ۱۵۷)

(۳۵۸)

سترہواں باب

سورج گرہن

دفعہ صفحہ

۱۲۰ — تمہید۔

اگر چاند کا مدار طریق الشمس کے مستوی میں ہوتا تو ہر محاق کے وقت سورج گرہن ہوتا۔ لیکن چونکہ چاند کا مدار طریق الشمس سے تقریباً پانچ درجہ کے زاویہ پر مائل ہے اس لیے یہ ظاہر ہے کہ محاق کے وقت چاند بالعموم سورج سے بہت اوپر یا بہت نیچے ہوگا اور سورج گرہن ممکن نہ ہوسکیگا۔ لیکن جب چاند محاق کے قریبی زمانہ میں اپنے مدار کے عقدہ سے قریب

ہوتا ہے، تو سورج گرہن کی توقع کیجا سکتی ہے۔
ہم دفعہ ۵۸ میں یہ بیان کر چکے ہیں کہ چاند کا صعودی عقدہ چ، طریق الشمس پر کیو کے زیر اثر پیچھے کی طرف حرکت کرتا ہے۔ تقریباً $18\frac{1}{2}$ سال میں یا زیادہ صحت کے ساتھ ۶۷۹۸،۳ دنوں میں چ، طریق الشمس کا ایک مکمل دور ختم کرتا ہے اور اس حرکت کے باعث سورج اپنی ظاہری حرکت میں چاند کے مدار کے صعودی عقدہ میں سے ۳۴۶،۶۲ دنوں کے وقفوں سے گذرتا رہتا ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ چ کے لحاظ سے سورج کی ۱۹ مکمل گردشیں ۶۵۸۵،۸ دنوں میں تکمیل پاتی ہیں۔ قمریہ یعنے دو متواتر محاقوں کے درمیان اوسط وقفہ ۲۹،۵۳۰۶ دن ہے، اس لیے ۲۲۳ قمریوں کی مقدار ۶۵۸۵،۳ دن ہے۔ ۲۲۳ قمریوں کے عرصہ اور چ کے لحاظ سے سورج کی ۱۹ گردشوں کے عرصہ میں جو تقریبی مماثلت ہے وہ کچھ کم اہم نہیں ہے۔ ان میں سے ہر ایک ۱۸ سال اور ۱۱ دن کے وقفہ سے نصف یوم سے زیادہ کا فرق نہیں رکھتا۔ یہ عجیب وقفہ جو سیراس (Saros) کہلاتا ہے سورج گرہنوں کے سلسلہ میں بڑا اہم ہے۔

فرض کرو کہ ایک خاص آن پر محاق ہے جبکہ سورج چ پر ہے، اور اس لیے سورج گرہن واقع ہوتا ہے تو ایک سیراس گذرنے کے بعد سورج چ کے لحاظ سے عین ۱۹ گردشیں ختم کرے گا اور اس لیے سورج پھر چ پر ہوگا۔ لیکن ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ محاق پھر واقع ہوگا کیونکہ قمریوں کی ایک صحیح عددی تعداد (یعنی ۲۲۳) سیراس میں شامل ہے اور اس لیے وہ شرطیں جنکے تحت سورج گرہن پیدا ہوتا ہے مکرر موجود ہوں گی۔ بلاشبہ چاند کے نزولی عقدہ کے متعلق بھی یہ سب درست ہے۔

سیراس کا تعلق چاند گرہنوں سے بھی ہے۔ ہم سولھویں باب میں یہ پڑھ چکے ہیں کہ چاند گرہن واقع ہوتا ہے جبکہ پورے چاند کے وقت سورج، چاند کے عقدوں میں سے ایک سے کافی قریب ہو۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ چاند کے ایک گرہن سے ایک سیراس گذرنے کے بعد، بالعموم چاند کا دوسرا گرہن واقع ہوگا۔ اس طرح

چاند گرہن ہو یا سورج گرہن ہر گرہن کے تقریباً ۱۸ سال ۱۱ دن بعد اُسی قسم کا دوسرا گرہن واقع ہوگا۔

مثلاً سنہ ۱۸۹۰ء میں سورج گرہن بتاریخ ۱۶ جون کو، چاند گرہن بتاریخ ۲۵ نومبر کو، اور سورج گرہن بتاریخ ۱۱ دسمبر کو واقع ہوئے تھے اور اس لیے سنہ ۱۹۰۸ء میں سورج گرہن بتاریخ ۲۸ جون کو چاند گرہن بتاریخ ۷ دسمبر کو اور سورج گرہن بتاریخ ۲۲ دسمبر کو واقع ہوئے۔

چاند کی حرکت سے متعلق ایک اور عددی واقعہ مشاہدہ طلب ہے اور وہ یہ ہے کہ ۲۳۵ قمریوں میں ۶۹۳۹،۶۹ دن ہیں اور ۳۶۵،۲۵ دنوں کے ۱۹ سالوں میں ۶۹۳۹،۷۵ دن ہیں۔ اس طرح ہمیں میٹن (Meton) کا دور ملتا ہے جو ۱۹ سال پر مشتمل ہے اور تقریباً ۲۳۵ قمریوں کے مماثل ہے۔

پس ہم بالعموم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ایک محاق کے ۱۹ سال بعد دوسرا محاق ہوگا مثلاً ۱۷ جولائی سنہ ۱۸۹۰ء اور ۱۷ جولائی سنہ ۱۹۰۹ء کو۔

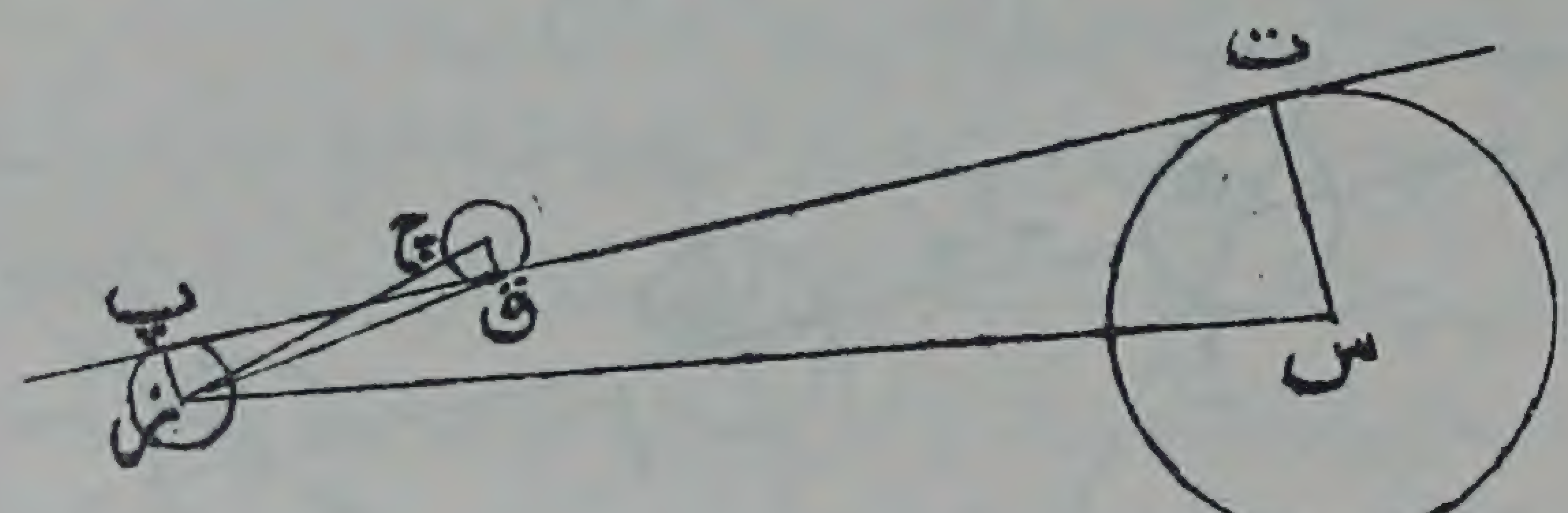
جب سورج گرہن آغاز یا اختتام کے نقطے پر ہو تو مشاہد کے محل سے کرۂ سماوی پر چاند کے دائری قرص کا ظل سورج کے مظلل قرص کے ساتھ بیرونی تماس میں ہوتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ اس لمحے پر مشاہد کے محل اور ظاہری نقطہ تماس میں سے گذرنے والا مستوی جو ان میں سے کسی قرص کو قطع نہیں کرتا سورج اور چاند کی کروی سطحوں کا مشترک مماس مستوی ہونا چاہیے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ وہ خط جو ان دو کروں کو مس کرنے والے مستوی کے حقیقی نقاطِ تماس کو ملاتا ہے مشاہد کے محل میں سے گذرنا چاہیے کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو یہ دو جرم اُسے تماس میں نظر نہیں آئیں گے۔ پس وہ ہندسی شرطیں جو سورج گرہن کے لیے ہیں اُن شرطوں کے مماثل ہیں جن پر ہم چودھویں باب میں زہرہ کے مرور کی بحث میں غور کر چکے ہیں۔ (۳۶۰)

جب سورج گرہن کی جزوی ہیئت شروع یا ختم ہونے کو ہو تو مشاہد کو سورج اور چاند کے اُس مشترک مماس مخروط کی سطح پر ہونا چاہیے جس کا راس ان دو جرموں کے درمیان ہے جیسا کہ چاند گرہن کی متناظر صورت میں (دفعہ ۱۱۵) بیان ہوا ہے۔ اس مخروط کو ظل مشوب کہتے ہیں، سورج اور چاند کا

وہ دوسرا مشترک مماس مخروط جس میں راس اور سورج، چاند کی مخالف سمتوں میں ہوتے ہیں ظل محض کہلاتا ہے۔ مشاہد جو کامل گرہن کا آغاز یا اختتام یا حلقہ نما گرہن دیکھتا ہے ظل محض پر واقع ہونا چاہیے۔ پہلی صورت میں چاند سورج کے قرص کو پوری طرح چھپا دیگا۔ دوسری صورت میں سورج کی چمکدار قرص کا ایک حاشیہ چاند کی سیاہ دائری شکل کے گرد نظر آئے گا۔

۱۲۱ — وہ زاویہ جو سورج گرہن کے آغاز پر سورج اور چاند کے مرکزوں کے محاذی زمین کے مرکز پر بنتا ہے۔

فرض کرو کہ سورج س (شکل ۸۸) اور چاند چ ق کا بیرونی مشترک مماس ت ق اتنا خارج کیا گیا ہے کہ وہ زمین ز کو نقطہ پ پر مس کرتا ہے اور



شکل (۸۸)

سورج، چاند، اور زمین کے نصف قطر علی الترتیب س، ل، غ ہیں اور ز س = ر، ز چ = رَ، زاویہ پ ز چ = ط اور زاویہ چ ز س = لا تو شکل سے حاصل ہوتا ہے

ر جم (ط + لا) + س = غ .... (۱)

رَ جم ط = غ + ل .... (۲)

(۱) کو ر سے اور (۲) کو رَ سے تقسیم کرکے عمل تفریق کریں تو حاصل ہوگا (۳۶۱)

۲ جب ½ لا جب (طہ + ½ لا) = غہ \ رَ + ل \ رَ - غہ \ ر + س \ ر

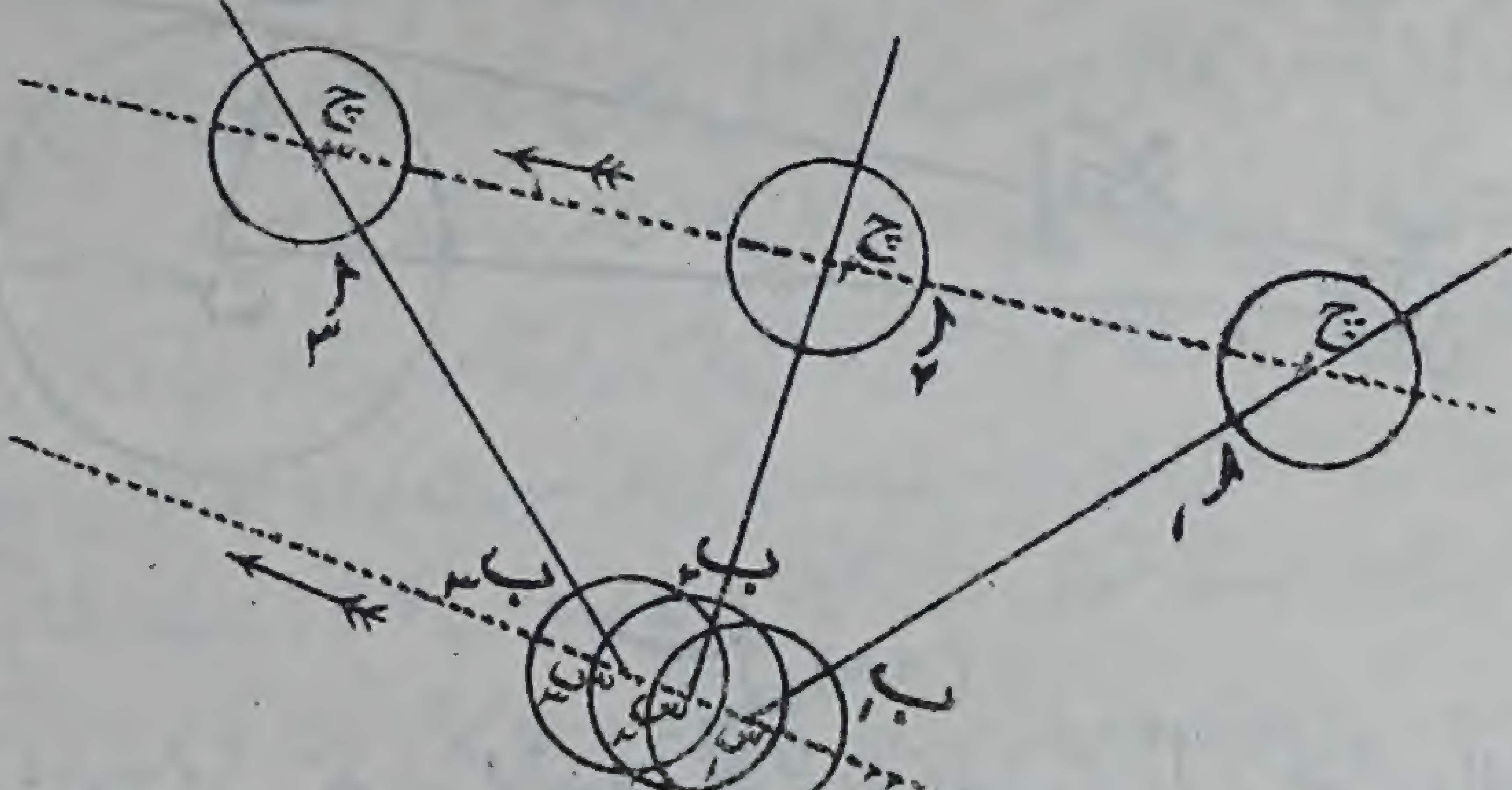
لیکن مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ جم طہ بہت چھوٹا ہے یا طہ، °۹۰ کے قریب ہے اور نیز چونکہ لا چھوٹا ہے اس لیے

لا = خَ - خ + لچ + لہٗ

اس جملہ کی مقداریں بلاشبہ متغیر ہیں، اس لیے ان کی قیمتیں ہر دفعہ الفیمرس سے دیکھنی چاہئیں۔

۱۲۲ — سورج گرہن کا ابتدائی نظریہ۔

فرض کرو کہ سورج اور چاند کے مرکز س، چ (شکل ۸۹) ہیں جبکہ انہیں زمین کے مرکز سے تقریباً سورج گرہن کے وقت دیکھا جائے۔



شکل (۸۹)

فرض کرو کہ بعد کی دو منزلوں پر سورج اور چاند کے مرکز اسی طرح س، چ اور س، چ ہیں۔

اگر کوئی مشاہد اُس محل سے جو اوپر فرض کیا گیا ہے اور اُن حالات کے تحت جو شکل میں دکھائے گئے ہیں مشاہدہ کرے تو صریحاً چاند صاف طور پر سورج سے نکل جائیگا اور کوئی سورج گرہن نہیں ہوگا۔ لیکن وہ حالات جو زمین کی سطح پر کے کسی نقطہ سے مشاہدہ کرنے سے پیدا ہوتے ہیں بالعموم اُن حالات سے جو شکل میں تعبیر ہوئے ہیں مختلف ہونگے ۔ ہم فرض کر سکتے ہیں کہ سورج کا اختلاف منظر (۸٫۸۰″) کا اثر ناقابل قدر ہے یعنی کرۂ سماوی پر سورج کا ظاہری مقام جس حد تک کہ سورج گرہنوں کا تعلق ہے
عملاً وہی ہوتا ہے خواہ ایسے زمین کی سطح پر کے کسی نقطہ سے دیکھا جائے یا زمین (۳۶۲)
کے مرکز سے دیکھا جائے۔ چاند کا اختلاف منظر (۳۴۲۲″) سورج کے اختلاف منظر کا ۳۸۹ گنا ہے اس لیے اس کی وجہ سے چاند کا ظاہری مقام اُس حد تک ہٹ سکتا ہے کہ یہ ہٹاؤ چاند کے قطر کا تقریباً دو چند ہو سکتا ہے ۔ اس طرح اگرچہ زمین کے مرکز سے دیکھنے پر چاند صاف طور پر سورج سے نکل سکتا ہے لیکن زمین کی سطح پر کے کسی نقطہ سے دیکھنے پر اختلاف منظر چاند کو کلاً یا جزاً مشاہد اور سورج کے درمیان حائل کر سکتا ہے اور اس لیے سورج گرہن پیدا ہو سکتا ہے ۔

ہم بارھویں باب میں دیکھ چکے ہیں کہ اختلاف منظر کا اثر چاند کو مشاہد کے راس سے افق کی جانب پست کرنے کا ہوتا ہے اور اس پستی کی مقدار اسی فاصلہ کی جیب کے متناسب ہوتی ہے

اب ہم یہ غور کر سکتے ہیں کہ آیا طول بلد میں سورج اور چاند کے ایک دیے ہوئے اقتران پر یا اسکے قریب یعنی دیے ہوئے محاق پر یا اُس کے قریب سورج گرہن جو زمین کی سطح پر کے کسی مقام سے نظر آئے واقع ہوگا۔ اگر یہ صورت ہو تو چاند کا اختلاف منظر جو ایسے مقام سے دکھائی دیگا چاند کو سورج کی طرف اس طرح ہٹانا چاہیئے کہ اِن کے کنارے ایک دوسرے کو ڈھک دیں۔ فرض کرو کہ س$_2$ چ$_2$ وہ اقل فاصلہ ہے جو زیر بحث اقتران پر سورج اور چاند کے مرکزوں کے درمیان زمین کے مرکز سے دکھائی دیتا ہے۔ تب کسی مقام پر گرہن صرف اُسی وقت نظر آئے گا جبکہ چاند کا اختلاف منظر جو اُس مقام سے دکھائی دے چاند کو سورج کی طرف، ا$_2$ ب$_2$ سے بڑے فاصلہ میں سے ہٹاتا ہوا معلوم دے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ا$_2$ ب$_2$ چاند کے افقی اختلاف منظر سے کم ہونا

چاہیے۔ اگر ا ب، چاند کے افقی اختلاف منظر سے بڑا یا اس کے مساوی ہو تو کوئی گرہن نہیں ہو گا۔

زمین کی سطح پر کا وہ فاصل نقطہ جہاں یہ نظر آئے کہ چاند کا کنارہ سورج کو عین مس کرتے ہوئے گذر جاتا ہے حسب ذیل طریقہ پر متعین کیا جاتا ہے۔

اختلاف منظر چاند کو بڑے دائرے چ، ا، ب، س، پر پست کرتا ہے لیکن کسی مقام پر اختلاف منظر ہمیشہ چاند کو اس مقام کے راس سے نیچے کی طرف پست کرتا ہے۔ پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مفروضہ حالات کے تحت یہ راس اِس بڑے دائرہ چ ا ب س، کی توسیع پر واقع ہونا چاہیے۔ چونکہ چاند کا نیچے کا کنارہ افق پر نظر آتا ہے جبکہ اِس کا اختلاف منظر بڑے سے بڑا ہو (یہاں کرہ ہوائی کے انعطاف کے سوال پر غور کرنے کی ضرورت نہیں ہے) اِس لیے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ اُس مقام کا راس، س، سے فاصلہ "۹۰° + سورج کا ظاہری نیم قطر" پر ہونا چاہیے۔ اس لیے کرۂ سماوی پر کا وہ نقطہ جو مشاہدہ کے مقام کا راس ہے معلوم ہو جاتا ہے اور وقت بھی معلوم ہوتا ہے کیونکہ یہ وہ وقت ہے جبکہ سورج اور چاند کے مرکزوں کا اصلی زاوی فاصلہ اقل ہوتا ہے۔ لیکن راس کا میل اُس مقام کا عرض بلد ہے اور "راس کا صعود مستقیم منفی گرینوچ کو کبی وقت" اُس مقام کا طول بلد ہے۔ پس اس طریقہ سے ہم اُس ارضی مقام کا عرض بلد اور طول بلد ہندسی طور پر ظاہر کرتے ہیں جس پر گرہن صرف عین تماس ہوتا ہے اور کسی اور مقام پر کوئی گرہن نہیں ہوتا۔ (۳۶۴)

اگر گرہن اوپر کی انتہائی صورت سے بڑا ہو تو چاند کا راستہ چ، چ، چ، سورج سے زیادہ قریب ہونا چاہیے۔ اگر ا ب (شکل ۸۹) چاند کے افقی اختلاف منظر کے مساوی ہو تو حسب سابق بڑے دائرہ س، چ، کی توسیع پر ایک نقطہ معلوم کیا جا سکتا ہے جو اُس ارضی مقام کا راس ہو گا جہاں سے سورج اور چاند کے کنارے اختلاف منظر کی وجہ سے عین مس کرتے نظر آتے ہیں۔ زمین کی سطح پر کا یہ مقام وہ نقطہ ہے جس پر جزوی گرہن کی ہیئت سورج اور چاند کے کناروں کا صرف عین تماس ہوتی ہے۔

اسی طرح س۲ چ۲ پر وہ راس بھی متعین کیا جا سکتا ہے جہاں گرہن اسی طریقہ پر ختم ہوتا ہے۔

یہ دیکھنا آسان ہے کہ کس طرح گرہن کے دوسرے مسئلے اسی طریقہ پر تعبیر کیے جا سکتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو وہ ارضی مقام معلوم کرنا مطلوب ہے جس پر کامل گرہن کی مرکزی ہیئت واقع ہوتی ہے جبکہ سورج بڑے سے بڑے ممکن ارتفاع پر ہوتا ہے۔

حسب سابق ہم اقتران کے موقع پر سورج کے ارض مرکزی محل س۱، س۲، س۳ اور چاند کے چ۱، چ۲، چ۳ مرتسم کرتے ہیں جہاں س۲ چ۲ ان دو جرموں کا اقل ارض مرکزی فاصلہ ہے۔ چونکہ زیر بحث ہیئت پر چاند اور سورج کے ارتفاع حتی الامکان بڑے سے بڑے ہونے چاہئیں اسلیے یہ ظاہر ہے کہ چاند کا اختلاف منظر حتی الامکان کم سے کم ہونا چاہیے جو اس کے مرکز کو سورج کے مرکز پر منطبق کرنے کے لیے کافی ہو سکے۔ اِس سے معلوم ہوتا ہے کہ مطلوبہ مقام کا راس بڑے دائرہ س۲ چ۲ کی توسیع پر واقع ہونا چاہیے اور راس ر کا محل یہ دیکھ کر معلوم کیا جاتا ہے کہ اختلاف منظر ٹھیک س۲ چ۲ ہے، اس لیے

جب ر س۲ = جب س۲ چ۲ ÷ جب خَ

جہاں خَ چاند کا افقی اختلاف منظر ہے۔ پس ر معلوم ہوتا ہے اور چونکہ وقت معلوم ہے اس لیے زمین کی سطح پر مطلوبہ مقام متعین ہو جاتا ہے۔

زمین کی سطح پر مرکزی گرہن کا خط بھی کھینچا جا سکتا ہے۔ کیونکہ اگر سورج اور چاند کے متناظر محلوں کے ایک زوج س۱، چ۱ کو ملانے والے بڑے دائرہ پر ایک ایسے نقطہ ر۱ کا انتخاب کیا جائے کہ

جب ر۱ س۱ = جب س۱ چ۱ ÷ جب خَ

تو ر۱ اُس مقام کا راس ہوگا جہاں سے گرہن مرکزی نظر آئے گا جبکہ سورج اور (۳۷۴)

چاند علی الترتیب سؔ اور چؔ پر ہوں۔ سورج اور چاند کے متناظر محلولوں کے دوسرے زوج لیکر مرکزی خط پر اُسکے متعدد نقطے معلوم کیے جا سکتے ہیں اور اس طرح مرکزی گرہن کا ارضی خط کھینچا جا سکتا ہے۔

۱۲۳۔ ایک عقدے کے قریب سورج اور چاند کی قریب ترین رسائی۔

فرض کرو کہ ایک محاق کے وقت چاند چ کا عرض بلد ب ہے۔ اس محاق کا اس وقت واقع ہونا فرض کر لیا گیا ہے جبکہ چاند اپنے عقدہ عؔ کے قریب ہے (شکل (۹۰)۔



شکل (۹۰)

فرض کرو کہ اس کے کچھ عرصہ بعد سورج اور چاند علی الترتیب محلول سَ، چَ تک آگے بڑھے ہیں۔ فرض کرو کہ چ چَ = لاَ تو س سَ = ن لا جم م جہاں چاند کے مدار کا میلان طریق الشمس کے ساتھ م ہے اور طول بلد میں سورج کی ظاہری رفتار کو طول بلد میں چاند کی ظاہری رفتار کے ساتھ نسبت ن ہے۔

مثلث چ ع س کو ایک مستوی مثلث کے طور پر سمجھنا تقریباً صحیح ہوگا اور اس لیے اگر چَ سَ کو ف سے تعبیر کیا جائے تو

ف۲ = (بہ مم مہ - ن لا جم مہ)۲ + (بہ قم مہ - لا)۲
- ۲ جم مہ (بہ مم مہ - ن لا جم مہ) (بہ قم مہ - لا)۲

اِسے شکل ذیل میں رکھا جا سکتا ہے:

ف۲ = (۱ - ۲ ن جم۲ مہ + ن۲ جم۲ مہ) {لا - بہ جب مہ / ۱ - ۲ ن جم۲ مہ + ن۲ جم۲ مہ}۲

+ بہ۲ (۱ - ن)۲ جم۲ مہ / ۱ - ۲ ن جم۲ مہ + ن۲ جم۲ مہ

ہم دیکھتے ہیں کہ ف۲ کے جملہ کا پہلا حصہ ہرگز منفی نہیں ہو سکتا اور اس لیے ف کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت حاصل کرنے کے لیے ہم رکھتے ہیں

لا = بہ جب مہ / ۱ - ۲ ن جم۲ مہ + ن۲ جم۲ مہ

(۳۶۵) کیونکہ اس سے ف۲ کی پہلی رقم معدوم ہوتی ہے۔ پس اگر اس اقتران میں سورج اور چاند کا کم سے کم فاصلہ بہ. سے تعبیر ہو تو

بہ. = بہ (۱ - ن) جم مہ / (۱ - ۲ ن جم۲ مہ + ن۲ جم۲ مہ)^½

اور زاویہ مہَ کی تعریف مساوات

مس مہَ = مس مہ \ (۱ - ن)

سے کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

بہ. = بہ جم مہَ

اب اگر ہم ن کی بجائے ۳ \ ۰.۴ اور جب مہ کی بجائے ۱ \ ۱۱ درج کریں تو تقریباً

بہ. = بہ جم مہ (۱ - ۰.۰۰۰۶)

پس بہ. اور بہ جم مہ کے درمیان فرق اس قدر چھوٹا ثابت ہو چکا ہے کہ گرہنوں کے تخمین میں بہ جم مہ کو یعنے اس عمود کو جو س سے ع مہ پر کھینچا گیا ہو وہ چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ فرض کر لینا کافی طور پر بالکل صحیح ہوگا جو دیئے ہوئے اقتران پر سورج اور چاند کے ارض مرکزی محلوں کے درمیان ہے۔

اگر گرہن واقع شدنی ہے تو (دفعہ ۱۲۱) بہ کو

خَ - خَ. + رچ + رہ

سے بڑا نہیں ہونا چاہیے۔ اس لیے

بہ > (خَ - خَ. + رچ + رہ) قطم

> (خَ - خَ. + رچ + رہ) (۱ + ½ جب² م)

اب خَ - خَ. + رچ + رہ کی اوسط قیمت ۱° ۲۸،۶' ہے اور یہ قیمت جملہ بالا کے اُس حصہ میں استعمال کی جا سکتی ہے جو ½ جب² م (= ۱\۲۴۶) سے مضروب ہے جس سے یہ حصہ ۰،۴' ہو جائیگا۔ نیز چونکہ خ. ہمیشہ اس مقصد کے لیے ۱،۰' لیا جا سکتا ہے اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ جب اقتران پر چاند کا ارض مرکزی عرض بلد بہ ہو تو اِس اقتران کے قریب زمانہ میں زمین کے کسی نہ کسی حصہ سے سورج گرہن نظر آنے کے لیے یہ ضروری ہے کہ

بہ ≯ خَ + رچ + رہ + ۰،۳'

خَ، رچ، رہ کی بڑی سے بڑی قیمتیں علی الترتیب ۶۱،۵'، ۱۶،۸'، ۱۶،۳' ہیں۔ اِن کا اور ۰،۳' کا مجموعہ ۱° ۳۴،۹' ہے۔ اس لیے اگر محاق کے وقت چاند کا ارض مرکزی عرض بلد (شمال یا جنوب) ۱° ۳۴،۹' سے بڑا ہو تو اس اقتران پر کوئی سورج گرہن نہیں ہو سکتا۔

گرہن کی عُلوی حد سے مراد سورج اور ایک عقدہ کے درمیان بوقت محاق وہ بڑے سے بڑا ممکن فاصلہ ہے کہ گرہن واقع ہو سکے۔

اگر عقدہ سے سورج کا فاصلہ لا ہو تو

جب لا = سس بہ مم مہ .... (۱)

اور لا کی بڑی سے بڑی قیمت حاصل ہوگی جبکہ بہ اپنی بڑی سے بڑی قیمت ۱° ۹′ ۳۴″
اور مہ اپنی چھوٹی سے چھوٹی قیمت ۵۴° ۸′ ۵۸″ اختیار کرے - اِس طرح گرہن (۳۶۶)
کی علوی حد ۱۸° ۵′ حاصل ہوتی ہے -

گرہن کی سِفلی حد ، خَ ، رِچ ، اور رِ کی چھوٹی سے چھوٹی

قیمتیں یعنے ۹′ ۳۵″ ، ۷′ ۱۴″ اور ۸′ ۱۵″ لینے سے معلوم ہوتی ہے - اگر چاند کا
ارض مرکزی عرض بلد اقتران پر (۹′ ۳۵″ + ۷′ ۱۴″ + ۸′ ۱۵″ + ۳۳′ ۰″ =) ۱° ۷′ ۲۴″
سے کم ہو تو اس اقتران کے قریب زمانہ میں بعض ارضی مقامات پر سورج گرہن
واقع ہونا چاہیے - طریق الشمس کے ساتھ چاند کے مدار کا جو میلان ہے اسکی
اعظم قیمت ۵° ۱۸′ ۶″ ہے - اگر ضابطہ (۱) میں بہ اور مہ کی بجائے قیمتیں
۱° ۷′ ۲۴″ اور ۵° ۱۸′ ۶″ درج کی جائیں تو لا = ۱۵° ۳۴′ حاصل ہوتا ہے - اِسطرح
ہم دیکھتے ہیں کہ جب کبھی محاق کے وقت سورج کا طول بلد عقدہ سے ۱۵° ۳۴′
کے اندر واقع ہو تو اِس اقتران پر سورج گرہن واقع ہونا چاہیئے - اس لیے
گرہن کی سِفلی حد ۱۵° ۳۴′ ہے -

بالآخر ہم دیکھتے ہیں کہ اگر بہ < ۱° ۷′ ۲۴″ تو سورج گرہن واقع ہونا
چاہیے - اگر بہ > ۱° ۹′ ۳۴″ تو سورج گرہن واقع نہیں ہو سکتا - اگر

۱° ۷′ ۲۴″ < بہ < ۱° ۹′ ۳۴″

تو ممکن ہے گرہن واقع ہو یا نہ ہو - اِس کا فیصلہ کرنے کے لیے خَ + رِچ + رِ
+ ۳۳′ ۰″ کی قیمت محسوب کرنی چاہیے اور اگر یہ قیمت بہ سے بڑی ہو تو گرہن
واقع ہوگا لیکن اگر چھوٹی ہو تو گرہن واقع نہیں ہوگا -

مثال ۱ - اگر شکل ۹۰ میں س چَ ، س سے چ ع پر عمود ہو
اور سورج اور چاند کے مرکزوں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ سَ چَ ہو تو
ثابت کرو کہ تقریباً

چَ چَ = ۲ ل بہ جب م

مثال ۲ ۔ اگر گرہن کے سفلی حدود ± صہ ہوں اور اگر تابع سورج سے ن گنا تیز گردش کرے اور اس کا عقدہ ہر گردش میں جو وہ اپنے ابتدائی کے گرد کرتا ہے ط پیچھے ہٹے تو ثابت کرو کہ ایک عقدہ پر

$$\frac{۲(ن-۱) صہ}{ن ط + ۲ ۲ا}$$

سے عین کم جو صحیح عدد ہے اس سے کمتر متواتر سورج گرہن واقع نہیں ہو سکتے۔

[Math. Trip.]

فرض کرو کہ سورج کی یومی حرکت طول بلد میں لہ ہے تو تابع کی حرکت ن لہ ہوگی اور عقدہ کی حرکت ۔ ن لہ ط \ ۲ ۲ا ہوگی ۔ ایک قمریہ کا وقفہ ۲ ۲ا \ (ن-۱) لہ ہے اور وہ وقت جو سورج عقدہ کی ایک جانب فاصلہ صہ سے دوسری جانب فاصلہ صہ تک گذرنے میں لیتا ہے ۲ صہ \ { لہ + $\frac{ن لہ ط}{۲ ۲ا}$ } ہے اور اس میں قمریوں کی جتنی تعداد ہے اس سے مطلوبہ جواب ملتا ہے۔

مثال ۳ ۔ سورج اور چاند کے ایک خاص اقتران پر چاند کا صرف عین تماس واقع ہوتا ہے لیکن زمین کی سطح پر کسی نقطہ پر کوئی قابل قدر جزوی سورج گرہن نہیں ہوتا۔ ثابت کرو کہ

$$(خَ - خ + رچ + رہ)^۲ = \frac{(ضچ - ضس)^۲ (عنچ - عنس)^۲ جم ضچ جم ضس}{(ضچ - ضس)^۲ + (عنچ - عنس)^۲ جم ضچ جم ضس}$$

جہاں سورج اور چاند کے زاوئی نصف قطر رہ اور رچ ، ان کے اختلاف منظر خَ اور خ ، ان کے میل صعود مستقیم میں اقتران کے لمحہ پر ضس اور ضچ ، اور ان کی حرکتیں صعود مستقیم اور میل میں عنس ، عنچ اور ضس ، ضچ فی گھنٹہ ہیں۔ (۳۶۷)

[Coll. Exam.]

نیز سورج اور چاند کے مرکزوں کے درمیان اقل فاصلہ معلوم کرو اگر یہ معلوم ہو کہ وقت ت پر ان کے مرکزوں کا فاصلہ تقریباً

{ضچ − ضش + ت (ضَچ − ضَش)}^{2} + ت^2 (عَچ − عَش)^2 جم ضچ جم ضش

کا جذر المربع ہے۔

مثال ۴ — ثابت کرو کہ سورج گرہنوں کی تعداد اوسطاً چاند گرہنوں کی تعداد سے بڑی ہوتی ہے لیکن یہ کہ چاند کا چہرہ ظل مشوب سے سورج گرہنوں کی بہ نسبت زیادہ مرتبہ دھندلا ہوتا ہے اگرچہ یہ ضرور نہیں کہ چاند گرہن واقع ہو۔

[Coll. Exam.]

مثال ۵ — ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے ارضی مقام پر چاند گرہن سورج گرہنوں کی بہ نسبت زیادہ کثرت سے واقع ہوں گے۔

مثال ۶ — اگر سورج اور چاند کے افقی اختلاف منظر اور نیم قطر معلوم ہوں تو طریق الشمس کے ساتھ چاند کے مدار کا اعظم میلان معلوم کرو تاکہ ہر ماہ ایک سورج گرہن یقینی طور پر واقع ہو سکے۔

[Coll, Exam.]

۱۲۴ — سورج کے جزوی گرہن کے لیے بیسل کے عنصر محسوب کرنا۔

ایک دیے ہوئے ارضی مقام پر سورج گرہن کے حالات دریافت کرنے کا حسب ذیل طریقہ عام طور پر اب استعمال کیا جاتا ہے۔ یہ بیسل[1] (Bessel.) سے منسوب ہے۔

زمین کے مرکز میں سے ایک خط اس خط کے متوازی کھینچا ہوا فرض کیا جاتا ہے جو کسی لمحہ پر سورج اور چاند کے مرکزوں کو ملاتا ہے۔ ہم زمین کے مرکز میں سے گذرنے والے اس خط کو محوری سمجھیں گے اور وہ مستوی جو اس

---

[1] نیز دیکھو شوونٹ (Chauvenet) کی "علم ہیئت کروی و عملی"

خط پر عمود ہے اور زمین کے مرکز میں سے گذرتا ہے اساسی مُستوی کے طور پر موسوم ہو گا۔ ی کے مُستوی کی مثبت جانب وہ ہے جس پہ سورج اور چاند واقع ہیں۔

لا کا مستوی وہ ہے جس میں زمین کا محور اور ی کا محور واقع ہیں۔ لا کی مثبت جانب وہ ہے جس میں خط استوا کا وہ نقطہ شامل ہے جس کو زمین کی محوری گردش ی کی مثبت جانب سے منفی جانب لیجاتی ہے۔ یہ معیار کبھی بھی مبہم نہیں ہوسکتا کیونکہ ی کا مُستوی خط استوا پر ہرگز منطبق نہیں ہوسکتا۔

ما کا مُستوی وہ ہے جو لا اور ی کے مستویوں پر عمود ہے اور ما کی مثبت جانب وہ ہے جس میں زمین کا قطب شمالی شامل ہے۔ یہ بھی کبھی مبہم نہیں ہوسکتا۔

فرض کرو کہ سماوی نقطہ د کا صعود مستقیم ص اور میل م ہے، د وہ نقطہ ہے جس کی طرف محور ی کی مثبت سمت جاتی ہے۔ تب کرۂ سماوی پر کے ان نقطوں کے میل اور صعود مستقیم جن کی طرف علی الترتیب لا، ما، ی کے محوروں کی مثبت سمتیں ہیں (۹۰° + ص، ۰)، (۱۸۰° + ص، ۹۰° - م)، (ص، م) ہیں۔ پس نقطہ عہ، ضہ اور ان تین نقطوں کے درمیانی زاویوں کی جیوب التمام ضابطہ (اَ) صفحہ ۲۲ حصہ اول سے حاصل ہوتی ہیں اور اس طرح حسب ذیل جملے ملتے ہیں:- (۳۶۸)

لا = ف جم ضہ جب (عہ - ص)،

ما = ف {جب ضہ جم م - جم ضہ جب م جم (عہ - ص)}، ....(۱)

ی = ف {جب ضہ جب م + جم ضہ جم م جم (عہ - ص)}

جہاں اساسی محوروں کے لحاظ سے ایک جرم کے محدد لا، ما، ی ہیں جبکہ یہ جرم سمت عہ، ضہ میں اور فاصلہ ف پر ہو۔

فرض کرو کہ سورج اور چاند کے مرکزوں کے صعود مستقیم اور میل علی الترتیب عہ۱، ضہ۱ اور عہ۲، ضہ۲ ہیں تو چونکہ ان نقطوں کو ملانے والا خط ی کے متوازی ہے

اِس لیے سورج اور چاند کے لا محدد مساوی ہونے چاہئیں اور ما محدد بھی مساوی ہونے چاہئیں، اِس لیے

ف$_1$ جم ضہ$_1$ جب (عہ$_1$ - ص) - ف$_2$ جم ضہ$_2$ جب (عہ$_2$ - ص) = ۰

ف$_1$ جب ضہ$_1$ جم م - ف$_1$ جم ضہ$_1$ جب م جم (عہ$_1$ - ص)

- ف$_2$ جب ضہ$_2$ جم م + ف$_2$ جم ضہ$_2$ جب م جم (عہ$_2$ - ص) = ۰

اِن میں سے پہلی مساوات سے مس ص معلوم ہوتا ہے۔ اِس سے ص کی دو قیمتیں ملتی ہیں جن میں سے ایک، دوسری سے ۱۸۰° بڑی ہے۔ لیکن چونکہ ص کی قیمت سورج کے صعود مستقیم کے بہت قریب ہونی چاہیے اِس لیے اِس میں کوئی شبہ نہیں رہتا کہ ص کی کونسی قیمت منتخب کرنی چاہیے۔ اِس قیمت کو دوسری مساوات میں درج کرنے سے مس م حاصل ہوتا ہے اور یہاں بھی اس کا کوئی شبہ نہیں ہوتا کہ م کی دو قیمتوں میں سے جن کا فرق ۱۸۰° ہے کونسی قیمت منتخب کرنی چاہیے کیونکہ م میل ہونے کی وجہ سے اُسے +۹۰° اور -۹۰° کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔

چونکہ نقطہ د جس کے محدد ص، م ہیں سورج سے اسقدر قریب ہے اور چونکہ گرہن کے وقت عہ$_2$ اور ضہ$_2$ علی الترتیب عہ$_1$ اور ضہ$_1$ کے بہت قریب ہوتے ہیں اس لیے حسب ذیل تقریبی حل سے ص اور م مطلوبہ پوری صحت کے ساتھ معلوم ہوتے ہیں۔

اگر ہم پہلی مساوات میں چھوٹے زاویے عہ$_1$ - ص اور عہ$_2$ - ص اِن کی جیوب کی بجائے لکھیں اور اگر جم ضہ$_1$ = جم ضہ$_2$ اور ف$_2$ ÷ ف$_1$ = ۱\۳۹۱ رکھیں تو

ص = عہ$_1$ + (عہ$_1$ - عہ$_2$)\۳۹۱

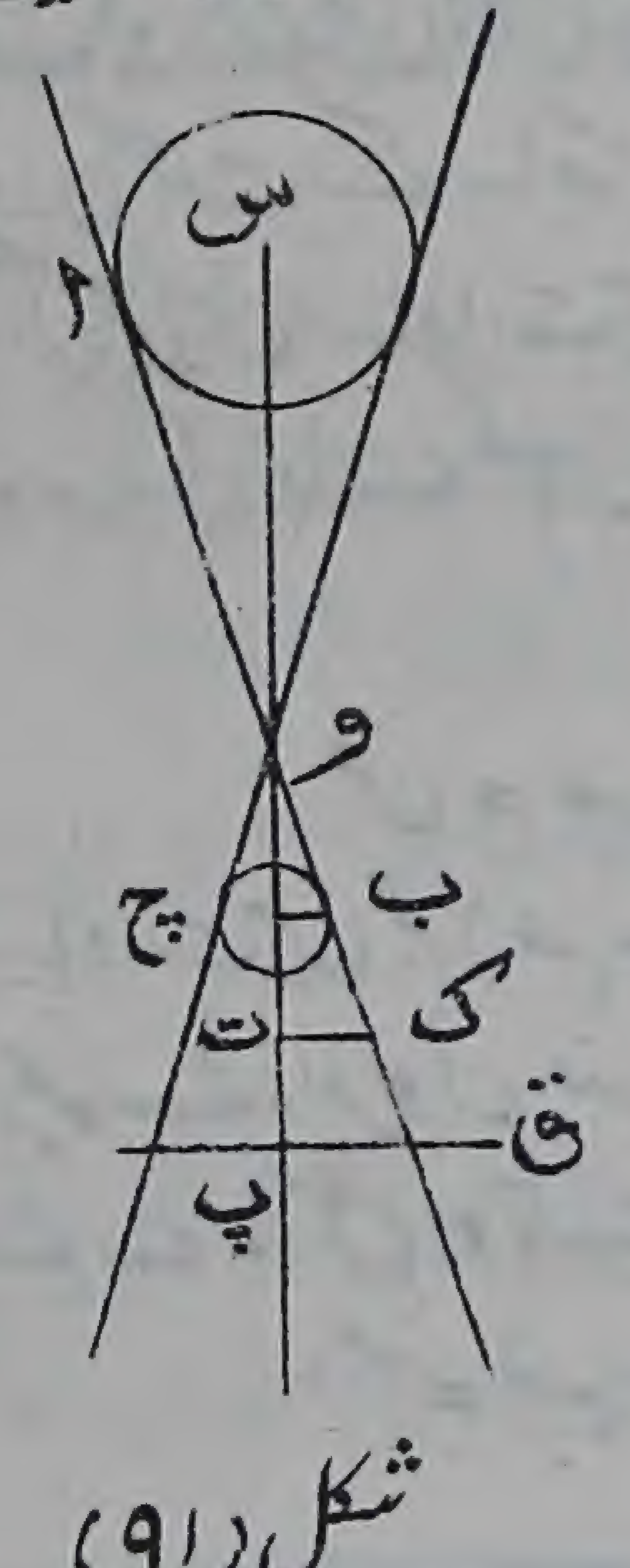
دوسری مساوات میں جم (عہ$_1$ - ص) اور جم (عہ$_2$ - ص) کو اکائی کے مساوی بنانے اور چھوٹے زاویوں ضہ$_1$ - م اور م - ضہ$_2$ کو اِن کی جیوب کی بجائے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

م = ضہ$_1$ + (ضہ$_1$ - ضہ$_2$)\۳۹۱

(۳۶۹) گرینوچ سے د کا ساعتی زاویہ (مغرب) گرینوچ کو کبھی وقت نہ پر تہ ص ہے اور یہ ہبیل کا عنصر مہ ہے جس کو سب سے اول گرہن کے دوران میں جداگانہ ہر نصف گھنٹہ کے لیے محسوب کرنا چاہیے۔

کسی مخصوص آن پر ص، م کی قیمتوں کو (۱) میں درج کیا جائے تو عہ، ضہ، ف اور عہ، ضہ، ف کی قیمتوں کے لیے لا اور ما کی قیمتیں ملتی ہیں۔ یہ مقداریں زیر بحث اجرام سماوی کی حرکتوں کی وجہ سے بلاشبہ متغیر ہوتی ہیں۔ گرہن بلاشبہ ان کی اضافی تبدیلیوں پر منحصر ہوتا ہے۔ اس لیے سورج اور چاند کے اقتران کے قریب زمانہ میں لا اور ما کی قیمتیں متعدد اوقات کیلئے محسوب کرنی ضروری ہیں۔ یہ سہولت بخش ہوگا کہ ہر سورج گرہن کے دوران میں دس دس منٹوں کے وقفوں سے لا اور ما کی قیمتوں کی ایک جدول تیار کیجائے طول کی وہ اکائی جس میں یہ محدد بیان کیے جاتے ہیں زمین کا اُستوائی نصف قطر ہوتی ہے۔ ہم لاَ، ماَ سے وہ شرحیں ظاہر کرینگے جس سے لا اور ما فی منٹ تبدیل ہوتے ہیں۔ یہ سب مقداریں الفیمرس میں ملیں گی اور اگر ت وہ آن ہو جس کے لیے لا اور ما محسوب کیے گئے ہیں تو وقت ت + ت پر یعنی آن ت کے بعد ت منٹوں پر لا اور ما، لا + لاَت اور ما + ماَت میں تبدیل ہوں گے۔

اُس اندرونی مماسی مخروط یا ظل منسوب کا تصور کرو (شکل ۹۱) جو سورج س اور چاند چ کے گرد کھینچا گیا ہو، ہمیں مخروط کے راس و پر کا زاویہ ۲ ف اور اسکی اُس تراش کا نصف قطر ل = پ ق معلوم کرنا ہے جو اساسی مستوی سے قطع ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ زمین سے سورج کے حقیقی فاصلہ کو اس کے اوسط فاصلہ کے ساتھ جو نسبت ہے وہ



شکل (۹۱)

ر ہے۔ چاند کا فاصلہ تقریباً ر\۳۹۱ ہے اور اِس لیے سورج گرہن کے
وقت جبکہ زمین، سورج اور چاند ایک خط میں ہوتے ہیں

چ س = پ س - پ چ

= ر - ر\۳۹۱ = ۳۹۰ ر\۳۹۱

اگر سورج کا نصف قطر ا ہو تو ا\۴۰۱ چاند کا نصف قطر ہے اور چونکہ ف چھوٹا ہے اِس لیے

س ف = جب ف = ا (ا + ا\۴۰۱)\ چ س

اس لیے ر س ف = ا × ۳۹۱ × ۴۰۲\(۳۹۰ × ۴۰۱)

اکائیوں کے انتخاب سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ا اُس زاویہ کی جیب ہے جو سورج کے اوسط فاصلہ پر اِس کے نیم قطر کے محاذی بنتا ہے اور یہ معلوم ہوا ہے کہ گرہنوں کے حساب کے لیے یہ زاویہ ۱۵َ ۵۹،۶ً ہونا چاہیے۔ اس لیے (۳۷۰۱)
ہمیں حاصل ہوتا ہے

ل ر س ف = ۰۰۷۶،۷

نصف قطر ل = پ ق = (پ س - و س) س ف = ر س ف - ا

لیکن (ر - ج پ) س ف = ا + ب، جہاں ب چاند کا نصف قطر ہے، اِس لیے ل = ج پ س ف + ب۔ اگر ہم ل کی پیمائش کے لیے فاصلہ کی اکائی زمین کا استوائی نصف قطر لیں جس میں سب سے زیادہ سہولت ہے تو چونکہ خَ چاند کا افقی اختلاف منظر ہے اور چاند کے نصف قطر کو زمین کے استوائی نصف قطر کے ساتھ ۲۷۲۵ء۰ کی نسبت ہے اس لیے

ل = ۰۱۲۷۲۵ + س ف قم خَ

مثلاً - ۵ مارچ ۱۹۰۵ء کے حلقہ نما سورج گرہن میں ل ر = ۹،۹۹۶۶
اور اِس لیے

ل س ف = ۰۰۷۶،۷ - ۱۷،۶۷ = ۹،۹۹۶۶ = ۹۳۷۶،۷

اِس موقع پر چاند کا افقی اختلاف منظر ۵۴َ ۹ً ہے اور ف کی اُس قیمت سے جو ابھی ہم نے حاصل کی ہے معلوم ہوتا ہے کہ

ل = ۲۸ × ۵ ز

یہ سب مقداریں یعنی لا، ما، لاَ، ماَ، ل مس ف، ل جب م، ل جم م، مہ "بیسل کے عناصر" کے نام سے موسوم ہیں اور یہ ظاہر ہے کہ انکا تعلق زمین پر کے مخصوص مقاموں سے زیادہ پوری زمین کے ساتھ ہے ۔

دفعہ آیندہ میں یہ معلوم ہوگا کہ بیسل کے یہ عناصر کسی مخصوص مقام پر سورج گرہن کے حالات متعین کرنے میں کس طرح استعمال کیے جانے چاہئیں ۔

۱۲۵ ۔ کسی دئے ہوئے مقام پر سورج گرہن کا حساب لگانے میں بیسل کے عناصر کا استعمال ۔

گرہن کے فاصل مظاہر اس وقت پیش ہوتے ہیں جبکہ مشاہد ظلِ مشوب یا ظلِ محض پر ہو۔ پہلی صورت میں سورج اور چاند کے کناروں کا تماس خارجی ہوتا ہے اور جزدی سورج گرہن عین شروع یا ختم ہونے کو ہوتا ہے۔ پورے گرہن کی صورت میں وہ ہیئت جسے ہم "کاملیت" کہیں گے عین شروع یا ختم ہو رہی ہوتی ہے جبکہ مشاہد ظلِ محض پر ہوتا ہے ۔ حلقہ نما گرہن کی صورت میں پہلا یا دوسرا اندرونی تماس واقع ہوتا ہے جبکہ مشاہد اس محل پر ہوتا ہے ۔ اب ہم گرہن کے آغاز یا اختتام کی صورت کا مطالعہ کرینگے ۔

یہ بیان کیا جا چکا ہے کہ گرینوچ سے نقطہ د کا ساعتی زاویہ (مغرب)
مہ ہے اور اس لیے مشاہد کے مقام ک کے لحاظ سے جس کا مشرقی طول بلد (۱۷۳)
لہ ہے د کا ساعتی زاویہ مہ + لہ ہے ۔ اس لیے مشاہد کے ارض مرکزی راس کا صعود مستقیم ص + مہ + لہ اور میل فہَ ہے جہاں فہَ، گ کا ارض مرکزی عرض بلد ہے ۔ پس اگر ک کا فاصلہ زمین کے مرکز سے غہ ہو اور اساسی محوروں کے لحاظ سے ک کے محدد ضا، عا، طا ہوں تو

ضا = غہ جم فہَ جب (مہ + لہ)
عا = غہ {جب فہَ جم م ۔ جم فہَ جب م جم (مہ + لہ)} ...... (۱)
طا = غہ {جب فہَ جب م + جم فہَ جم م جم (مہ + لہ)}

ضا اور عا اور نیز ضَا اور عاَ کی قیمتیں اِس مخصوص محل اور اُسی آن ت کے لیے محسوب کرنی ہیں جو لا اور ما محسوب کرنے میں استعمال ہوئی تھی۔ ایسلیے وقت ت + ت پر جہاں ت اوسط وقت کے منٹوں میں بیان کیا گیا ہے اور اُس کو چھوٹا فرض کیا گیا ہے (کیونکہ ت کو ٹھیک طور پر منتخب کرنے سے وہ چھوٹا ہوگا) ضا اور عا کی قیمتیں علی الترتیب ضا + ضَات اور عا + عَات ہو جاتی ہیں۔

اب ہمیں ضَا اور عَا معلوم کرنے ہیں یعنے وہ شرحیں جن سے عا اور ضا تقریبًا اُس وقت تبدیل ہو رہے ہیں جبکہ گرہن زیر بحث مقام پر نظر آ رہا ہو۔

ضا اور عا منحصر ہیں غہ، فہ، لہ، م اور مہ پر۔ اِن میں سے پہلے تین کسی دئے ہوئے مقام کے لیے مستقل ہیں اور اِس لیے کسی دئے ہوئے مقام پر ضا اور عا کی تبدیلیاں صرف م یا مہ یا دونوں کی تبدیلیوں سے پیدا ہو سکتی ہیں۔ م تقریبًا سورج کا میل ہے اور وہ زیادہ سے زیادہ قوس کے ایک ثانیہ کی شرح فی منٹ سے بدل سکتا ہے۔ پس ضا اور عا کی تبدیلیاں جن سے ہمیں واسطہ ہے مہ کی تبدیلیوں کی وجہ سے ہیں۔ یہ گرہنوں پر سورج کا تقریبًا مغربی ساعتی زاویہ ہے اور اوسط وقت کے ایک منٹ میں اس کا تغیر کوکبی وقت کا تقریبًا ایک منٹ ہے یعنی = ۱۵ آ یا نیم قطری زاویوں میں ۱ \ ۲۲۹۶۲ ۔

ضا اور عا کے جملوں کو وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے اور تفرقی سروں کو ضَا اور عَا سے ظاہر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ضَا = غہ جم فہ جم (مہ + لہ) \ ۲۲۹۶۲
عَا = ضا جب م \ ۲۲۹۶۲ .... (۲)

مشاہد کا فاصلہ ظل شوب کے محور سے ل۔ طا مس ف ہے جسے اختصارًا د سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ طا میں کوئی چھوٹی تبدیلی ناقابل قدر ہے کیونکہ وہ مس ف سے مضروب ہے جو چھوٹا ہے، اس لیے جزوی سورج گرہن کے آغاز یا اختتام کی تعیین کے لیے ذیل کی اساسی مساوات حاصل ہو دیتی ہے (۳،۲)

د^{2} = {(مَا - عَا) ت + (ما - عا)}^{2} + {(لَا - ضَا) ت + (لا - ضا)}^{2} ......(۳)

اِس مساوات کا حل حسب طریقہ ذیل معلوم کیا جا سکتا ہے۔
ہم اندراجات

ب جب ب = لا - ضا، ج جب ج = لَا - ضَا
ب جم ب = ما - عا، ج جم ج = مَا - عَا ......(۴)

عمل میں لاتے ہیں جن میں ب، ب، ج، ج معاون مقداریں ہیں۔ اِس سے حاصل ہوتا ہے مس ب = (لا - ضا) ÷ (ما - عا) اور اِس مساوات سے ب کی دو قیمتیں جن کا فرق ۱۸۰° ہے ملتی ہیں۔ ہم اُس قیمت کا انتخاب کرتے ہیں جو جب ب کو اُسی علامت کا بنا دے، جو لا - ضا کی ہے۔ اِس لیے جم ب کی وہی علامت ہونی چاہیئے جو ما - عا کی ہے اور ب،

(لا - ضا)^{2} + (ما - عا)^{2}

کا جذر المربع (مثبت) ہوگا۔ اسی طرح ج متعین ہوتا ہے اور ج،

(لَا - ضَا)^{2} + (مَا - عَا)^{2}

کا مثبت جذر المربع ہونا چاہیے۔

مساوات (۴) میں اندراج کرنے پر

ج^{2} ت^{2} + ۲ ب ج ت جم (ب - ج) + ب^{2} = د^{2}

حاصل ہوتا ہے جس میں اوسط وقت کا ایک منٹ، ت کی اکائی ہے۔

ہم ایک اور زاویہ سا ایسا داخل کرتے ہیں کہ

د جب سا = ب جب (ب - ج)

چونکہ سا صرف اپنی جیب سے معلوم ہوتا ہے اِسلیے سا کے لیے دو متمم زاویوں میں انتخاب پیش ہوتا ہے۔ ہم وہ زاویہ منتخب کرتے ہیں جو +۹۰° اور -۹۰° کے درمیان واقع ہے اس لیے جم سا مثبت ہے اور

ج^{2} ت^{2} + ۲ ب ج ت جم (ب - ج) + ب^{2} جم^{2} (ب - ج)
= د^{2} - ب^{2} + ب^{2} جم^{2} (ب - ج) = د^{2} جم^{2} سا

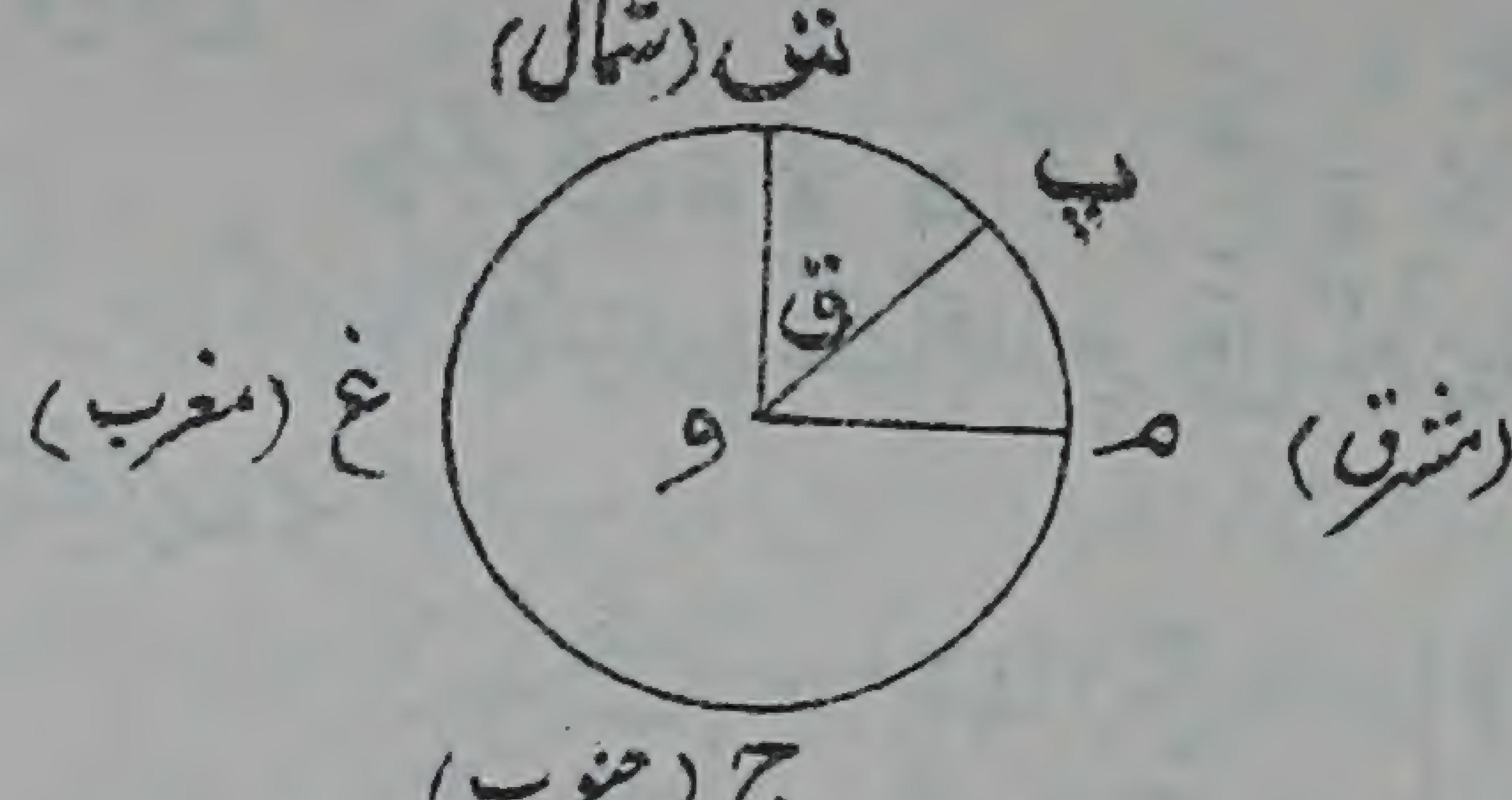
اس لیے ج ت = ـ ب جم (ب ـ ج) ∓ د جم سا .... (۵)

اب چونکہ جم سا مثبت ہے اور د اور ج بھی مثبت ہیں اس لیے اوپر کی علامت سے ت۱ اور نیچے کی علامت سے ت۲ حاصل ہوتے ہیں اور سورج گرہن کے آغاز اور اختتام کے گرینوچ اوسط وقت علی الترتیب ت + ت۱ اور ت + ت۲ ہیں۔ اگر ہم آغاز اور اختتام کے مقامی اوسط وقتوں کو ت۱ اور ت۲ سے تعبیر کریں تو

ت۱ = ت + ت۱ + لہ ، ت۲ = ت + ت۲ + لہ

جہاں لہ مشاہد کا طول بلد ہے۔

اب سورج کے کناروں پر کے وہ نقطے متعین کرنا باقی ہے جن پر (۳۷۳)
گرہن کا آغاز اور اختتام ہوتا ہے۔



شکل (۹۲)

شکل (۹۲) میں اساسی مستوی کاغذ کا مستوی ہے۔ و ، دائرہ ش م ج غ کا مرکز ہے جو ظل مشوب اور اساسی مستوی کا تقاطع ہے۔ اگر ش و ، ا کے متوازی ہے تو ش میں سے گذرنے والا ظل مشوب کے مخروط کا مکون سورج کے ظاہری قرص کو شمال ترین نقطہ پر مس کرتا ہے کیونکہ زمین کا محور اس مستوی میں واقع ہے جو لا پر عمود ہے۔ اگر و م ، لا کے متوازی ہو تو م میں سے گذرنیوالا مکون سورج کے ظاہری قرص کو مشرق ترین نقطہ پر مس کرے گا اور اگر دائرہ پر ش اور م کے متقاطر نقطے ج اور غ ہوں تو وہ ان مکونوں پر واقع ہوتے ہیں جو سورج کے ظاہری قرص کو علی الترتیب اس کے جنوب ترین اور مغرب ترین نقطوں پر مس کرتے ہیں۔

اگر نقطہ ضا ، عا ، طا اس مکون پر واقع ہے جو پ میں سے گذرتا ہے تو

د جب ق = (لا + لاَت) - (ضا + ضاَت)،

د جم ق = (ما + ماَت) - (عا + عاَت)

اِس لیے ہم ان میں ت کی وہ قیمتیں درج کرتے ہیں جو سورج گرہن کے آغاز اور اختتام کے متناظر ہیں، پس حاصل ہوتا ہے

د جب ق = لا - ضا + ت (لاَ - ضاَ)

= ب جب ب + جب ج {- ب جم (ب - ج) ∓ د جم سا}

= ب جم ج جب (ب - ج) ∓ د جم سا جب ج

= د جب سا جم ج ∓ د جم سا جب ج

= ∓ د جب (ج ∓ سا)

اسی طرح

د جم ق = ∓ د جم (ج ∓ سا)

اگر سورج گرہن کے آغاز پر ق کی قیمت ق$_1$ ہو تو ہم اوپر کی علامتیں لیتے ہیں چنانچہ

جب ق$_1$ = جب (ج - سا + ۱۸۰$^\circ$)

جم ق$_1$ = جم (ج - سا + ۱۸۰$^\circ$)

اگر سورج گرہن کے اختتام پر ق کی قیمت ق$_2$ ہو تو ہم نیچے کی علامتیں استعمال کرتے ہیں چنانچہ

جب ق$_2$ = جب (ج + سا)

جم ق$_2$ = جم (ج + سا)

اسلیے ق$_1$ = ج - سا + ۱۸۰$^\circ$

ق$_2$ = ج + سا (۳۷۴)

ان سے ہمیں شمسی قرص کے وہ نقطے معلوم ہوتے ہیں جہاں چاند سورج گرہن کے آغاز اور اختتام کے لمحوں پر سورج کو مس کرتا ہے۔

سورج گرہن کے حالات اور زیادہ صحت کے ساتھ مطلوب ہوں تو عمل حساب کو اِس طور پر دُہرانا ہوگا کہ ت کی بجائے ت$_1$ کی محصلہ قیمت

استعمال کیجائے اگر گرہن کے آغاز کے حالات معلوم کرنے ہوں اور تاہ کی محصلہ قیمت استعمال کی جائے اگر گرہن کے اختتام کے حالات مطلوب ہوں۔

سترہویں باب پر مثالیں

مثال ۱۔ ثابت کرو کہ صعود مستقیم میں اقتران کے لمحہ پر چاند سے سورج کے فاصلہ کو زمین سے سورج کے فاصلہ کے ساتھ نسبت

{جب خَ - جب خ جم (ضہ - ضہَ)} \ جب خ

ہے جہاں سورج اور چاند کے مَیل ضہَ اور ضہ ہیں، ان کے افقی اختلاف منظر خ اور خَ ہیں اور جب خ کے مربع کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگر اسی لمحہ پر سورج اور چاند کے صعود مستقیموں کی تبدیلی فی گھنٹہ علی الترتیب عہَ اور عہ ہو اور اگر اس خط کے صعود مستقیم کی تبدیلی آ فی گھنٹہ ہو جو زمین کے مرکز سے چاند اور سورج کے مرکزوں کو ملانے والے خط کے متوازی کھینچا گیا ہے تو

$$\text{آ} = \text{عہَ} - \frac{\text{جب خ جم ضہ}}{\text{جب خَ جم ضہَ}} (\text{عہ} - \text{عہَ})$$

[Coll, Exam.]

مثال ۲۔ سورج اور چاند کے مرکزوں کے درمیان ارض مرکزی زاوئی فاصلہ صعود مستقیم میں اقتران کے لمحہ پر ف ہے اور سورج کا میل ضہَ ہے۔ سورج اور چاند کی جدائی کی شرحیں صعود مستقیم اور میل میں عہ اور ضہ ہیں۔ اگر سورج گرہن میں ہو تو ثابت کرو کہ اقتران سے ارض مرکزی سورج گرہن کے وسط تک وقت تقریباً ضہ ف \ (ضہ² + عہ² جم² ضہَ) ہے۔

ثابت کرو کہ اُس نقطہ کے صعود مستقیم میں جہاں کرہ سماوی، سورج گرہن کے دوران میں سایہ کے مخروط کے محور سے منقطع ہوتا ہے اور سورج کے ارض مرکزی صعود مستقیم میں فرق حسب ذیل ہے

$$\frac{\text{ب جم ضہ قط ضَہ جب (عہ - عَہ)}}{\text{جب اً}} + \frac{\text{ب}^2\text{ جم}^2\text{ ضہ قط}^2\text{ ضَہ جب ۲ (عہ - عَہ)}}{\text{۲ جب اً}}$$

جہاں چاند اور سورج کے ارض مرکزی صعود مستقیم علی الترتیب عہ، عَہ ہیں، اِن کے میل ضہ اور ضَہ ہیں اور چاند کے ارض مرکزی فاصلہ کو سورج کے ارض مرکزی فاصلہ کے ساتھ نسبت ب ہے۔

[Math. Trip.]

مثال ۳ — پانچ ہندسی لوگارتم استعمال کر کے ثابت کرو کہ سورج گرہن بابتہ ۸ ۔ اگست سنہ ۱۸۹۶ء کے اول ترین آغاز سے آخر ترین اختتام تک تقریباً ۴گ ۴۹م کا وقفہ ہے جبکہ اُسے زمین کی سطح سے دیکھا گیا ہو اور حسب ذیل چیزیں معلوم ہوں :—

چاند کا عرض بلد طول بلد میں اقتران کے لمحہ پر	۴۲	۱۱ ش (۳۷۵)
چاند کی ساعتی حرکت طول بلد میں	۳۵	۵۵
سورج کی " " "	۲	۲۴
چاند کی ساعتی حرکت عرض بلد میں	۳	۱۸ ج
چاند کا استوائی افقی اختلاف منظر	۵۹	۲۸
سورج کا " " "		۹
چاند کا اصلی نیم قطر	۱۶	۱۴
سورج کا " "	۱۵	۴۸

[Math. Trip.]

مثال ۴ — سورج کا اختلاف منظر نظرانداز کر کے ثابت کرو کہ اُس مقام کو متعین کرنے کی مساواتیں جہاں معلومہ وقت پر گرہن مرکزی ہو یہ ہیں

$$\frac{\text{جم فہ جم ل - غہ جم ضہ}}{\text{جم (عَہ - عہ) جم ضَہ}} = \frac{\text{جم فہ جب ل}}{\text{جب (عَہ - عہ) جم ضَہ}} = \frac{\text{جب فہ - غہ جب ضہ}}{\text{جب ضَہ}}$$

جہاں چاند اور سورج کے ارض مرکزی صعود مستقیم اور میل علی الترتیب عہ، ضہ؛ عہَ، ضہَ ہیں، چاند کے فاصلہ کو زمین کے نصف قطر کے ساتھ نسبت غہ ہے، مقام کا عرض بلد فہ اور چاند کا ساعتی زاویہ ل ہے۔

مثال ۵ — اگر ایک قمریہ ۲۹٫۵۳۰۶ دن کا ہو اور اگر چاند کے عقدہ کی کوکبی گردش کا دور ۶۷۹۸٫۳ دن ہو تو ثابت کرو کہ ۱۴۵۵۸ دنوں کے وقفہ کے بعد گرہنوں کے ایک غیر متغیر ترتیب میں تکرار پانے کی توقع کی جا سکتی ہے۔

[Math. Trip. 1881]

چونکہ چاند کے عقدہ کی حرکت رجعی ہے اس لیے عقدہ کی طرف سورج کی روزانہ آمد درجوں میں $\frac{۳۶۰}{۶۷۹۸٫۳}+\frac{۳۶۰}{۳۶۵٫۲۴}$ ہے۔ ۳۶۰ کو اس سے تقسیم کرنے سے ۳۴۶٫۶۲ حاصل ہوتا ہے جو چاند کے عقدہ کے لحاظ سے سورج کی گردش میں دنوں کی تعداد ہے۔ اسے ۴۲ سے ضرب دینے سے ۱۴۵۵۸٫۰ حاصل ہوتا ہے۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ ۴۹۳ قمریوں میں ۱۴۵۵۸٫۶ دن ہیں۔ اس طرح تقریباً ۱۴۵۵۸ دنوں میں ۴۹۳ قمریہ ہیں اور اسی وقفہ میں سورج چاند کے عقدہ کے لحاظ سے ۴۲ مکمل گردشیں کر لیتا ہے۔ پس ایک اقتران سے اس وقفہ کے گذرنے کے بعد سورج اور چاند پھر اقتران میں ہوتے ہیں اور عقدہ سے ان کے فاصلے وہی ہوتے ہیں جو ابتدائی اقتران کے وقت تھے۔

(۳۷۶)

اٹھارواں باب

چاند سے ستاروں کے احتجابات

۱۲۶ ــ احتجاب کی تحقیق ۔

کبھی کبھی ایسا ہوتا ہے کہ چاند اثنائے حرکت میں مُشاہد اور ایک ستارہ کے درمیان سے گذرتا ہے ۔ اِس مظہر کو **احتجاب** کہتے ہیں ۔چونکہ ستارہ اس مقصد کے لیے ایک ہندسی نقطہ متصور ہو سکتا ہے اِس لیے چاند کے بڑھتے ہوئے کنارہ سے ستارہ کا چھُپ جانا بالعموم ایک فوری مُظہر ہوتا ہے اگرچہ بعض اوقات یہ مظہر اِس قدر سادہ نہیں ہوتا اور اسکی وجہ بلا شبہ یہ ہے کہ چاند کا کنارہ بے قاعدہ ہے ۔ستارہ کی باز نمودگی بھی جبکہ چاند اس پر سے عین گذر چکا ہو مشاہدہ کی جا سکتی ہے اگرچہ اس صورت میں اس کا علم پیشتر سے ہو جانا چاہئے کہ ستارہ ٹھیک کس نقطہ پر اچانک برآمد ہو گا ۔

احتجاب کے مُشاہدہ کی ہیئتی اہمیت ظاہر ہے ۔ اِس کے وقوع کا وقت چاند کی حرکت اور مشاہد کے محل دونوں پر منحصر ہے ۔ستارہ کا مقام کافی صحت کے ساتھ معلوم ہو جائے تو ستارہ کے غائب ہونے کے لمحہ کا صحیح طور پر مشاہدہ کرنے سے چاند کے مقام اور مشاہد کے محل کے درمیان ایک ربط ملتا ہے ۔ یہ مُشاہدہ چاند کے مقام کی صحیح تعئین کے لیے کام میں لایا جا سکتا ہے یا

اسکو مُشاہد کا طول بلد معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے اگر اس کا مقابلہ اسی طرح کے ایک مشاہدہ سے کیا جائے جو معلومہ طول بلد والے دوسرے مقام پر کیا گیا ہو۔

کسی محجوب ستارہ کا احتجاب یا اُس کی بازنمودگی جس وقت واقع ہوتی ہے اُسکو معلوم کرنے کا حسب ذیل طریقہ لگرانج اور بیسل نے دریافت کیا تھا۔ اِس طریقہ میں حسب ذیل علامتیں استعمال کی گئی ہیں، اِن کی تعریف اِن کے ساتھ درج ہے:۔

ص، ستارہ کا ظاہری صعود مستقیم
م، 〃 〃 〃 مَیل
عہ، چاند کا ظاہری صعود مستقیم زمین کے مرکز سے
ضہ، 〃 〃 〃 مَیل 〃 〃 〃
خَ، چاند کا اُستوائی افقی اختلاف منظر
رچ، چاند کا زاویائی نیم قطر زمین کے مرکز سے
عہَ، چاند کا ظاہری صعود مستقیم مُشاہد کے مقام سے
ضہَ، 〃 〃 〃 مَیل 〃 〃 〃
رَچ، چاند کا نیم قطر مُشاہد کے مقام سے
تہ، کوکبی وقت مُشاہد کے مقام پر
فہ، مُشاہد کا عرض بلد
فہَ، مُشاہد کا ارض مرکزی عرض بلد
غہ، زمین کے مرکز سے مشاہد کا فاصلہ جبکہ زمین کا اُستوائی نصف قطر اکائی کے طور پر لیا گیا ہو۔

فرض کرو کہ ستارہ س ہے، چاند چ، اور قطب ق (شکل ۹۳) اور فرض کرو کہ ستارہ س سے چاند کے مرکز چ تک زاویائی فاصلہ جو ان کے درمیان مشاہد کو کسی لمحہ پر نظر آتا ہے فا ہے۔

فرض کرو کہ کروی زاویہ چ س ق جو س پر قطب ق اور چاند کے

مرکز ج کے محاذی بنتا ہے طہ ہے۔ یہ تسلیم کرلیا گیا ہے کہ طہ، س ق سے اُس سمت میں ناپا گیا ہے جو زاویہ محل کی معمولی قرارداد کے مطابق ہے (صفحہ ۲۱۰ حصہ اول)۔

طہ اور ۳۶۰° - طہ کے درمیان کوئی اُلجھن نہیں ہو گی اگر یہ ذہن نشین رہے کہ اگر عہَ > ص تو طہ صفر اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہے اور اگر عہَ < ص تو طہ کو ۱۸۰° اور ۳۶۰° کے درمیان ایک زاویہ سمجھنا چاہیئے۔

پس ہم حسب ذیل ضابطے لکھ سکتے ہیں (دفعہ ۱):-

جب فا جب طہ = جم ضہَ جب (ص - عہَ)

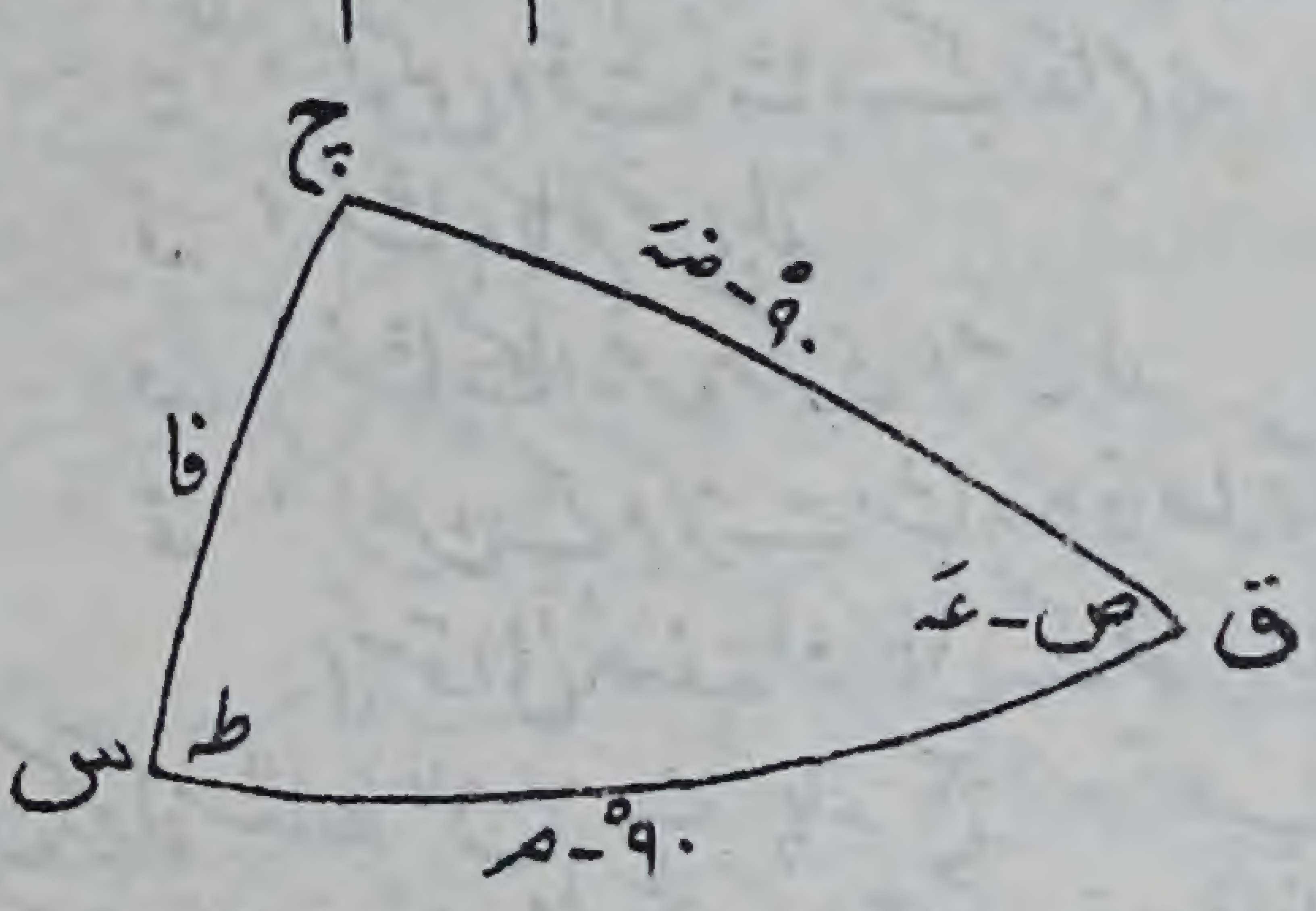
جب فا جم طہ = جب ضہَ جم مہ - جم ضہَ جب مہ جم (ص - عہَ) ......(۱)

جم فا = جب ضہَ جب مہ + جم ضہَ جم مہ جم (ص - عہَ)

زمین کے مرکز میں سے تین ایسے قائم محوروں کا تصور کرو کہ + لا خط استواء کے اُس نقطہ کی جانب ہے جس کا صعود مستقیم ۹۰° ہے، + ما نقطہ ♈ کی جانب ہے، اور + ی شمالی قطب کی جانب ہے۔

کو کبی وقت تہ، ♈ کا ساعتی زاویہ ہے۔ اس لیے اِن محوروں کے لحاظ سے مشاہدہ کے نقطہ کے محدد حسب ذیل ہیں:

لا = غہ جم فہَ جب تہ، ما = غہ جم فہَ جم تہ، ی = غہ جب فہَ



(۳۷۸)

شکل (۹۳)

اُنہی محوروں کے حوالہ سے چاند کے محدد حسب ذیل ہیں:-

لا = جم ضہ جب عہ قم خَ ' ما = جم ضہ جم عہ قم خَ ' ی = جب ضہ قم خَ.

اگر ن وہ نسبت ہو جو مُشاہد سے چاند کے فاصلہ کو زمین کے مرکز سے چاند کے فاصلہ کے ساتھ ہے تو مشاہدہ کے مقام سے چاند کا فاصلہ ن قم خَ ہوگا اور اِس فاصلہ کے ظِل متذکرۂ بالا تین محوروں پر علی الترتیب

ن جم ضَہ جب عَہ قم خَ ' ن جم ضَہ جم عَہ قم خَ ' ن جب ضَہ قم خَ.

ہوں گے۔ اس لیے

جم ضہ جب عہ قم خَ = ن جم ضَہ جب عَہ قم خَ + غہ جم فَہ جب تہ '

جم ضہ جم عہ قم خَ = ن جم ضَہ جم عَہ قم خَ + غہ جم فَہ جم تہ '

جب ضہ قم خَ = ن جب ضَہ قم خَ + غہ جب فَہ

اِن کو حسب ذیل تبدیل کیا جا سکتا ہے:

ن جم ضَہ جب عَہ = جم ضہ جب عہ - غہ جم فَہ جب خَ جب تہ '

ن جم ضَہ جم عَہ = جم ضہ جم عہ - غہ جم فَہ جب خَ جم تہ '

ن جب ضَہ = جب ضہ - غہ جب فَہ جب خَ

ضابطوں (۱) کو ن سے ضرب دینے اور اوپر کے جملوں کے ذریعہ عَہ اور ضَہ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ن جب فا جب طہ = -جم ضہ جب (عہ - ص) + غہ جم فَہ جب خَ جب (تہ - ص)

ن جب فا جم طہ = جب ضہ جم مہ - جم ضہ جب مہ جم (عہ - ص)

- غہ جب خَ {جب فَہ جم مہ - جم فَہ جب مہ جم (تہ - ص)} ..(۲)

ن جم فا = جب ضہ جب مہ + جم ضہ جم مہ جم (عہ - ص)

- غہ جب خَ {جب فَہ جب مہ + جم فَہ جم مہ جم (تہ - ص)}

(۳۷۹) اِن ضابطوں سے فا اور طہ معلوم ہو سکتے ہیں اور وہ احتجابات کے مطالعہ کے لیے بالخصوص موزوں ہیں کیونکہ احتجاب کے آغاز یا اختتام پر ستارہ چاند کے کنارہ پر ہوتا ہے اور اس لیے فا = رَچ - چونکہ چاند کے نیم قطر کی جیب اُسکے فاصلہ کے بالعکس بدلتی ہے اِس لیے ن جب رَچ = جب رچ اور اِس لیے

ن جب فا = جب رج - مساوات نمبر (۲) میں اسکو داخل کرنے سے حسب ذیل اہم ضابطے حاصل ہوتے ہیں جو ایک محجوب ستارہ کے احتجاب یا بازنمودگی کے لمحوں پر درست ہیں :-

جب رج جب طہ = - جم ضہ جب (عہ - ص)
+ غہ جب خَ جم فہَ جب (تہ - ص)
جب رج جم طہ = جب ضہ جم مہ - جم ضہ جب مہ جم (عہ - ص)
- غہ جب خَ {جب فہَ جم مہ - جم فہَ جب مہ جم (تہ - ص)} ...(۳)

یہ ظاہر ہے کہ رج اور خَ کے درمیان حسب ذیل مستقل ربط ہے :

جب خَ \ جب رج = زمین کا نصف قطر \ چاند کا نصف قطر

وہ نسبت جو چاند کے نصف قطر کو زمین کے نصف قطر کے ساتھ ہے ک کہلاتی ہے اور ۰٫۲۷۲۵ کے مساوی ہے - اس لیے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

ک جب طہ = - جم ضہ جب (عہ - ص) قم خَ + غہ جم فہَ جب (تہ - ص)
ک جم طہ = {جم ضہ جم مہ - جم ضہ جب مہ جم (عہ - ص)} قم خَ
- غہ {جب فہَ جم مہ - جم فہَ جب مہ جم (تہ - ص)} ...(۴)

بالآخر مربع لینے اور جمع کرنے سے حسب ذیل اساسی مساوات حاصل ہوتی ہے جس میں احتجاب کے آغاز یا اختتام کے وقت کا نظریہ شامل ہے:

ک^2 = {جم ضہ جب (عہ - ص) قم خَ - غہ جم فہَ جب (تہ - ص)}^{2}
+ [{جب ضہ جم مہ - جم ضہ جب مہ جم (عہ - ص)} قم خَ
- غہ {جب فہَ جم مہ - جم فہَ جب مہ جم (تہ - ص)}]^2 ...(۵)

اگر مشاہد کے محدد دئے جائیں تو اس مساوات میں صرف وقت تہ مجہول مقدار ہے - پس تہ کے لیے اس مساوات کو حل کرنے سے احتجاب کے آغاز یا اختتام کا لمحہ معلوم ہوگا -

تہ کی یہ مساوات لازماً ایک علوی مساوات ہے کیونکہ وہ لامتناہی وقت میں تمام ممکن احتجابات کو تعبیر کرتی ہے۔ کسی مخصوص احتجاب پر اس کو استعمال کرنے کے لیے تقریبی طریقے استعمال کرنے ہونگے۔

فرض کرو کہ مفروضہ وقت تـا ہے جو اصلی وقت تـا + ت کے بہت قریب ہے جس پر کوئی خاص احتجاب واقع ہوتا ہے، اس طرح ت ایک چھوٹی مقدار ہے اور مساوات کی رقمیں ت کی قوتوں کے ایک سریع متدق سلسلہ میں پھیلائی جا سکتی ہیں۔ (۳۸۰)

ہم رکھیں گے

$$\left.\begin{array}{l} \text{جم ضہ جب (عہ - ص) قم خَ = ف + فَ ت ،} \\ \text{\{جب ضہ جم مہ - جم ضہ جب مہ جم (عہ - ص)\} قم خَ = ق + قَ ت ،} \\ \text{ر جم فہ جب (تہ - صں) = ۶ + ۶َ ت ،} \\ \text{ر \{جب فہ جم مہ - جم فہ جب مہ جم (تہ - صں)\} = و + وَ ت} \end{array}\right\} \cdots (6)$$

یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ وقت تـا کے لیے ف، ق، ۶، و کی قیمتیں محسوب کر لی گئی ہیں اور فَ، قَ، ۶َ، وَ وہ رقمیں ہیں جن میں ت آتا ہے جس کے لیے ہم اول تقریبی قیمت صفر مان سکتے ہیں۔

تب مساوات (۵) ہو جاتی ہے

$$\text{ک}^2 = \{\text{ف} - ۶ + (\text{فَ} - ۶َ)\,\text{ت}\}^2 + \{\text{ق} - \text{و} + (\text{قَ} - \text{وَ})\,\text{ت}\}^2$$

اسکو حل کرنے سے ت معلوم ہوگا جس کو پھر فَ، قَ، ۶َ، وَ میں درج کر سکتے ہیں اور اس طرح حل کی تکرار سے ت کی زیادہ صحیح قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

اِن مساواتوں کے حل میں سہولت پیدا کرنیکے لیے ہم رکھتے ہیں

$$\left.\begin{array}{l} \text{ف - ۶ = ب جب ب ، فَ - ۶َ = ج جب ج} \\ \text{ق - و = ب جم ب ، قَ - وَ = ج جم ج} \end{array}\right\} \cdots\cdots (7)$$

جہاں ب، ج، ب، ج چار معاون مقداریں ہیں۔ پس

ک^{2} = (ب جب ب + ج جب ج ت)^{2} + (ب جم ب + ج جم ج ت)^{2}

= ب^{2} جب^{2} (ب - ج) + {ب جم (ب - ج) + ج ت}^{2}

اب ہم ایک اور معاون مقدار سا ایسی داخل کرتے ہیں کہ

ب جب (ب - ج) = ک جم سا

تو ک^{2} جب^{2} سا = {ب جم (ب - ج) + ج ت}^{2}

یا ج ت = - ب جم (ب - ج) ∓ ک جب سا

ہم مان لیتے ہیں کہ سا، ۱۸۰° سے کم ہے، پس اوپر کی علامت چاند کے پیچھے ستارہ کے غائب ہونے کے متناظر ہے اور نیچے کی علامت اِس کی بازنمودگی کے متناظر۔

اگر ب جب (ب - ج) > ک

تو سا خیالی ہے اور کوئی احتجاب واقع نہیں ہوگا۔ اِس نتیجہ کے اخذ کرنے میں یہ یاد رکھنا واجب ہے کہ اس کا تصفیہ کرنے کے لیے کہ آیا یہ شرط ٹھیک ٹھیک پوری ہوتی ہے مزید تقرب کی ضرورت ہو سکتی ہے۔ اِس کا امتحان کرنے کے لیے ہم ت کی اوسط قیمت

- ب جم (ب - ج) / ج

(۲۸۱) لیتے ہیں اور اس قیمت کو ف، ق، ع، و میں داخل کرتے ہیں اور عمل حساب کو دہرا کر یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ آیا سا ایک حقیقی مقدار ہے۔

اگر ستارہ کا احتجاب ہے اور اِس مساوات کی دو اصلیں تَ اور تً بالآخر حاصل ہو چکی ہیں تو ستارہ کے احتجاب کا وقت ت + تَ اور اِس کی بازنمودگی کا وقت ت + تً متعین ہو جاتے ہیں۔

چاند کے کنارہ پر وہ نقطے معلوم کرنا جن پر ستارہ غائب اور بازنمود ہوتا ہے۔

ضابطوں (۴) میں (۶) سے درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

ک جب طہ = - ف - فَ ت + ع + عَ ت ،

ک جم طہ = ق + قَ ت - و - وَ ت

جو (۷) کی مدد سے لکھے جا سکتے ہیں

ک جب طہ = - ب جب ب - ج ت جب ج
ک جم طہ = + ب جم ب + ج ت جم ج } ... (۸)

ان میں سے پہلے ضابطہ میں ت کی قیمت داخل کرنے سے

ک جب طہ = - ب جب (ب - ج) جم ج ± ک جب ج جب سا

لیکن ب جب (ب - ج) = ک جم سا

اس لیے درج کرنے اور ک سے تقسیم کرنے سے

جب طہ = - جم (ج ± سا)

اسی طرح (۸) کے دوسرے ضابطہ سے

جم طہ = - جب (ج ± سا)

اور اس لیے

مس طہ = مم (ج ± سا) = مس {۹۰° - (ج ± سا)}

اس لیے طہ = ۱۸۰° × ع + ۹۰° - (ج ± سا)

جہاں ع کوئی صحیح عدد ہے، اس لیے

جب طہ = جم (۱۸۰° × ع) جم (ج ± سا)

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ

جب طہ = - جم (ج ± سا)

اس لیے جم (۱۸۰° × ع) = - ۱ یا ع = ۱

اور بالآخر طہ = ۲۷۰° - (ج ± سا)

پس ستارہ سے چاند کے مرکز کا زاویہ محل احتجاب یا بازنمودگی کے لمحہ پر حاصل ہوتا ہے۔ اس سے چاند کے کنارہ پر کے وہ نقطے معلوم ہوتے ہیں جن پر احتجاب اور بازنمودگی وقوع پذیر ہوتے ہیں۔

(۳۸۲) وہ زاویہ جو چاند کے مرکز پر ستارہ اور قطب کے محاذی احتجاب اور بازنمودگی کے لمحوں پر بنتا ہے تقریباً

۱۸۰° - ط = ج ± سا - ۹۰°

ہے۔

اِس طرح احتجاب کے مسئلہ کو حل کرنے کے ضروری ضابطے حاصل ہو چکے۔

عمل حساب کے اجرا میں سہولت پیدا ہو گی اگر ایفیمرس سے مدد لیجائے جس میں جدولیں دیجاتی ہیں اور اس سے کام آسان ہو جاتا ہے۔

مثال ۱ ۔ بتاریخ ۲۷ اکتوبر ۱۹۰۹ء بوقت نیم شب چاند کا میل ۴° ۳۶′ ۲۶″,۷ ہے اور اِس وقت اُس کا صعود مستقیم اور میل ہر دس منٹوں میں علی الترتیب ۲۳ث,۰ اور ۶۴′ سے بڑھ رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ بوقت نیم شب چاند کے ساتھ ایک ستارہ صعود مستقیم میں اقتران میں ہو تو اس اقتران کے وقت پر یا اس کے قریب ستارہ محجوب نہیں ہو سکتا اگر اس کا میل ۳° ۴۴′ ۱۰٫ سے کم ہو۔ یہ دیا گیا ہے کہ چاند کے نیم قطر اور افقی اختلاف منظر کا مجموعہ ۰۸۱٫۷′ ہے۔

چاند کی حرکت صعود مستقیم میں دس منٹوں کے وقفہ میں ۴۴′ ۳″ ہے۔

اِس لیے ساعتی دائرہ کے ساتھ چاند کی حرکت کا میلان

مس‾¹ (۳۴۴ \ ۱۶۴) = ۶۴° ۳۰′

ہے۔ اِس لیے چاند کے میل اور ستارہ کے میل کے درمیان فرق اقتران کے وقت پر

جب ۰۸۱٫۷′ × قم (۶۴° ۳۰′) = ۰٫۲۵۱ = جب ۱۴° ۸۶′

سے متجاوز نہیں ہونا چاہیے۔

مثال ۲ ۔ اگر چاند کے مدار کا میلان طریق الشمس کے ساتھ ۵° ۲۰′ ۶″ ہو تو ثابت کرو کہ چاند کسی نہ کسی وقت پر کسی ستارہ کو محجوب کرے گا جس کا عرض بلد شمالی یا جنوبی میں ۶° ۳۸′ ۲۴″ سے کم ہو۔

مثال ۳ ۔ ثابت کرو کہ ایک ستارہ جو طریق الشمس میں ہے زمین کے کسی مقام پر چاند سے ہر ایک موقع پر جبکہ چاند کے مدار کا عقدہ ستارہ میں سے گذرے اتنی مرتبہ محجوب ہو گا جس کی تعداد ۱۷ اور ۲۲ کے درمیان ہے۔ مان لو کہ چاند کا نیم قطر ۱۴′ ۶″ ۱۲′ اور ۱۴′ ۴۴″ کے درمیان ہے، چاند کا افقی اختلاف منظر ۱۸′ ۶۱ اور ۵۳′ ۵۸″

کے درمیان، اور چاند کے مدار کا میلان طریق الشمس کے ساتھ ۵° ۱۹َ اور ۴° ۵۷َ کے درمیان ہے۔ [Math. Trip.]

مثال ۴ — بتاریخ ۲۹، فروری ۱۸۸۴ء چاند سے زہرہ کا احتجاب واقع ہوا۔ اخبار ٹائمز میں یہ بیان کیا گیا کہ زہرہ نصف النہار پر بوقت ۳۰ء۲ ب۔ظ ہوگا اور اُس وقت چاند تین دن کا تھا اور نیز یہ کہ احتجاب کا عرصہ تقریباً سوا گھنٹہ ہوگا۔ تخمیناً معلوم کرو کہ اس کا آغاز کب ہوا اور ثابت کرو کہ احتجاب کے وقفہ سے متعلق ٹائمز کا بیان چاند کے معلومہ زاوئی قطر کا لحاظ کرتے نادرست نہیں ہے۔
[Math. Trip.]

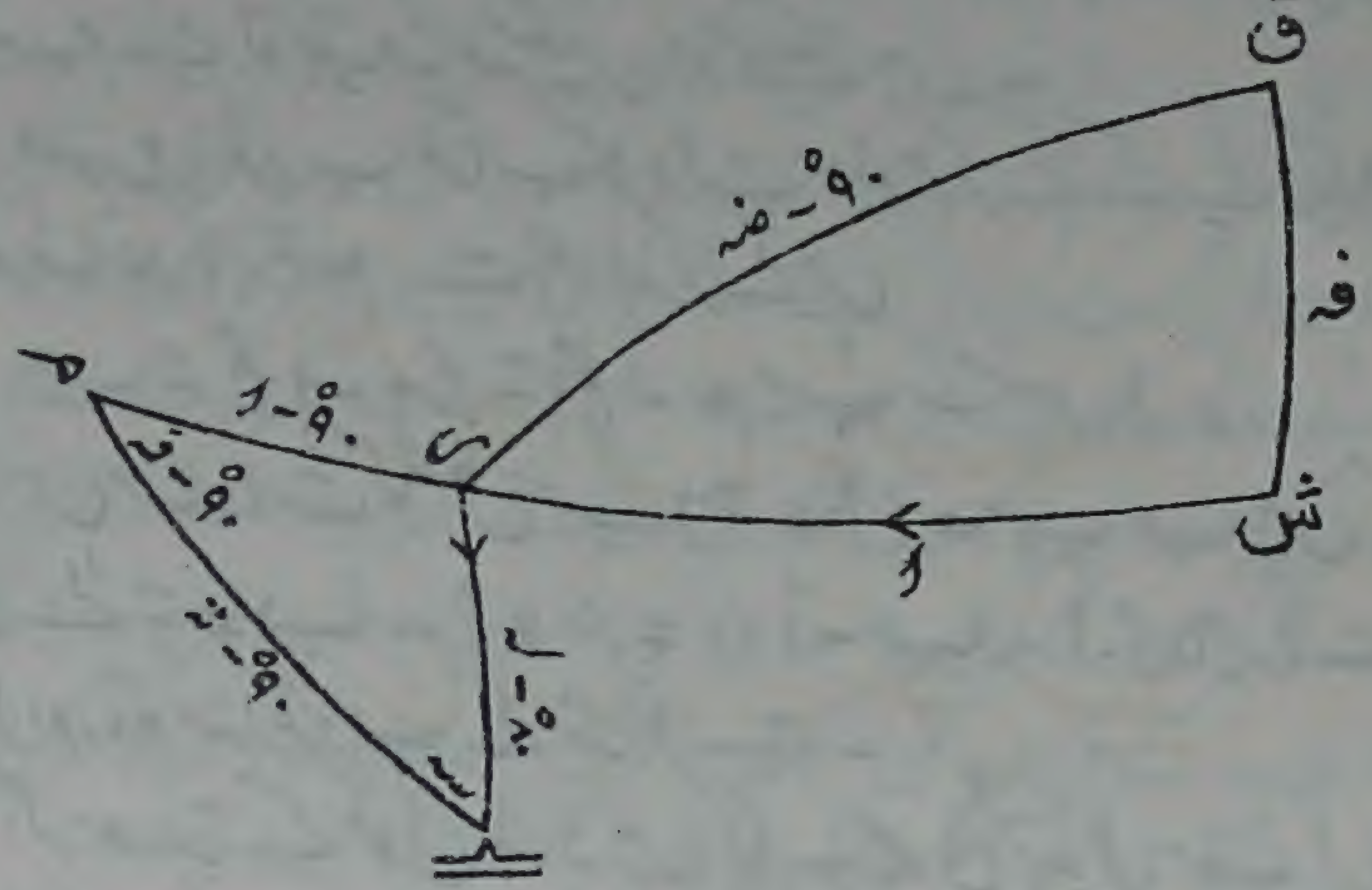
انیسواں باب (۳۸۳)

سورج اور چاند سے متعلق مسئلے

دفعہ — صفحہ

۱۲۷ — طلوع اور غروب کے مظاہر —

فرض کرو کہ طلوع کے وقت سورج س ہے (شکل ۹۴)، میزان ≏، افق م ر ش، طریق الشمس ر ≏، خط استواء م ≏۔ چونکہ م مشرقی نقطہ ہے اِس لیے خط استواء کو م سے آگے سمت ≏ تا م یں ۹۰° کے لیے خارج کرنے پر وہ نصف النہار سے ملیگا اور پھر کوکبی وقت تہ کے مساوی



شکل (۹۴)

فاصلہ میں سے خارج کرنے پر وہ راس الحمل ♈ سے ملیگا۔ اِس لیے

م سط = ۹۰° - تہ

سورج کا طول بلد لہ ہے اور س سط = ۱۸۰° - لہ کیونکہ لہ، ♈ سے تیر کی سمت میں ناپا جاتا ہے۔ طلوع ہونے والے سورج کا السمت ا ہے جو افق کے شمالی نقطہ ش سے حسب معمول سمت (مشرق اور جنوب سے ہوتے ہوے) میں ناپا گیا ہے۔ ق قطب ہے اور ق ش = فہ، قطب کا ارتفاع افق کے اوپر۔ خط استواء اور افق کے درمیان م پر کا زاویہ ۹۰° - فہ کے مساوی ہے کیونکہ یہ راس سے قطب کا فاصلہ ہے۔ طریق الشمس کا میلان افق کے ساتھ ۱۸۰° - ن ہے (دفعہ ۱۰) اور طریق الشمس کا میلان خطِ اُستواء کے ساتھ سہ ہے۔

مثلث م س سط کے ذریعہ متعدد سوالات جو سورج کے طلوع اور غروب کے متعلق تجویز ہو سکتے ہوں حل ہو سکتے ہیں۔ اگر ہم یہ مان لیں کہ

فہ اور سہ دئے گئے ہیں اور اس مثلث کے دوسرے عنصروں میں سے ایک معلوم ہے تو بقیہ عناصر متعین ہو سکتے ہیں۔

طلوع یا غروب آفتاب کا وقت معلوم کرنے کے لیے جبکہ طول بلد لہ دیا گیا ہو ضابطہ ۶ دفعہ ۱ سے ہم اخذ کرتے ہیں

جب تہ جم سہ + جم تہ مم لہ + جب سہ مس فہ = ۰ .... (۱)

اس مساوات کو شکل جب (تہ + ۱) = جب ب میں رکھا جا سکتا ہے، اس لئے تہ = ب - ۱ یا تہ = ۱۸۰° - ب - ۱ جن میں سے ایک طلوع کے متناظر اور دوسرا غروب کے متناظر ہے۔

اگر سورج کے طول بلد لہ میں ایک چھوٹی تبدیلی مف لہ واقع ہو تو اِس کے جواب میں طلوع یا غروب آفتاب کے کوکبی وقت میں مف تہ کی تبدیلی واقع ہوگی۔ مف لہ اور مف تہ کے درمیان رشتہ اس مساوات کو تفرق کرنے سے حاصل ہوگا جبکہ سہ اور فہ کو مستقل سمجھا جائے۔ اس طرح معلوم ہوتا ہے کہ

جب لہ (جب لہ جم تہ جم سہ - جم لہ جب تہ) مف تہ = جم تہ مف لہ

لیکن مثلث م ر ؎ سے فوراً حاصل ہوتا ہے

جب ا = جب لہ جم تہ جم سہ - جم لہ جب تہ

اسلیے مف تہ = جم تہ قم لہ قم ا مف لہ

نیز جم تہ قم لہ = جب ن قط فہ، مثلث م ر ؎ سے

اور جم ا = جب ضہ قط فہ، مثلث ق ر ش سے

اس لیے قم ا = جم فہ \ (جم² ضہ - جب² فہ)^½ (۲۸۵)

اس لیے بالآخر مف تہ = جب ن (جم² ضہ - جب² فہ)^-½ مف لہ ... (۲)

اس مساوات سے طلوع آفتاب کے وقت میں روزانہ جو تاخیر واقع ہوتی ہے وہ معلوم ہوتی ہے اور نیز اس سے چاند کے طلوع سے متعلق بعض مظاہر کی تشریح بھی ہوتی ہے ہم موجودہ مقصد کے لیے چاند کے مدار کو طریق الشمس کے

مستوی میں فرض کر سکتے ہیں کیونکہ اس کا میلان طریق الشمس کے مستوی کے ساتھ تقریباً ۵° ہے۔ طریق الشمس کا قطب، ق کے گرد نصف قطر ۲۳°۵ کا ایک چھوٹا دائرہ مرتسم کرتا ہے اور جب وہ راس سے قریب ترین پہنچتا ہے تو ن کی کم سے کم قیمت ہوتی ہے۔ اگر چاند حمل میں ہو تو جم ضہ = ا اور مف تہ \ مف لہ کے لیے جو جملہ ہے اس کا نسب نما بڑے سے بڑا ہے۔ ان دو وجوہ کی بنا پر چاند کے طلوع کے وقت میں روزانہ تاخیر ایک چھوٹی مقدار ہے۔ اگر اسی زمانہ میں سورج میزان میں ہو تو چاند پورا ہوگا اور اسی لیے اعتدال خریف کے قریب کئی متصلہ راتوں تک چاند تقریباً ایک ہی وقت طلوع ہوتا رہے گا۔ یہ مظہر **فصلی چاند** کے طور پر مشہور ہے۔

اگر ا معلوم کرنا مطلوب ہو جو اس نقطہ کا السمت ہے جس پر کوئی جرم فلکی طلوع یا غروب ہوتا ہے تو اس کے لیے حسب ذیل مساواتیں ہیں

جب ن جب ا = جم سہ جم فہ + جب سہ جب فہ جب تہ

جب ن جم ا = جب سہ جم تہ

ان سے مس ا معلوم ہو سکتا ہے جبکہ تہ معلوم ہو۔

مثال ا۔ ثابت کرو کہ دائرہ قطب شمالی کے کسی مقام پر ایک ششماہی کے لیے طلوع آفتاب کا کوکبی وقت ۱۸ گ ہے اور دوسری ششماہی کے لیے غروب آفتاب کا ۱۸ گ۔ نیز ثابت کرو کہ افق کے اس نقطہ کا السمت جہاں سورج طلوع ہوتا ہے سالتمام ۹۰° - ل یا ۲۷۰° - ل رہتا ہے جہاں ل سورج کا طول بلد ہے اور السمت کی پیمائش نصف النہار کے قریب ترین نقطہ سے کی گئی ہے۔ [Math. Trip.]

دن میں ایکبار طریق الشمس کا قطب راس میں سے گذرتا ہے۔ اس وقت سورج طلوع یا غروب ہو رہا ہوگا بو جب اس کے کہ وہ نصف النہار سے مشرق یا مغرب میں ہو لیکن چونکہ ۷ " افق کے نقطہ م پر ہوتا ہے اس لیے کوکبی وقت ۱۸ گ ہے۔

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ دائرہ قطب شمالی کے کسی مقام پر غروب آفتاب کے نقطہ کا روزانہ ہٹاؤ، طول بلد میں سورج کی روزانہ تبدیلی کے مساوی ہے۔

مثال ۳ — ثابت کرو کہ اعتدال ربیع کے قریب طلوع آفتاب کا کوکبی وقت دائرۂ قطب شمالی کے اندرونی مقاموں پر گھٹتا اور نصف کرۂ شمالی کے دوسرے مقاموں پر بڑھتا جاتا ہے۔
[Math. Trip.]

عام مساوات (۱) میں ہم لہ کو چھوٹا کرتے ہیں تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

جم تہ + لہ (جب تہ جم سہ + جب سہ مس فہ) = ۰ (۳۸۶)

لیکن اعتدال ربیع کے قریب زمانہ میں طلوع آفتاب کے وقت

تہ = ۲۷۰° − لا

جہاں لا بہت چھوٹا ہے، اس لیے

لا جم فہ = − لہ جب (۹۰° − سہ − فہ)

اس لیے لا مثبت ہے اگر فہ > ۹۰° − سہ۔

مثال ۴ — افق کے جن انتہائی نقطوں پر سورج ایک سال کے دوران میں بوقت طلوع نظر آتا ہے اُن کا زاویٔی فاصلہ مشاہدہ کر کے عرض بلد معلوم کرو۔ اور اگر اُس نقطہ سے جہاں سورج طلوع ہوتا ہے اِن انتہائی نقطوں کے فاصلے عہ، بہ ہوں جبکہ سورج کا میل ضہ ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ضہ} = \text{جب سہ}\;\frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{عہ} + \text{بہ})}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{عہ} - \text{بہ})}$$

جہاں طریق الشمس کا میلان سہ ہے۔ [Coll. Exam.]

اگر طلوع کے وقت انتہائی السمت شمالی نقطہ سے $ذ_1$ اور $ذ_2$ ہوں تو

مس $ذ_1$ = م اور مس $ذ_2$ = −م جہاں

$$\text{م} = (\text{مم}^2\,\text{سہ}\;\text{جم}^2\,\text{فہ} - \text{جب}^2\,\text{فہ})^{\frac{1}{2}}$$

اگر طلوع آفتاب کے وقت جبکہ اُس کا میل ضہ ہے السمت ذ ہو تو

ذ = جم^{-1} (جب ضہ قط فہ) اس لیے

$$\frac{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{عہ} + \text{بہ})}{\text{جب}\,\tfrac{1}{2}(\text{عہ} - \text{بہ})} = \frac{\text{جب عہ} + \text{جب بہ}}{\text{جب}\,(\text{عہ} - \text{بہ})} = \frac{\text{جب}(ذ_1 - ذ) + \text{جب}\,(ذ_2 - ذ)}{\text{جب}\,(ذ_1 - ذ_2)}$$

جب ضہ قم سہ = م جم ا - جب ا + م جم ا + جب ا √ ۱ + م² / ۲ م

مثال ۵ ـ ثابت کرو کہ کیمبرج کے عرض بلد ۵۲° ۱۳َ میں طلوع آفتاب کے وقت کی اقل تاخیر دن بہ دن تقریباً ۹۶ ثانیہ ہے۔ یہ معلوم ہے کہ طریق الشمس کا میلان ۲۳° ۲۷َ ہے اور سورج کے صعود مستقیم کا روزآنہ اضافہ اعتدال ربیع پر ۳م ۳۸ش ہے۔

[Coll. Exam.]

بالعموم

مف تہ = جب ن (جم² ضہ - جب² فہ)^(-½) مف لہ

اقل تاخیر کی صورت میں ن = ۹۰° - فہ - سہ اور ضہ = ۰، اس لیے

مف تہ = جم (سہ + فہ) قط فہ مف لہ

لیکن یہ دیا گیا ہے کہ جم سہ × مف لہ = ۳م ۳۸ش، اس لیے مف تہ = ۹۶ش

مثال ۶ ـ عرض بلد ۴۵° میں ثابت کرو کہ طلوع آفتاب سے ظاہری ظہر تک اور ظاہری ظہر سے غروب آفتاب تک جو وقفے ہیں ان کے درمیان فرق

د/۳۶۵ مس ضہ قط ضہ (قط ۲ ضہ)^½ جم (۳۶۰° ت\۳۶۵)

ہے جہاں دن کا طول د، سورج کا میل ضہ، اعتدال ربیع سے ایام کی تعداد ت ہے اور زمین کے مدار کو دائری فرض کیا گیا ہے۔

مثال ۷ ـ ثابت کرو کہ سورج کا قرص پوری طرح افق کے اوپر اٹھ آنے میں جو وقت لیتا ہے وہ انقلابوں پر زیادہ سے زیادہ اور اعتدالوں پر کم سے کم ہوتا ہے۔

[Coll. Exam.]

فرض کرو کہ راسی فاصلہ ی ہے اور ساعتی زاویہ حسب معمول س ہے تو

جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س

تفرق کرنے سے

جب ی × مف ی = جم فہ جم ضہ جب س × مف س

اور اگر ی = ۹۰° تو

مف س = مف ی قط فہ قط ضہ قم س .... (۱)

اگر فرس میں وقت کے ثانیوں کی تعداد ن ہو اور سورج کا قطر (۳۸۷)
قوس کے ثانیوں میں ق ہو تو (۱) سے س کو ساقط کرنے سے

ن = $\frac{1}{15}$ ق (جم^2 فہ - جب^2 ضہ)$^{-\frac{1}{2}}$

اور ن بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ جب ضہ بڑے سے بڑا ہو۔

مثال ۸ — جب سورج کا میل ضہ ہوتا ہے تو وہ ایسے نقطہ پر طلوع ہوتا ہے جس کا فاصلہ طلوع کے انتہائی نقطوں سے عہ اور بہ ہے۔ ثابت کرو کہ

مس $\frac{1}{2}$ عہ : مس $\frac{1}{2}$ بہ :: مس $\frac{1}{2}$ (سہ + ضہ) : مس $\frac{1}{2}$ (سہ - ضہ)

[Math. Trip 1. 1900]

مثال ۹ — ایک مقام پر جو عرض بلد فہ میں ہے ایک دن سورج ظہر سے گ گھنٹے قبل طلوع ہوتا دیکھا گیا اور اس کے دوسرے دن م منٹ دیر سے طلوع ہوا۔ پہلے دن سورج کا میل ضہ تھا۔ ثابت کرو کہ افق کے اِن دو نقطوں کے درمیان جن پر وہ طلوع ہوا تھا قوس کے منٹوں میں فاصلہ

۱۵ م جم^2 ضہ قم فہ ہے۔ [Coll. Exam.]

مثال ۱۰ — ایک مشاہد جو عرض بلد ۴۵° میں ہے ایک پہاڑی پر جس کی بلندی ایک بحری میل کا $\frac{1}{ن}$ حصہ ہے چڑھتا ہے۔ ثابت کرو کہ وہ ایک ستارہ کو جو شمال مشرق نقطہ پر طلوع ہوتا ہے تقریباً ۸ $\sqrt{۶ \backslash ن۳}$ منٹ قبل دیکھتا ہے بہ نسبت اس کے کہ وہ نیچے رہ کر اُسے طلوع ہوتے دیکھتا۔

[Math. Trip.1.]

حسب مثال (۷) مساوات (۱)

مف ی = جم فہ جم ضہ جب س مف س

لیکن اب جم ضہ جب س = ۱ \ $\sqrt{۲}$ ، جم فہ = ۱ \ $\sqrt{۲}$

اس لیے مف س = ۲ مف ی

افق کے ایک نقطہ اور زمین کے مرکز کے محاذی مُشاہد کے مقام پر زاویہ

۹۰° ۔ مف ی بنتا ہے جہاں مف ی = {۲ بلندی \ زمین کا نصف قطر}^½ اور اس لیے

مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے ۔ مف ی کو افق کا میلان کہتے ہیں۔

مثال ۱۱ ـــ غروب ہوتا ہوا سورج افق سے زاویہ طہ پر آکر ملتا ہے ۔ ثابت کرو کہ عرض بلد فہ میں سال کے اُس زمانہ میں جبکہ سورج کا میل ضہ ہو ایک پہاڑ جس کی بلندی زمین کے نصف قطر کا ۱/ن ہے سورج کی شعاعوں سے صبح میں ۱۲ \ ۲ ن قم طہ × قط ضہ \ ۱۵ ن گھنٹے قبل منور ہو گا بہ نسبت اس کے کہ سورج پہاڑ کے قاعدہ کے مُستوی پر طلوع ہو ۔ نیز قریب ترین منٹ تک اِس جملہ کی قیمت انقلاب سرما پر ایک ایسے پہاڑ کے لیے محسوب کرو جس کی بلندی تین میل ہے اور جو عرض بلد ۴۵° میں واقع ہے ۔

[Math. Trip.1.]

مثال ۱۲ ـــ ثابت کرو کہ عرض بلد فہ کے ایک مقام پر اعتدالین کے وقت آفتاب ایک پہاڑ کی چوٹی سے جس کی بلندی ب فٹ ہے پہاڑ کے دامن کی بہ نسبت تقریباً ۴ \ ب قط فہ ثانیے قبل طلوع ہوتا نظر آئیگا۔

[Coll. Exam.]

مثال ۱۳ ـــ ایک خاص مقام پر چاند دو متصلہ دنوں میں ایک ہی گوکبی وقت پر طلوع ہوتا ہے ۔ ثابت کرو کہ یہ مقام دائرہ قطب شمالی یا جنوبی کے پانچ درجوں کے اندر واقع ہے ۔

[Coll. Exam.]

جب چاند کے مدار کا مُستوی افق پر منطبق ہوتا ہے تو متصلہ ایام میں طلوع کا کوکبی وقت ایک ہی ہو گا ۔

مثال ۱۴ ـــ ثابت کرو کہ مہینہ میں ایک بار اُن مقاموں پر جن کا عرض بلد لنڈن کے عرض بلد کے تقریباً مساوی ہے چاند مسلسل دو یا تین دن تک غروب کی ساعت میں کم سے کم تاخیر کے ساتھ غروب ہوتا ہے ۔ نیز تقریباً معلوم کرو کہ جب یہ منظر جون میں واقع ہوتا ہے تو چاند کتنے دنوں کا ہو گا اور دن کے کون سے وقت یہ منظر واقع ہو گا ۔

چاند میزان میں ہونا چاہئے اور ماہ جون میں سورج سرطان میں ہوگا۔ اُسوقت چاند اپنے پہلے ربع سے قریب ترین ہوگا اور تقریباً بوقت نیم شب غروب ہوگا۔

مثال ۱۵ — فرض کروکہ افقی انعطاف ۳۵َ اور سورج کا نیم قطر ۱۶َ ہے اور روز روشن کے آغاز اور اختتام کی تعریف اُن لمحوں سے کی گئی ہے جن پر سورج کا اوپر کا کنارہ افق پر عین نظر آتا ہے۔ ثابت کروکہ روز روشن کی مدت میں اضافہ، انعطاف اور نیم قطر کو زیر حساب رکھ کر، اعتدالین پر ۸ء۶م قط فہ سے انقلابوں پر

$$۸ء۶^{م} \{قط (فہ + سہ) قط (فہ - سہ)\}^{\frac{1}{2}}$$

تک متغیر ہوتا ہے۔ [Coll. Exam. 1902]

س کو ساقط کرنے کے بعد مثال ۷ کی مساوات (۱) لکھی جا سکتی ہے

$$مف س = \{قط (فہ - ضہ) قط (فہ + ضہ)\}^{\frac{1}{2}} مف ی$$

مف ی = ۳۵َ + ۱۶َ یا وقت میں ۴ء۳م اور طلوع اور غروب پر روز روشن کا کُل اضافہ ۲ مف س ہے۔

مثال ۱۶ — ثابت کروکہ خط استواء کے نزدیک وہ مظہر جو فصلی چاند کے طور پر موسوم ہے اِس قدر نمایاں نہیں ہوگا جس قدر منطقات معتدلہ میں لیکن وہ ہر اعتدال پر تکرار پائیگا۔ [Math.Trip . 1902]

خط استواء پر ن = ۹۰° - سہ، ن کی کم سے کم قیمت ہے اور ہر اعتدال پر اِس کی یہی قیمت ہے اور مساوات

$$مف تہ = جم سہ مف لہ$$

سے کم سے کم تاخیر معلوم ہوتی ہے۔

مثال ۱۷ — ایک مقام کا ارض مرکزی عرض بلد $مم^{-1}$ (۳/۴ جب سہ) ہے، اِس کے افق پر دو ستارے ایک ساتھ کوکبی وقت گ پر نمودار ہوتے تھے۔ ثابت کروکہ جب استقبال ۹۰° پر پہنچیگا تو یہ ستارے ایک مقام کے افق پر جس کا عرض بلد سہ + $مم^{-1}$ (۲ مس سہ) ہے کوکبی وقت ۲گ پر ایک ساتھ نمودار ہونگے

جہاں سہ طریق الشمس کا میلان ہے۔

اگر ان میں سے ایک ستارہ کا صعود مستقیم عہ اور میل ضہ ہو تو

مس ضہ = - مم (عرض بلد) جم عہ = - $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ جب سہ جم عہ

دفعہ ۵۷ کے عام ضابطوں میں ہم رکھتے ہیں ک = ۶۰° اور سہ = سہَ تو حاصل ہوتا ہے

جب ضہَ = - $\frac{1}{2}$ جب سہ جم سہ جم ضہ (جب عہ + $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ جم سہ جم عہ)

جم ضہَ جب عہَ = $\frac{1}{2}$ جم ضہ (۱ + جب^2 سہ) (جب عہ + $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ جم سہ جم عہ)

اس لیے جب ضہَ \ جم ضہَ جب عہَ = - جب سہ جم سہ \ (۱ + جب^2 سہ)

لیکن ستارہ عہَ، ضہَ کے لیے جو عرض بلد فہَ رکھتا ہے حاصل ہوتا ہے

جب ضہَ جب فہَ + جم ضہَ جم فہَ جب عہَ = ۰

اس لیے مس فہَ = (۱ + جب^2 سہ) \ جب سہ جم سہ

اور فہَ = سہ + مم$^{-1}$ (۲ مس سہ)

۱۲۸ — سورج کے طلوع یا غروب کا اوسط وقت معلوم کرنا۔

ضابطہ

جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم س .... (۱)

سے ہم آسانی کے ساتھ ثابت کر سکتے ہیں کہ

مس $\frac{1}{2}$ س = ± {جب $\frac{1}{2}$ (ی + فہ + ضہ) جب $\frac{1}{2}$ (ی - فہ - ضہ) قط $\frac{1}{2}$ (ی + فہ - ضہ) قط $\frac{1}{2}$ (ی - فہ + ضہ)}$^{\frac{1}{2}}$

(۳۸۹) اگر مشاہد کا عرض بلد فہ ہو اور ایک جرم فلکی کا میل جس کا اختلاف منظر ناقابل قدر ہے ضہ ہو تو اس کے طلوع یا غروب کے وقت ساعتی زاویہ س ہوگا اگر ہم افقی انعطاف کو ۳۵ََ اور ی = ۹۰° ۳۵َ لیں۔

اگر وہ جرم جس کے طلوع کا وقت معلوم کرنا ہے ایک ستارہ ہو تو وہ وقت جس میں وہ نصف النہار تک پہنچتا س کو کبھی گھنٹے ہوتا۔ سورج کی صورت میں

اِس کی ظاہری سالانہ حرکت کی وجہ سے اَفلاک میں اس کی حقیقی حرکت ستارہ کی حرکت سے سُست ہوتی ہے۔ بلاشبہ حرکت کی مقدار حالات کی بموجب متغیر ہوتی ہے لیکن اوسطاً ساعتی زاویہ میں سورج کی حرکت، ساعتی زاویہ میں ایک ستارہ کی حرکت کے لحاظ سے اُس نسبت میں ہوتی ہے جو اوسط شمسی وقت کو کوکبی وقت کے ساتھ ہے۔ موجودہ زیر بحث صورت میں ہم کافی صحت کے ساتھ ہمیشہ یہ تسلیم کر سکتے ہیں کہ سورج کی حقیقی حرکت وہی ہے جو اس کی اوسط حرکت ہے اور اس لیے سورج طلوع کے بعد اوسط شمسی وقت کے س گھنٹوں میں نصف النہار پر پہنچتا ہے۔

حقیقی ظہر پر ظاہری وقت ۱۲ گ ہوتا ہے اور اوسط وقت ۱۲ گ + صہ جہاں صہ وقت کی مساوات ہے۔ طلوع آفتاب، س اوسط گھنٹوں قبل واقع ہو چکتا ہے اور اس لیے طلوع کا کاروباری وقت

$$۱۲^{گ} + صہ - س$$

ہے۔

اِس طرح طلوع کی ساعت ایک یا دو منٹ کے اندر تک صحیح معلوم ہوتی ہے اور پھر اس وقت سورج کا میل صحیح طور پر حاصل کیا جا سکتا ہے اور اِس تصحیح یافتہ میل کے ذریعہ س کو محسوب کرنے کا عمل دُہرایا جا سکتا ہے اور اس طرح طلوع کا زیادہ صحیح وقت معلوم ہوتا ہے۔ لیکن یہ تکلیف اٹھانا غیر ضروری ہے کیونکہ پھر بھی عمل حساب افقی انعطاف سے متاثر رہتا ہے جس کی مقدار بالکل غیر یقینی ہے۔ ہم نے اِسے ۳۵َ اختیار کیا ہے لیکن وہ اس سے کم از کم ۱َ کا فرق رکھ سکتا ہے۔

غروب آفتاب کا اوسط وقت معلوم کرنے میں ہم دیکھتے ہیں کہ ظاہری ظہر پر صحیح اوسط گھڑی وقت صہ دکھاتی ہے اور غروب آفتاب اوسط شمسی وقت کے س گھنٹوں بعد واقع ہو گا، اِس لیے غروب آفتاب کا وقت ہے:

$$صہ + س$$

مثلاً ہم سورج کے طلوع اور غروب کا وقت گرینوچ (عرض بلد ۵۱° ۲۹′)
پر بتاریخ ۶ جون ۱۹۰۵ء معلوم کریں گے۔ الفیمرس سے ضہ = ۲۲° ۳۹′ اسلیے
(۱) سے س = ۱۲۲° ۴۹′ یا وقت میں ۸گ ۱۱؛۳م۔ یہ سورج کا ساعتی زاویہ ہے
جبکہ وہ ظاہری طور پر افق پر تھا۔ وقت کی مساوات ۔ ۱؛۶م ہے اور اسے ۱۲گ
+ صہ ۔ س اور س + صہ میں درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ سورج کے طلوع (۳۹۰)
اور غروب کے اوقات علی الترتیب ۳گ ۴۷م ب۔ن اور ۸گ ۱۰م ب۔ظ ہیں۔

انقلاب کے قریب زمانہ میں سورج کا میل اپنی اوسط قیمت سے تقریباً
اَ سے زیادہ ایک ہفتہ میں متغیر نہیں ہوتا۔ اِس لیے اس ہفتہ میں س تقریباً
مستقل ہوگا اور اِس لیے طلوع اور غروب کے اوسط اوقات میں اگر کوئی تبدیلیاں
ہوں تو وہ صرف وقت کی مساوات کی تبدیلیوں سے منسوب کی جا سکتی ہیں۔
اِس کا خفیف اثر انقلاب سرما پر دکھائی دیتا ہے۔ اِس وقت وقت کی
مساوات بڑھتی جاتی ہے، اِس لیے اگر اِس انقلاب پر وقت کی مساوات
صہ ہو اور چند دنوں بعد وہ صہ۱ ہو جائے تو

۱۲ + صہ۱ - س > ۱۲ + صہ - س

اور اِس لیے انقلاب کے چند دنوں بعد طلوع آفتاب کا وقت، انقلاب پر
طلوع آفتاب کے وقت سے کسی قدر بعد ہوتا ہے۔
نیز اگر انقلاب سے چند دنوں قبل وقت کی مساوات صہ۲ ہو تو

صہ + س > صہ۲ + س

اس لیے انقلاب سرما سے چند دنوں قبل غروب آفتاب کا وقت، انقلاب پر
غروب کے وقت سے کسی قدر پہلے ہوتا ہے۔
مثلاً بتاریخ ۱۴ دسمبر ۱۹۰۵ء سورج بمقام گرینوچ بوقت ۳گ ۴۹م غروب
ہوا اور بتاریخ ۲۲ دسمبر ۱۹۰۵ء (انقلاب) بوقت ۳گ ۵۲م غروب ہوا۔ برخلاف اسکے

سورج انقلاب پر بوقت ۸گ ۶م طلوع ہوا اور ایک ہفتہ بعد ۸گ ۸م پر طلوع ہوا۔

۱۲۹ ـ چاند کا طلوع اور غروب۔

چاند کے طلوع اور غروب پر غور کرتے وقت اس کے اختلاف منظر کو بھی ملحوظ رکھنا پڑتا ہے۔ اختلاف منظر چاند کو راس سے پرے ۵۷َ کے اوسط فاصلے میں سے پست کرتا ہے۔ اس لیے جب چاند افق پر نظر آتا ہے تو اسکا اصلی راسی فاصلہ زمین کے مرکز سے پیمائش کردہ ۹۰° ـ ۵۷َ ہوتا ہے لیکن انعطاف کی وجہ سے اِس فاصلہ میں ۳۵َ کا اضافہ ہوتا ہے، اس طرح دفعہ ۱۲۸ کے ضابطہ (۱) میں ہمیں ی = ۹۰° ـ ۵۷َ + ۳۵َ = ۸۹° ۳۸َ رکھنا ہوگا۔

اگر طلوع کے وقت چاند کا مقام معلوم ہو تو ہم س کو اُس ضابطہ سے جو اوپر حاصل کیا جا چکا ہے معلوم کر سکتے ہیں۔ طلوع کی آن پر کوکبی وقت اِس صورت میں عہ ـ س ہوگا جہاں عہ چاند کا صعود مستقیم ہے۔ اِسکے بعد اوسط وقت کو اِس کوکبی وقت کے ذریعہ محسوب کیا جا سکتا ہے۔

لیکن یہ طریقہ جو یہاں بیان کیا گیا ہے ناقابل عمل ہے کیونکہ چاند کا مقام اُس وقت تک معلوم نہیں ہو سکتا جب تک کہ اُس کے طلوع کا وقت معلوم نہ ہو۔ اس لیے اس مسئلہ کو تقرب کے ذریعہ حل کرنا چاہئے۔

اِس طریقہ کی توضیح کے لیے ہم گرینوچ پر چاند کے طلوع کا وقت (۳۹۱)
بتاریخ ۱۰ فروری ۱۸۹۴ء محسوب کریں گے۔

تقرب اول کے لیے چاند کے مقام کے محدد عہ = ۰گ ۵۵م، ضہ = +۶° ۱۷َ لینا کافی ہوگا جو المنیمرس سے زیر بحث یوم کی ظہر کے لیے حاصل ہوتے ہیں۔ ضہ کی یہ قیمت ضابطہ (۱) میں داخل کرکے ہم س = ۶گ ۲۹م معلوم کرتے ہیں۔ اس لیے طلوع کے وقت چاند کا ساعتی زاویہ تقریباً ۶گ ۲۹م تھا اور چونکہ اس کا صعود مستقیم تقریباً ۰گ ۵۵م ہے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بوقت طلوع

کوکبی وقت تقریبًا ١٨ گ ٢٦ م تھا۔ کوکبی وقت اوسط ظہر پر بتاریخ ١٠ فروری تقریبًا ٢١ گ ٢، ٢٢ م تھا۔ پس یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ چاند کا طلوع ظہر سے تقریبًا ٣ گھنٹے قبل واقع ہونا چاہئے یعنی تقریبًا ٩ ب۔ ن پر یعنی ہیئتی زبان میں بتاریخ ٩ فروری ٢١ گھنٹوں پر۔

پھر ہم اعمال حساب کو چاند کے صعود مستقیم اور مَیل کی بجائے اِن کی وہ قیمتیں لیکر دُہراتے ہیں جو تاریخ ٩ فروری وقت ٢١ گھنٹوں کے لیے حاصل ہوئی ہیں یعنی عہ = ٠ گ ٤، ٤٩ م، ضہ = ٥° ٣١َ اِس طرح بوقت طلوع چاند کے ساعتی زاویہ کی صحیح قیمت ٦ گ ٥، ٢٥ م حاصل ہوتی ہے۔ اِس کو صعود مستقیم ٠ گ ٤، ٤٩ م میں سے تفریق کرکے ہم دیکھتے ہیں کہ طلوع کا کوکبی وقت ١٨ گ ٥٩، ٢٣ م تھا۔ چونکہ بتاریخ ١٠ فروری اوسط ظہر پر کوکبی وقت ٢١ گ ٢، ٢٢ م ہے اِس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ طلوع اور ظہر کے درمیان وقفہ ٢ گ ٣، ٥٨ م کوکبی وقت ہے۔ اِسے شمسی وقت میں تحویل کرنے سے وہ ٢ گ ٨، ٧ م ہوجاتا ہے اور اسلیے چاند بتاریخ ١٠ فروری سنہ ١٨٩٤ ٩ گ ٢ م ب۔ ن پر طلوع ہوا تھا۔

وہ اوسط وقت معلوم کرنے کے لیے جس پر چاند زیر بحث دن میں غروب ہوتا ہے اوپر کے پورے عمل کو دُہرانے کی ضرورت نہیں ہوتی جبکہ طلوع کا وقت معلوم کرلیا گیا ہو۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ اِس دن طلوع کے وقت چاند کا ساعتی زاویہ ٦ گ ٢٥ م تھا اور اگر ہم چاند کی حرکت کو نظر انداز کریں تو غروب کے وقت بھی چاند کا ساعتی زاویہ یہی ہوگا۔ غروب طلوع کے ١٢ گ ٥٠ م بعد واقع ہوگا۔ لیکن چونکہ چاند کی حرکت اِس وقفہ کو تقریبًا آدھ گھنٹہ زائد

کردیگی اس لیے یہ وقفہ ۱۳ گ ۲۰ م ہوگا۔ اب چونکہ طلوع ۹ گ ۲ م ب۔ ن پر واقع ہوا تھا اس لیے غروب ۱۰ ب۔ ظ اور ۱۱ ب۔ ظ کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔ اِس لیے ہم چاند کے صعود مستقیم اور میل کی بجائے اِن کی وہ جدولی قیمتیں مان سکتے ہیں جو ۱۰ گ ۳۰ م ب۔ ظ کے لیے ایفیمرس سے ملتی ہیں یعنے ع = ۱ گ ۸، ۱۵ م، ضہ = ۸°، ۵َ۔ اس کے بعد چاند کا ساعتی زاویہ بوقت غروب (۱) سے محسوب کیا جاتا ہے تو وہ ۶ گ ۲، ۳ م ۴ حاصل ہوتا ہے اور چونکہ اُسوقت چاند کا صعود مستقیم ۱ گ ۸، ۱۵ م ہے اس لیے غروب کے وقت کوکبی وقت ۷ گ ۵۹ م ہے۔ اِس میں ۲۴ گ کا اضافہ کرنے اور پھر اوسط ظہر پر کا کوکبی وقت ۲۱ گ ۲، ۲۲ م تفریق کرنے سے ہمیں اوسط ظہر کے بعد وہ کوکبی وقفہ جس پر چاند غروب ہوتا ہی ۱۰ گ ۸، ۳۶ م حاصل ہوتا ہے اور اس لیے اوسط وقت ۱۰ گ ۳۵ م ب۔ ظ ہے۔

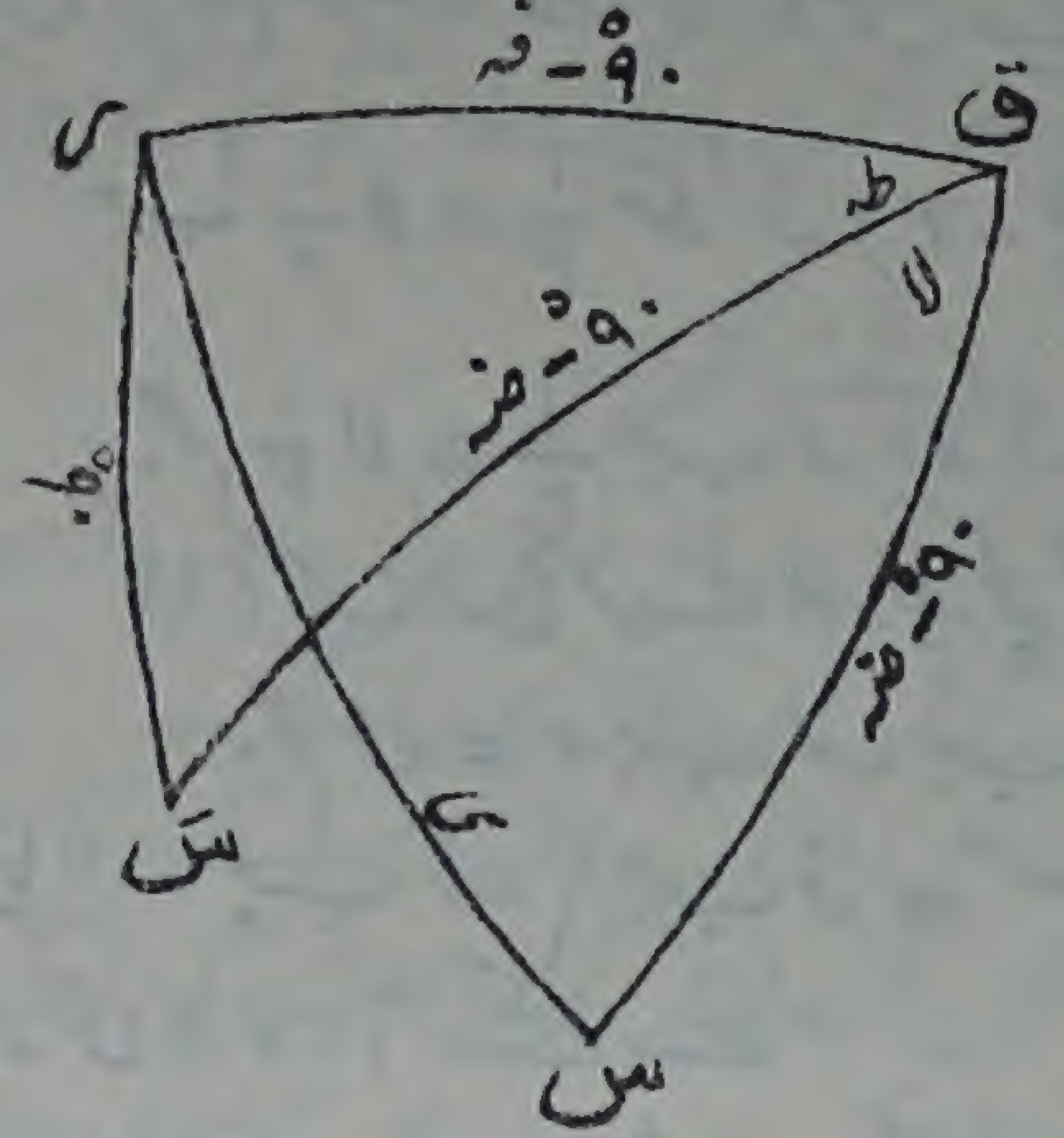
(۳۹۲) کسی مخصوص مقام پر طلوع قمر کے اوقات عملاً محسوب کرنے میں جیساکہ جنتری کی تیاری میں ضرورت ہوتی ہے واحد داخلہ کی ایک جدول بنالینے سے مدد ملیگی جس میں معلومہ عرض بلد کے لیے چاند کا ساعتی زاویہ طلوع یا غروب پر قمری میل کے ہر درجہ کے لیے مندرج ہو۔

۱۳۰ ۔ شفق ۔

غروب آفتاب کے بعد اور طلوع آفتاب سے قبل جو شفق نمودار ہوتی ہے اُس کے متعلق یہ ثابت کیا گیا ہے کہ وہ بالواسطہ نور آفتاب ہے جو ہمیں کرۂ ہوائی میں معلق ذروں سے سورج کی شعاعوں کے منعکس ہونے سے پہنچتا ہے۔ جب سورج افق کے نیچے ۱۸° سے زیادہ نہیں ہوتا تو اسکی شعاعیں ہوا میں تیرتے ہوئے ذروں کو جو افق کے اوپر ہوتے ہیں منور کرتی ہیں اور انمیں سے ہر ذرہ نور کا ایک ماخذ بنتا ہے۔ اس طرح صبح کی آمد اُس شفق سے آشکار

ہوتی ہے جو اُس وقت شروع ہوتی ہے جبکہ سورج افق کے نیچے ۱۸° کے اندر آتا ہے۔

فرض کرو کہ ہم ایک معلومہ عرض بلد فہ پر شفق کا عرصہ لا معلوم کرنا چاہتے ہیں تو ہم بالعموم وہ وقت محسوب کریں گے جو ان لمحوں کے درمیان گذرتا ہے جبکہ سورج راسی فاصلہ ی پر نقطہ س (شکل ۹۵) پر ہوتا ہے اور جبکہ وہ افق پر نقطہ سَ پر پہنچتا ہے۔ فرض کرو کہ جب سورج افق پر ہوتا ہے تو اُسکا ساعتی زاویہ طہ ہے، پس طہ + لا اُس کا وہ ساعتی زاویہ ہے جبکہ شفق کی ابتدا ہوتی ہے اور



شکل (۹۵)

جم ی = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم (طہ + لا)،

= جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم طہ

جمع اور تفریق کرنے سے

جم ی − ۲ جب فہ جب ضہ = ۲ جم فہ جم ضہ جم (طہ + $\frac{1}{2}$ لا) جم $\frac{1}{2}$ لا،

− جم ی = ۲ جم فہ جم ضہ جب (طہ + $\frac{1}{2}$ لا) جب $\frac{1}{2}$ لا

پہلی مساوات کو جب $\frac{1}{2}$ لا اور دوسری کو جم $\frac{1}{2}$ لا سے ضرب دو اور پھر مربع لیکر جمع کرو تو طہ ساقط ہوگا اور حاصل ہوگا

(جم ی − ۲ جب فہ جب ضہ)^2 جب^2 $\frac{1}{2}$ لا + جم^2 ی جم^2 $\frac{1}{2}$ لا

= جم^2 فہ جم^2 ضہ جب^2 لا ..... (۱)

اِس مساوات سے لا ملیگا جبکہ ضہ معلوم ہو اور شفق کے عرصہ کے (۳
مسئلہ کے لیے ی = ۱۰۸° رکھنا ہوگا۔ بلاشبہ ضہ معلوم ہوتا ہے جبکہ یہ معلوم

ہو کہ سال کے کس زمانہ میں ہم اس مسئلہ کو حل کر رہے ہیں۔

سال کا وہ حصہ معلوم کرنے کے لیے جس میں شفق مقیم ہوتی ہے ہم رکھتے ہیں فرلا \ فرضہ = ۰ اور اِس لیے

جب^۲ ۱/۲ لا = ۱/۲ قط^۲ فہ (۲ - جب فہ قم ضہ جم ی)

جم^۲ ۱/۲ لا = ۱/۲ جب فہ قط^۲ فہ قم ضہ (جم ی - ۲ جب فہ جب ضہ)

(۱) میں درج کرنے اور پھر کچھ مختصر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

جم ی = ۲ جب ضہ جب فہ \ (جب^۲ ضہ + جب^۲ فہ)

یا جب ضہ \ جب فہ = مس (°۴۵ - ۱/۲ ی)

اور ی = °۱۰۸ رکھنے سے

جب ضہ = - مس °۹ جب فہ

جب عرض بلد معلوم ہو تو اس مساوات سے ضہ کو محسوب کیا جا سکتا ہے اور اس طرح سال کا مطلوبہ حصہ معلوم ہوتا ہے۔

مثال ۱ — یہ فرض کر کے کہ شفق شروع یا ختم ہوتی ہے جبکہ سورج افق سے °۱۸ نیچے ہو ثابت کرو کہ جب تک کہ سورج کا میل °۱۸ سے کم رہتا ہے تمام مقاموں پر ۱۲ گھنٹوں سے بڑا دن (بشمول شفقیں) ہوگا۔

مثال ۲ — ثابت کرو کہ عرض بلد فہ کے کسی مقام پر شفق کا کم سے کم وقفہ گھنٹوں میں

۲/۱۵ جب^-۱ (جب °۹ قط فہ)

ہوگا جہاں جب^-۱ (جب °۹ قط فہ) کو درجوں میں بیان کیا گیا ہے۔

مثال ۳ — یہ مان کر کہ سورج طریق الشمس میں یکساں طور پر ۳۶۵ دنوں میں حرکت کرتا ہے ثابت کرو کہ عرض بلد فہ میں اُن راتوں کی تعداد جن میں تمام رات شفق رہتی ہے

۷۳/۳۶ جم^-۱ {جم (فہ + °۱۸) \ جب سہ}

سے عین بڑا صحیح عدد ہے۔ سہ طریق الشمس کا میلان ہے اور ۱۸° افق کے نیچے وہ بڑے سے بڑا زاویٰ فاصلہ ہے جس میں شفق ممکن ہے۔ [Coll. Exam.]

مثال ۴ — اگر دن کے طول کی تعریف اُس وقفہ سے کیجائے جس میں سورج راس سے ۹۰° + ۱° کے اندر رہتا ہے تو ثابت کرو کہ خط اُستواء کے کسی مقام پر دن

۱۲ + $\frac{۲}{۱۵}$ ۱ قط ضہ اوسط شمسی گھنٹوں

کا ہوگا اگر سورج کا میل ضہ ہو۔ نیز ثابت کرو کہ اگر جب ۱ جب ضہ + جب فہ = ۰ تو عرض بلد فہ کے کسی مقام پر دو متصلہ دنوں کے طول مساوی ہوں گے۔

مثال ۵ — ثابت کرو کہ کسی دو عرض بلدوں پر اعتدالین کے اوقات کے سوا دن کے طول وہی نہیں ہوسکتے، لیکن اگر یہ فرض کرلیا جائے کہ دن کی روشنی اُس وقت شروع اور ختم ہوتی ہے جبکہ سورج افق سے طہ درجے نیچے ہو تو دو عرض بلد ایسے ہیں جہاں دن کی روشنی کی مدت ایک ہی ہوتی ہے جب تک کہ سورج کا میل عدداً طہ درجوں سے کم رہتا ہے۔ [Math. Trip.]

۱۳۱ — دھوپ گھڑی — (۳۹۴)

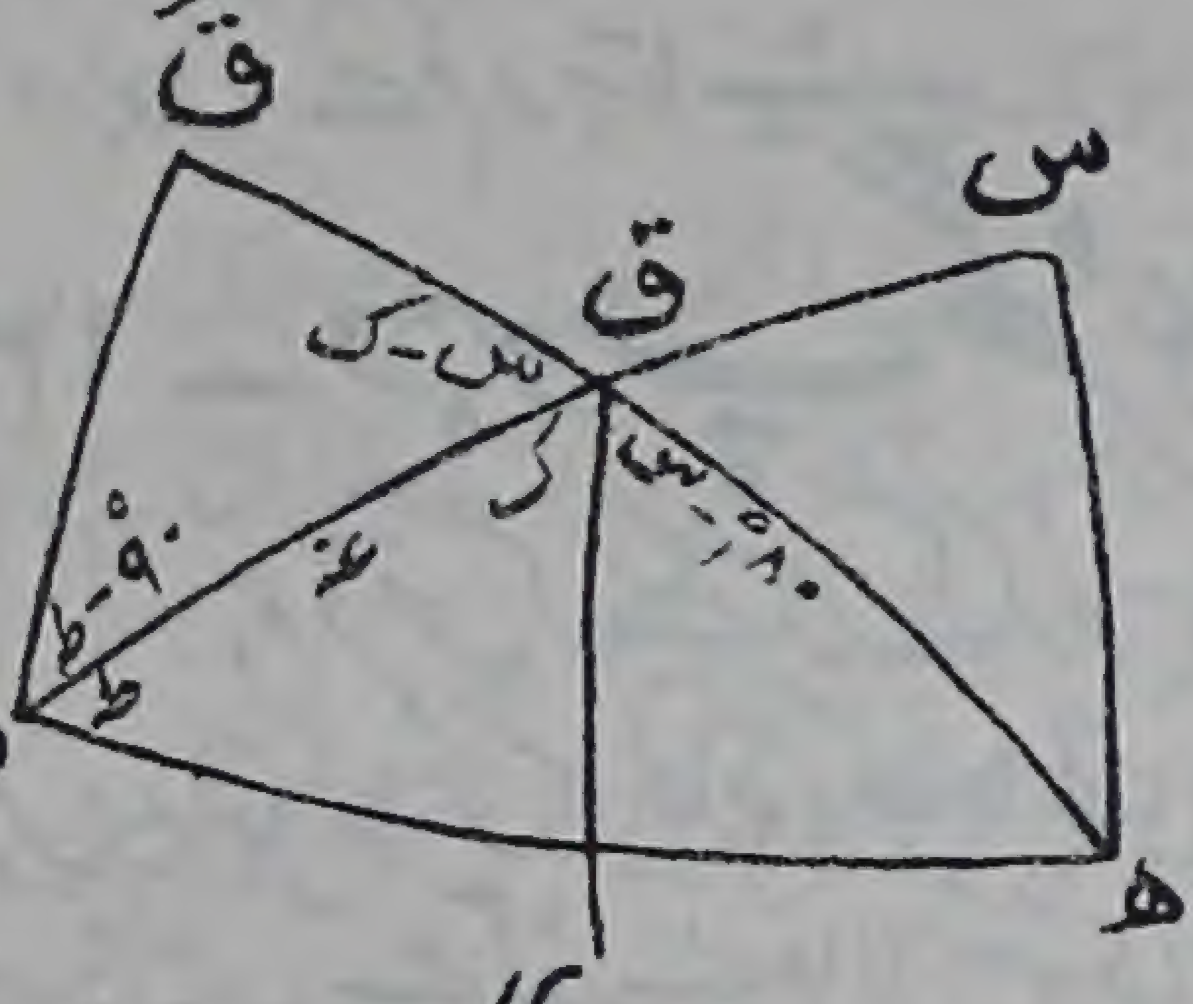
ہم فرض کرسکتے ہیں کہ کرہ سماوی پر سورج کا مقام ۲۴ گھنٹوں میں اتنا نہیں بدلتا کہ اُس کا لحاظ رکھا جائے اور نیز ہم فرض کرسکتے ہیں کہ زمین کے محور اور سورج میں سے گذرنے والا مستوی ارضی خط استواء کو دو نقطوں میں قطع کرتا ہے جو خط اُستواء کے گرد سورج کی ظاہری یومی گردش کی وجہ سے یکساں طور پر حرکت کرتے ہیں۔

اسی طرح یہ ظاہر ہے کہ اگر ایک ڈنڈے کو قطب شمالی پر زمین میں عمودوار اس طرح نصب کیا جائے کہ وہ زمین کے محور پر منطبق ہو تو اس کا سایہ افق کے گرد یکساں طور پر حرکت کرے گا، اس لیے اگر ایک یکساں درجہ دار دائرہ کا مرکز ڈنڈے کے محور میں اور اس کا مستوی زمین کے محور پر عمود ہو تو سورج کا محل اور اس لیے ظاہری وقت اُس نقطہ سے معلوم ہوگا جس میں ڈنڈے کا سایہ اس

دائرہ کو قطع کرے گا۔ اِس طرح دھوپ گھڑی کا تصور ہمارے ذہن میں آتا ہے۔

چونکہ زمین کے ابعاد سورج کے فاصلہ کے مقابلہ میں بہت ہی حقیر ہیں اس لیے ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر زمین کی سطح کے کسی نقطہ پر ایک ڈنڈے کو جسے بالعموم میل کہتے ہیں زمین کے محور کے متوازی نصب کیا جائے تو اسکا سایہ جو سورج اپنی یومی حرکت میں میل کے عمود وار مستوی پر ڈالتا ہے یکساں طور پر گول حرکت کرے گا اور اِس سے ظاہری وقت معلوم ہوگا اگر دائرہ کی درجہ بندی ٹھیک ہو۔ اِس مستوی پر یعنی گھڑی پر گھنٹوں کے خطوط ۱۵° کے مساوی فصلوں پر کھینچے جاتے ہیں۔ میل کا میلان افق کے ساتھ عرض بلد کے مساوی ہوتا ہے اور گھڑی کا میلان عرض التمام کے۔ اس طرح ہمیں استوائی دھوپ گھڑی حاصل ہوتی ہے۔

میل کو ہمیشہ زمین کے محور کے متوازی ہونا چاہیے لیکن گھڑی کی مستوی سطح مختلف محلوں میں ترتیب دیجا سکتی ہے افقی، انتصابی یا اور کوئی محل۔ گھڑی کی درجہ بندی صرف استوائی دھوپ گھڑی میں یکساں ہوتی ہے اور اب اُس گھڑی کی درجہ بندی پر غور کیا جائے گا جو کسی اور طرح رکھی گئی ہو لیکن میل کا سایہ ظاہری وقت کو بتلائے۔



شکل (۹۶)

فرض کرو کہ گھڑی کے مستوی کا قطب کرہ سماوی کے نقطہ و پر ہے جس کا شمال قطبی فاصلہ غ ہے اور ساعتی زاویہ (مغرب) ک ہے۔

فرض کرو کہ ق شمالی قطب سماوی ہے (شکل ۹۶)، ق ر نصف النہار (۳۹۵)
ق قَ وہ ساعتی دائرہ جس میں سورج ہے اور س ھ گھڑی کی مستوی سطح ہے نقطہ س کو زیر میل کہتے ہیں اور ڈنڈے کا ارتفاع ق س = ۹۰° - غ ہے

ساعتی دائرہ ق قَ کے جواب میں ساعتی خط، ھ سے حاصل ہوتا ہے جہاں

و ھ = ۹۰°۔

گھڑی کی درجہ بندی کے لیے یہ جاننے کی ضرورت ہے کہ ہر شمسی ساعتی زاویہ س کے متناظر قوس س ھ = طہ کیا ہے۔ ھ ق کو قَ تک اِتنا خارج کرو کہ ھ قَ = ۹۰° تب قَ ایک قائمہ زاویہ ہونا چاہیے کیونکہ و ھ = ۹۰° اور اس لیے

مس طہ = جم غہ مس (س ـ ک)........ (۱)

چونکہ غہ اور ک معلوم ہیں اس مساوات سے س کی ہر قیمت کے جواب میں طہ کی قیمت = س ھ حاصل ہوتی ہے۔

مشاہدہ کے ذریعہ ساعتی خطوں کو کسی مخصوص آلہ پر نشان زد کرنیکے لئے حسب ذیل طریقہ اختیار کیا جاتا ہے۔ یہ تسلیم کرلیا جاتا ہے کہ گھڑی پر ۰° سے لیکر ۳۶۰° تک معمولی درجہ بندی ہے جسمیں درجہ بندی کا مرکز وہ نقطہ ہوتا ہے جس میں میل گھڑی کے مستوی سے ملتا ہے اور مبدا جس سے زاویئے پیمائش کئے جاتے ہیں اِس نقطہ اور زیر میل میں سے گذرنے والا خط ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ سورج کا ساعتی زاویہ س، معلوم ہے اور سایہ کا مشاہدہ کردہ محل طہ، ہے تو

مس طہ، = جم غہ مس (س، ـ ک)

اِس طرح ک معلوم ہوتا ہے اور اِس لیے س کی ہر قیمت کے جواب میں طہ کی متناظر قیمت (۱) سے محسوب ہو سکتی ہے۔ اِس لیے سورج گھڑی سے کسی لمحہ پر سورج کا ساعتی زاویہ یا ظاہری وقت معلوم ہوتا ہے اور وقت کی مساوات کے اطلاق سے اوسط وقت حاصل ہوتا ہے۔

دھوپ گھڑی جو کثرت سے دیکھنے میں آتی ہے افقی دھوپ گھڑی کی شکل کی ہوتی ہے جس میں ڈائل چونکہ افقی ہوتا ہے و، ر پر منطبق ہونا چاہئے۔ اس طرح ک = ۰ اور

غہ = ق ر = ۹۰° ـ فہ

جہاں فہ عرض بلد ہے۔ اس لیے مساوات (۱) ہوجاتی ہے

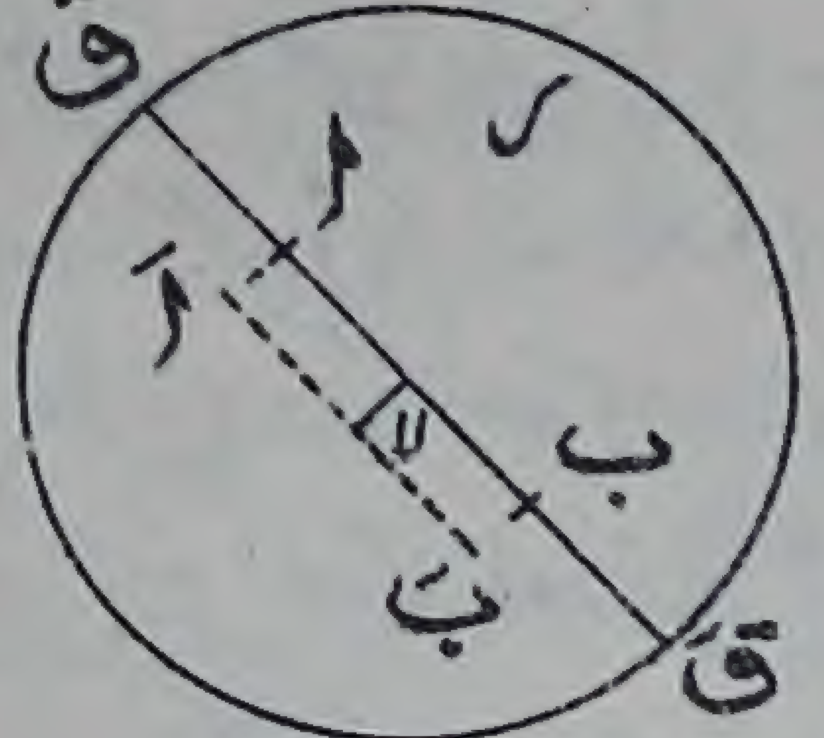
مس طہ = جب فہ مس س

آخری ساعتی خطوط جو ڈائل پر کھینچنے ہوں گے اُس صورت کے متناظر ہوتے ہیں جس میں سورج افق پر پہنچتا ہے اور اُسوقت اِس کا میل بڑے سے بڑا ہوتا ہے۔ اس صورت میں اگر سَ ساعتی زاویہ ہو تو

جم (۱۸۰° - سَ) = مس فہ مس (۲۳° ۲۸َ)

(۳۹۶) اس سے سَ کی قیمت حاصل ہوتی ہے اور اِس قیمت کو (۱) میں س کی بجائے درج کرنے سے طہ حاصل ہوتا ہے۔

دُھوپ گھڑی کا ایک انتہائی نمونہ[۱] وہ ہے جس میں ڈائل نصف النہار کے متوازی ہوتا ہے اور رمیل زمین کے محور کے متوازی ہوتا ہے لیکن ڈائل کے مُستوی میں نہیں ہوتا۔



شکل (۹۷)

فرض کرو کہ افق کے مُستوی کے متوازی ڈائل ق ر قَ ہے (شکل ۹۷)، اب ایک پتلا مستطیل ہے جو کاغذ کے مستوی پر عمود وار کھڑا ہے اور اسکا اوپر کا کنارا اب جو ارضی محور ق قَ کے متوازی ہے رمیل ہے۔ یہ فرض کیا جا سکتا ہے کہ سورج کو اس کی یومی حرکت میں ایک مستوی جو اب کے گرد یکساں گردش کرتا ہے لیجاتا ہے اور اِس لیے کنارہ اب کا سایہ اَبَ ہمیشہ اب کے متوازی ہوگا اور یہ سایہ اب سے فاصلہ لا (فرض کرو) پر ہوگا۔ جب سورج نصف النہار میں ہوتا ہے تو لا کی قیمت لامتناہی ہوتی ہے اور جب سورج کا ساعتی زاویہ ۶گ ہوتا ہے تو لا = ۰۔ بالعموم اگر ڈائل کے اوپر رمیل کی بلندی ب ہو تو

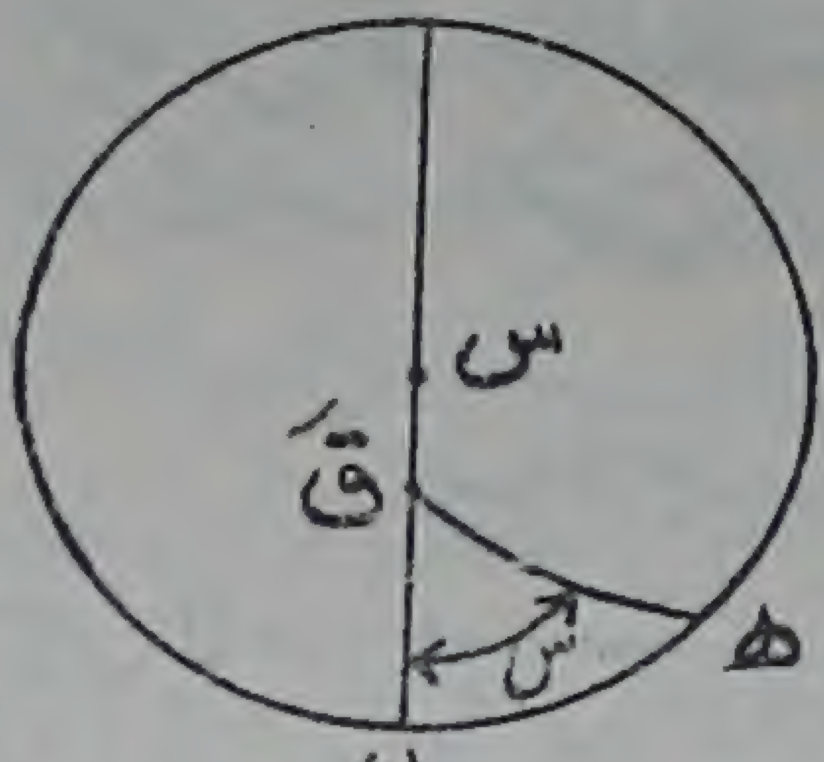
---

[۱] اِس قسم کی ایک دھوپ گھڑی ' ومبورن منسٹر ' میں موجود ہے۔

لا = ب جم س

جہاں س سورج کا ساعتی زاویہ ہے ۔ اس مساوات سے س کی ہر
قیمت کے جواب میں لا کی قیمت معلوم ہوسکتی ہے ۔

مثال ۱ ۔ بتاؤ کہ وہ دھوپ گھڑی کس طرح بنائی جائے جس کا ڈائل
انتصابی اور اُس کا رُخ جنوب کی طرف ہو اور مِیل قطب جنوبی کی سمت میں لگا ہوا ہو ۔
مساوات (۱) میں ک = ۰، غہ = فہ رکھکر اِسے عام نظریہ کی ایک مخصوص
صورت کے طور پر حاصل کیا جا سکتا ہے یا بلا واسطہ حسب ذیل طریقہ پر ۔



شکل (۹۸)

فرض کرو کہ س (شکل ۹۸) افق پر
جنوبی نقطہ ہے، ن قدم، قَ قطب جنوبی
اور قَ ھ سورج کا ساعتی زاویہ، تب مثلث
ن قَ ھ سے

مس ن ھ = جم فہ مس س

مثال ۲ ۔ ثابت کرو کہ کسی
دھوپ گھڑی کو حسب ذیل قاعدہ سے
بنا سکتے ہیں: فرض کرو کہ تـ وہ وقت ہے جس پر مِیل کا سایہ قرص پر عموداً مُظلل
ہوتا ہے، اور قرص کے عماد کا شمال قطبی فاصلہ کرۂ سماوی پر سہ ہے تو وقت ت کا
نشان، وقت تـ کے نشان کے ساتھ زاویہ

مس ^ا {جم سہ مس (ت ۔ تـ)}

پر مائل ہے ۔ [Coll. Exam.]

مثال ۳ ۔ دو دنوں میں جن کے درمیان ایک سہ ماہی کا فرق ہے اکائی
طول کے ایک انتصابی مِیل کے سایوں کے طول اُس وقت جبکہ سورج نصف النہار پر
تھا لا، لاَ مشاہدہ کئے گئے ۔ یہ فرض کرکے کہ سورج طریق الشمس میں یکساں طور پر
حرکت کرتا ہے ثابت کرو کہ پہلے دن کے مشاہدہ کے وقت سورج کا طول بلد ل

$$\text{جب } ۲ \text{ل} = \frac{\text{جب}^۲ \text{سہ} - \text{جب}^۲ \text{بہ}}{\text{جب}^۲ \text{سہ جم بہ}}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں مس ب $= \dfrac{\text{لا} \sim \text{لاَ}}{1 + \text{لا لاَ}}$ اور سہ سورج کا میلان ہے۔

[Math. Trip. 1. 1900]

مثال ۴ ۔ معمولی شکل کی ایک افقی دھوپ گھڑی میں ثابت کرو کہ ایک دن کے دوران میں میل کے سایہ کا سِرا جو منحنی مرتسم کرتا ہے وہ تقریباً خروج المرکز

$$\frac{\text{جم (عرض بلد)}}{\text{قم (سورج کا میل)}}$$

کی ایک مخروطی تراش ہے۔

مثال ۵ ۔ اگر ایک افقی دھوپ گھڑی پر اُن درجوں کے درمیان زاویہ لا ہو جو ظہر کے بعد ساعتوں س_1، س_2 کو دکھاتے ہیں تو

$$\text{مس لا} = \frac{\text{جب لہ جب}\left\{(\text{س}_2 - \text{س}_1)\frac{\pi}{12}\right\}}{\text{جم}\left\{(\text{س}_2 - \text{س}_1)\frac{\pi}{12}\right\} - \text{جم}^2\,\text{لہ جب}\,\frac{\text{س}_1\pi}{12}\,\text{جب}\,\frac{\text{س}_2\pi}{12}}$$

جہاں لہ وہ عرض بلد ہے جس کے لیے دھوپ گھڑی بنائی گئی ہے۔ [Coll. Exam.]

مثال ۶ ۔ ثابت کرو کہ دائرہ قطب شمالی اور دائرہ قطب جنوبی کے باہر ایک مقام پر ایک افقی مُستوی پر ایک انتصابی ڈنڈے کے سایہ کا سِرا ایک دن کے دوران میں تقریباً قطع زائد کی ایک شاخ مرتسم کرتا ہے اور نیز ثابت کرو کہ جیسے جیسے یہ زائد دن بہ دن متغیر ہوتا ہے اس کے متقارب ایک ثابت قطع مکافی کو مس کرتے ہیں جس کا ماسکہ ڈنڈے کا پائین ہے۔

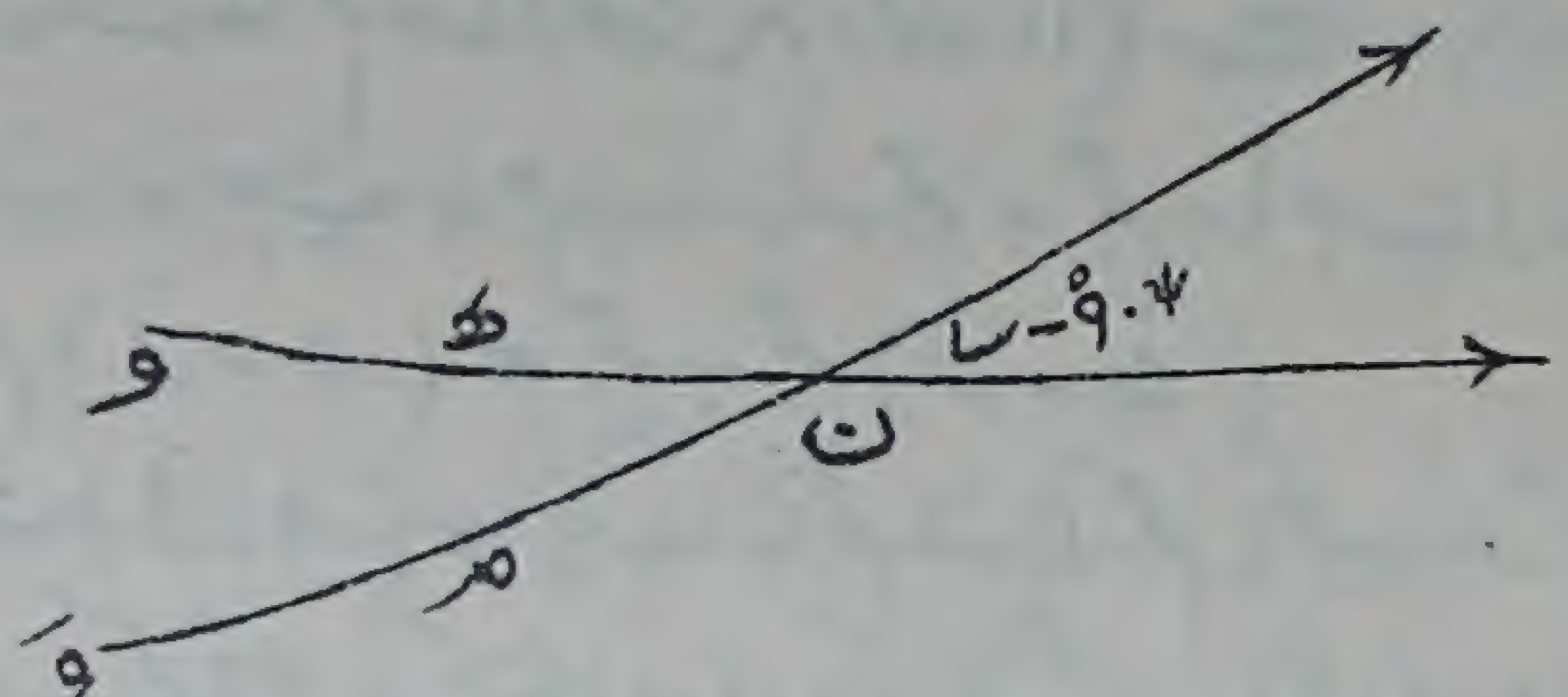
[Math. Trip. 1904]

مثال ۷ ۔ ایک دھوپ گھڑی منعکس کرنے والے ایک اسطوانہ سے بنائی گئی ہے جس کی عمودی تراش ایک خط تدویر ہے۔ اس اسطوانہ کو ایک مُقوے پر اس طرح چڑھایا گیا ہے کہ اسطوانہ کے مکون زمین کے محور کے متوازی ہیں اور مُقوے کے مستوی پر عمود ہیں لیکن تدویری تراش کا محور نصف النہار کے مُستوی میں واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مقوے پر خط تدویر کے قرنوں کے درمیانی فاصلہ کی ٹھیک طور پر یکساں درجہ بندی کر دی جائے تو سورج کی شعاعوں کے انعکاس کی وجہ سے

مُنعکس منحنی کا قرن ہمیشہ ظاہری شمسی وقت کو ظاہر کریگا۔

۱۳۲ ۔ سورج کی سطح پر نقطوں کے محدد ۔

سورج کے داغ مُشاہدہ کر کے یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ سورج ایک محور کے گِرد جو طریق الشمس کے ساتھ زاویہ ۸۲° ۴۵َ کا میلان رکھتا ہے گردش کرتا ہے۔ اس گردش کی سمت وہی ہے جس میں زمین اور دیگر سیارے سورج کے گِرد گھومتے ہیں۔ ایک مستوی جو سورج کے مرکز میں سے گذرے اور گردش کے محور پر عمود ہو سورج کی سطح کو ایک بڑے دائرہ میں قطع کریگا
اِس دائرہ کو شمسی خط استوا کہتے ہیں۔ سورج کی سطح پر کے نقطے اس شمسی استواء (۳۹۸
کے حوالہ سے متعین ہوتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ اِن کے عرض بلد اور طول بلد شمس نگاری ہیں۔ ایک شمسی نقطہ س کا شمس نگاری عرض بلد وہ عمودی قوس ہے جو س سے شمسی اُستواء تک کھینچی گئی ہو اور س کا طول بلد وہ قوس ہے جو شمسی اُستواء پر کے ایک معیاری نقطہ وَ سے اِس عمود کے پائین تک پیمائش کی گئی ہو۔ شکل ۹۹ میں طریق الشمس کے مُستوی سے سورج کی سطح کی تراش و ن ہے



شکل (۹۹)

جہاں و وہ نقطہ ہے جس میں وہ خط جو سورج کے مرکز سے ۴ تک کھینچا گیا ہو سورج کی سطح سے ملتا ہے اور طول بلد اُس سمت میں بڑھتے ہیں جو تیروں سے دکھائی گئی ہے۔ وَن شمسی اُستواء ہے اور اس کا صعودی عقدہ طریق الشمس پر ن ہے۔ یہ نقطہ طریق الشمس کے مستوی میں ثابت رہتا ہے کیونکہ شمسی استواء غیر قابل قدر

استقبالی حرکت نہیں ہوتی ۔ ن کا طول بلد ھ جس کی پیمائش طریق الشمس پر نقطہ و سے ہوئی ہے جو ۱۹۰۹ء کا نقطہ اعتدال تھا ۴۲ ٌ ۴ ۷۴° کے مساوی ہے ۔ چونکہ سورج ایک ٹھوس جسم نہیں ہے اور چونکہ (زمین کی طرح) اس پر کوئی مستقل "گرینوچ" نہیں ہے وَ کو بتلانے کے لیے جسے شمسی طول بلد کے مبداء کے طور پر اختیار کیا جاتا ہے ایک خاص طریقہ تلاش کیا گیا ہے ۔ چنانچہ نقطہ وَ کی تعریف یہ کیگئی ہے کہ وہ شمسی اُستواء کا وہ مخصوص نقطہ ہے جو گرینوچ پر یکم جنوری ۱۸۵۴ء کی اوسط ظہر پر ن میں سے گذرتا ہوا دکھائی دیا تھا۔ سورج کی گردش سے وَ ن کی طرف ایک یکساں حرکت سے جاتا ہے اور یہ حرکت اس کو محیط کے گرد ۲۵٫۳۸ دنوں میں لیجاتی ہے۔ شمسی اُستواء طریق الشمس کے ساتھ زاویہ ۹۰° - سا = ۷° ۱۵َ پر مائل ہے ۔

سورج کی سطح پر کے ایک نقطہ پ کا عرض بلد اور طول بلد وہ محدد بہ، لہ ہیں جو و ن کے لحاظ سے اور مبداء و سے پیمائش کیے جاتے ہیں ۔ اسی طرح وَ ن کے لحاظ سے اور مبداء وَ سے پیمائش کردہ پ کے شمس نگاری محدد لَہ، بَہ ہیں ۔

(۳۹۹) استحالہ کے عام ضابطوں (دفعہ ۱۲) سے

$$\left.\begin{array}{l} \text{جب } بَہ = \text{جب } بہ \text{ جب سا} - \text{جم } بہ \text{ جم سا جب } (لہ - ھ) \\ \text{جم } بَہ \text{ جم } (لَہ - م) = \text{جم } بہ \text{ جم } (لہ - ھ) \\ \text{جم } بَہ \text{ جب } (لَہ - م) = \text{جب } بہ \text{ جم سہ} + \text{جم } بہ \text{ جب سہ جب } (لہ - ھ) \end{array}\right\} \ldots (۱)$$

سورج کے قرص کے ظاہری مرکز کا شمس نگاری عرض بلد ع اور طول بلد ط حاصل کرنے کے لیے ہم اوپر کی مساواتوں میں بہ، لہ کی بجائے قیمتیں صفر اور ۱۸۰° + ہ رکھتے ہیں جہاں سورج کا ارض مرکزی طول بلد ہ ہے تو حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{array}{l} \text{جب ع} = \text{جم سا جب } (ہ - ھ) \\ \text{جم ع جم } (ط - م) = - \text{جم } (ہ - ھ) \\ \text{جم ع جب } (ط - م) = - \text{جب سا جب } (ہ - ھ) \end{array}\right\} \ldots\ldots (۲)$$

اِن مساواتوں سے سورج کے قرص کے مرکز کے مطلوبہ شمس نگاری محدد ع اور ط بغیر ابہام کے حاصل ہو سکتے ہیں۔

اب ہم جم پ کے لیے جملہ تلاش کریں گے جہاں پ، سورج کے کنارہ پر وہ قوس ہے جو قرص کے شمال ترین نقطہ اور قرص کے مستوی پر شمسی محور کے ظِل کے درمیان ہے۔

کرہ سماوی پر سورج کے استواء کے شطب س کا عرض بلد اور طول بلد (۱) میں لہ = ۰ اور بہ = ۹۰° رکھنے سے حاصل ہوتے ہیں جس سے ل = ۲۷۰° + ھ اور بہ = سا۔ حل بہ = ۱۸۰° ۔ سا بلاشبہ ناقابل قبول ہے کیونکہ سا = ۲۸°۵ ہم اور بہ ≯ ۹۰°۔ کرہ سماوی پر زمین کے اُستواء کے شطب ز کا عرض بلد اور طول بلد، بہ = ۹۰° ۔ سہ اور لہ = ۹۰° سے حاصل ہوتے ہیں۔ زمین کے شمس مرکزی محل ت کا عرض بلد اور طول بلد، بہ = ۰ اور ل = ۱۸۰° + ٥ سے حاصل ہوتے ہیں جہاں ٥، سورج کا ارض مرکزی طول بلد ہے۔ اب مطلوبہ زاویہ پ زاویہ س ت ز کے مساوی ہے۔ اس کے لیے جملہ حاصل کرنے کے لیے چونکہ

جم س ت = جم سا جب (٥ ـ ھ)، جم ز ت = ـ جب سہ جب ٥، جم ز س
= جب سا جم سا ـ جم سا جب سہ جم ھ

اِس لئے

جم پ = (جم ز س ـ جم س ت × جم ز ت) | جب س ت × جب ز ت

میں اندراج کرنے سے

$$\text{جم پ} = \pm \frac{\text{جم سہ جب سا ـ جب سہ جم سا جم ٥ جم (٥ ـ ھ)}}{(\text{جم}^2\text{سہ} + \text{جب}^2\text{سہ جم}^2\text{٥})^{\frac{1}{2}} \{\text{جب}^2\text{سا} + \text{جم}^2\text{سا جم}^2(\text{٥ ـ ھ})\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{اور جب پ} = - \frac{\text{جب سہ جب سا جم ٥} + \text{جم سہ جم سا جم (٥ ـ ھ)}}{(\text{جم}^2\text{سہ} + \text{جب}^2\text{سہ جم}^2\text{٥})^{\frac{1}{2}} \{\text{جب}^2\text{سا} + \text{جم}^2\text{سا جم}^2(\text{٥ ـ ھ})\}^{\frac{1}{2}}}$$

(۴۰۰) یہ ثابت کرنے کے لیے کہ جب پ کے ساتھ منفی علامت ہونی چاہئے سا = ۰ ۹°، ہ = ۱۸۰° کی صورت لینا کافی ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ زاویہ محل پ، + سہ ہونا چاہیے لیکن یہ صورت واقع نہیں ہوگی جب تک کہ جب پ کے جملہ میں جو جذر ہے وہ منفی علامت کا نہ ہو۔

چونکہ جب پ کو شکل ف جم (ہ + ھ) میں لکھ سکتے ہیں جہاں ف ایک منفی مقدار ہے اور جہاں ف، ہ کے تابع نہیں ہے اس لیے یہ بآسانی ثابت ہوتا ہے کہ پ، ایک ششماہی (۷ ، جولائی تا ۵ ، جنوری) کے لیے مثبت اور دوسری ششماہی کے لیے منفی ہے۔ پ کی اعظم قیمت بتاریخ ۸ ، اکتوبر ۴۲ ، ۲۶° حاصل ہوتی ہے اور اقل قیمت بتاریخ ۶ ، اپریل - ۴۴ ، ۲۶° حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۱ — پ کی قیمت بتاریخ ۱۵ ، جولائی سنہ ۱۹۰۹ء حسب ذیل مفروضات سے معلوم کرنا مطلوب ہے۔

سہ = ۲۳° ۲۷َ ، سا = ۸۲° ۴۵َ ، ہ = ۱۱۲° ۱۹َ ، ھ = ۴° ۲۹َ

یہ دیکھنا آسان ہے کہ جب سہ جب سا جم ہ = - ۱۴۹۹۱ء

جم سہ جم سا جم (ہ - ھ) = ۴۱۴۴ ، ۰ء جم² سہ + جب² سہ جم² ہ = ۶ ۸۶۴۴ ء،

جب² سا + جم² سا جم² (ہ - ھ) = ۰۰۴ ۹۹ ء، اس لیے پ = ۶۲ ء ۳°

بحری جنتری کے ضمیمہ میں پ کی اور ع ، ط کی قیمتیں دیجاتی ہیں۔

مثال ۲ — سورج کا وہ نصف النہار جو طریق الشمس پر شمسی استوار کے صعودی عقدہ میں سے بتاریخ یکم جنوری سنہ ۱۸۵۴ء بوقت گرینوچ اوسط ظہر گذرا تھا سورج کی سطح کے طبیعی مشاہدوں کے لیے صفری نصف النہار ہے اور شمس نگاری طول بلد اس صفری نصف النہار سے پیمائش کیے جاتے ہیں اور شمس نگاری عرض بلد شمسی استواء سے پیمائش کیے جاتے ہیں۔ یہ مان کر کہ عقدہ ثابت رہتا ہے اس کا شمس نگاری طول بلد بتاریخ ۱۵ ، جولائی سنہ ۱۹۰۹ء بوقت ظہر معلوم کرو اگر سورج کی گردش کا دور ۳۸ ، ۲۵ دن ہو۔

یکم جنوری سنہ ۱۸۵۴ء کی اوسط ظہر سے ۱۵ ، جولائی سنہ ۱۹۰۹ء کی اوسط ظہر تک ۲۰۲۸۳ دن ہوتے ہیں (سنہ ۱۹۰۰ء سال کبیسہ نہیں ہے) ۲۰۲۸۳ کو ۳۸ ء ۲۵ سے تقسیم کریں تو سورج کی گردشوں کی تعداد ۸۵۲ ، ۷۹۹ ء ۱ حاصل ہوتی ہے۔ اس لیے صفری نصف النہار عقدہ سے

آگے ایک مکمل گردش کا ۱ء۱۷۲۵۸ حصہ بڑھا ہے یعنی ۱ء۱۷۲۵۸×۳۶۰° = ۶۲° ۷ء۷َ -
اس لیے طریق الشمس پر شمسی خط استواء کے عقدہ کا شمس نگاری طول بلد

۳۶۰° - (۶۲° ۷ء۷َ) = ۲۹۷° ۵۲ء۳َ

ہے -

صعودی عقدہ کا طول بلد جسے طریق الشمس پر راس الحمل سے پیمائش کیا گیا ہو ۴۷° ۲۹ء۴َ ہے -

مثال ۳ — یہ معلوم کرنا مطلوب ہے کہ سورج کے محور کا زاویہ محل پ کب اقل ہوتا ہے؟

جب پ کے جملہ کو ہ کے لحاظ سے تفرق کرنے اور نتیجہ کو صفر کے مساوی رکھنے سے ل کی تعیین کے لیے مساوات ا × ب = ۰ ملتی ہے جہاں

ا = جب سہ جم سا جم (ہ - ھ) جم ہ - جم سہ جب سا

ب = {جب^2 سا + جم^2 سا جم^2 (ہ - ھ)} جب سہ جم سہ جب ہ

+ (جم^2 سہ + جب^2 سہ جم^2 ہ) جب (ہ - ھ) جب سا جم سا (۴۰۱)

مساوات ا = ۰ سے ہ کی کوئی حقیقی قیمتیں حاصل نہیں ہو سکتیں کیونکہ سا، ۹° کے قریب ہونے سے دوسری رقم پہلی رقم سے بڑی ہے - اس لیے ہم ہ کی قیمتیں دوسرے جزو ضربی ب = ۰ سے تلاش کرتے ہیں - اُسے لکھا جا سکتا ہے

{مس^2 سا + جم^2 (ہ - ھ)} مس سہ جب ہ + (۱ + مس^2 سہ جم^2 ہ) جب (ہ - ھ) مس سا = ۰

پہلے تقرب کی حد تک ہم جم^2 (ہ - ھ) اور مس^2 سہ جم^2 ہ کو نظر انداز کر سکتے ہیں اور تب ۳ء۱۴۱ جب ہ = جب (۴۷° ۲۹َ - ہ)، اس لیے ہ = ۱۴° ۴۲َ - اِس تقریبی قیمت کو اُن رقموں میں جو نظر انداز کی گئی ہیں استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

۲ء۹۱ جب ہ = جب (۴۷° ۲۹َ - ہ)

اس لیے ہ = ۱۶° ۱۵َ یا ۱۹۶° ۱۵َ - پہلی قیمت بتاریخ ۷ اپریل اور دوسری بتاریخ ۱۰ اکتوبر واقع ہوتی ہے - ہ کی اِن قیمتوں میں سے کسی ایک قیمت کو جب پ کے ابتدائی جملہ میں درج کرنے سے پ = ۲۶ء۵° حاصل ہوتا ہے -

مثال ۴ ـ سال کے کِن ایام میں پ صفر ہوتا ہے؟
اگر جب پ = ۰ تو حاصل ہونا چاہئے

مس ٥ = (جب سہ جب سا + جم سہ جم سا جم ھ) / (جم سہ جم سا جب ھ)

اس میں مستقلوں سہ، سا، ھ کی قیمتیں جو اوپر دی جا چکی ہیں درج کرنے سے ٥ = ۱۰۴° ۴۰ً اور ٥ = ۲۸۴° ۴۰ً ـ ایفیمرس سے ہم دیکھتے ہیں کہ سورج کے یہ طول بلد بتاریخ ۷ ۔ جولائی اور ۵ ۔ جنوری واقع ہوتے ہیں ـ

۱۳۳* ـ چاند کی محوری گردش ـ

چاند کے مرکز ثقل کے گرد چاند کی محوری گردش کی نوعیت حسب ذیل تین کلیوں سے معلوم ہوتی ہے ـ یہ کُلیئے کیسینی (Cassini) کے کُلیئے کہلاتے ہیں ـ

۱ ـ چاند اپنے محور کے گرد اتنے وقت میں حرکت کرتا ہے جو زمین کے گرد چاند کی گردش کے وقت کے ٹھیک مساوی ہے ـ

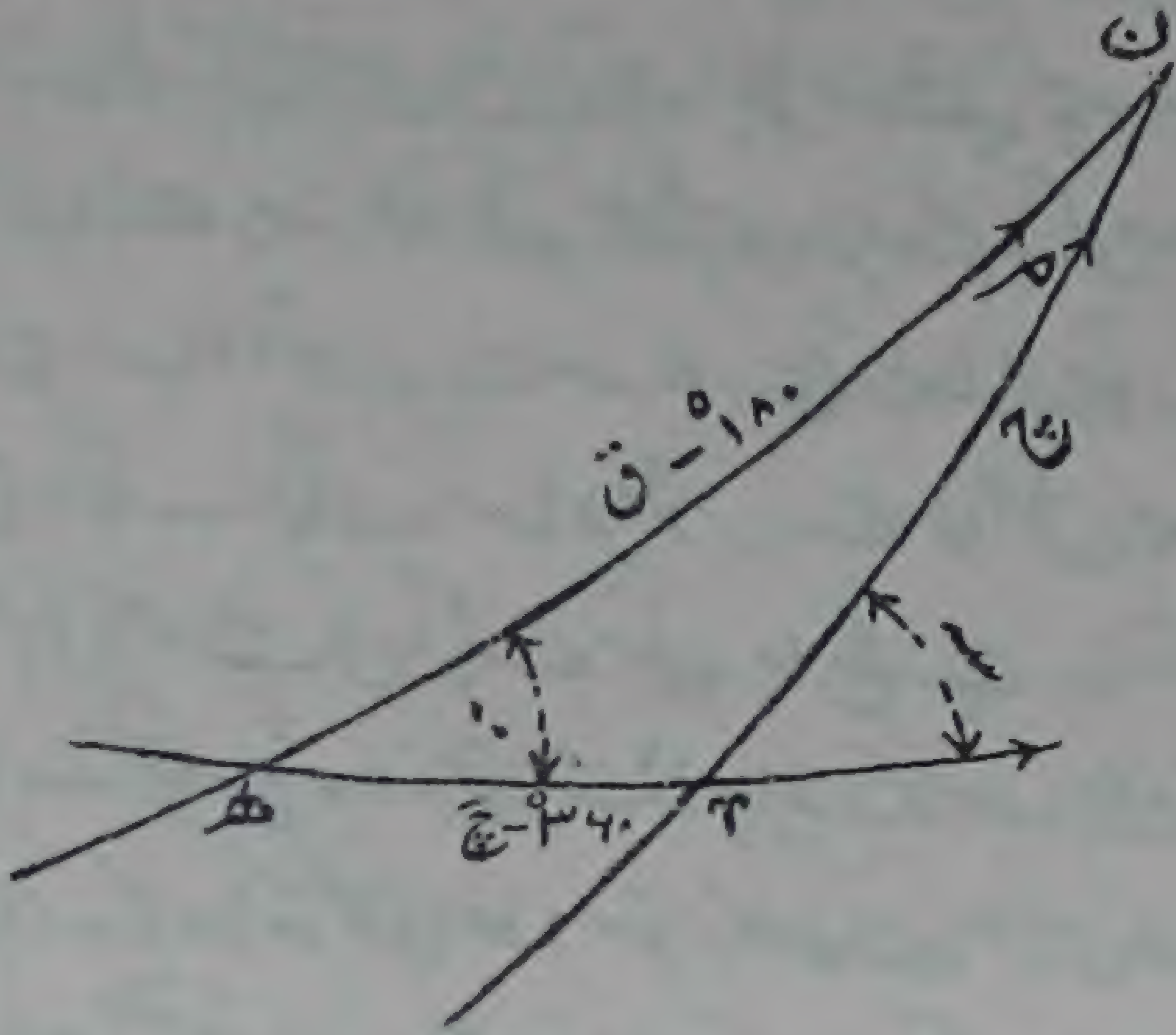
۲ ـ قمری خط اُستواء کا میلان طریق الشمس کے ساتھ مُستقلاً ۱° ۳۲ً ۶ً ہے ـ

۳ ـ طریق الشمس پر قمری خط استواء کا صعودی عقدہ، طریق الشمس پر چاند کے مدار کے نزولی عقدہ پر منطبق ہے ـ

یہ تیسرا کلیہ اس بیان سے بھی ظاہر ہو سکتا ہے کہ قمری خط اُستواء کے شطب کا طول بلد چاند کے مدار کے نزولی عقدہ کے طول بلد سے ۹۰° بڑا ہے ـ عرض بلد فی الواقع ۹۰° ـ ۱° ۳۲ً ۶ً = ۸۸° ۲۷ً ۵۴ً ہے ـ

اِن قاعدوں سے ہم ہر یوم کے لیے حسب ذیل تین مقداریں معلوم کر سکتے ہیں: ـــ ارضی خط اُستواء کے ساتھ قمری خط استواء کا میلان مہ، ارضی خط استواء پر قمری خط اُستواء کے صعودی عقدہ کا صعود مستقیم چً، اور قمری خط استواء کی وہ قوس ق جو ارضی خط اُستواء پر چاند کے صعودی عقدہ سے، طریق الشمس پر (۴۰۲)

اِس کے صعودی عقدہ تک ہے۔ طریق الشمس پر چاند کے مدار کے صعودی عقدہ کا طول بلد حسب معمول چ ہے۔



شکل (۱۰۰)

♈ (شکل ۱۰۰) اعتدال ربیع ہے، طریق الشمس ♈ ن پر چاند کے مدار کا صعودی عقدہ ن ہے اور اس لیے حسب کلیہ ۲ قمری خط استواء ھ ن کا نزولی عقدہ ہے اور چونکہ ق کی پیمائش ھ سے صعودی عقدہ تک کیجاتی ہے اس لیے

ھ ن = ق - ۱۸۰°

اِس کروی مثلث میں سہ اور مہ کی قیمتیں علی الترتیب ۲۳° ۲۷' ۸" اور ۵° ۸' ۴۳" ہیں۔ چ وقت کا ایک تفاعل ہے۔ اس کی قیمتیں دس دس دن کے وقفوں سے سال تمام کے لیے القیمرس میں دیجاتی ہیں۔ چ کی ہر قیمت کے متناظر مقداریں مہ، ق، چ، حسب ذیل ضابطوں سے محسوب کیجاتی ہیں:—

جم مہ = جم سہ جم مہ + جب سہ جب مہ جم چ
جب مہ جب ق = - جب سہ جب چ
جب مہ جم ق = جم سہ جب مہ - جب سہ جم مہ جم چ

جم مہ = جم سہ جم مہ + جب سہ جب مہ جم چ
جب مہ جب چَ = - جب مہ جب چ
جب مہ جم چَ = جم مہ جب سہ - جب مہ جم سہ جم چ

یہ مساواتیں غیر تابع نہیں ہیں اور بلاشبہ پہلی اور چوتھی مماثل ہیں۔ پہلی تین مساواتوں سے مہ اور ق بغیر کسی ابہام کے معلوم ہو سکتے ہیں اور اسی طرح آخری تین مساواتوں سے مہ اور چَ معلوم ہوتے ہیں۔ مہ کی یہ دو قیمتیں جو اس طرح الگ الگ مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں منطبق ہو جائیں تو یہ انطباق گویا کام کی صحت کی ایک مفید جانچ ہے۔ (۴۰۳)

مثال ۱ — بتاریخ ۲۸ ستمبر ۱۹۰۸ء چاند کے صعودی عقدہ کا طول بلد ۲۰۰° ۶' ۴۶" ہے۔ ارضی خط استوا کے ساتھ قمری خط استوا کا میلان، ارضی خط استوا پر قمری خط استوا کے صعودی عقدہ کا صعود مستقیم، اور ارضی خط استوا پر کے صعودی عقدہ سے طریق الشمس پر کے صعودی عقدہ تک قوس معلوم کرو۔

اوپر کے ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

مہ = ۲۲° ۵۹'، ق = ۲۵۴° ۹'، چَ = ۳۵۶° ۱۹'

مثال ۲ — کیسینی کے کلیوں سے ثابت کرو کہ قمری خط استوا کا شطب، چاند کی سطح پر حسب ذیل عمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

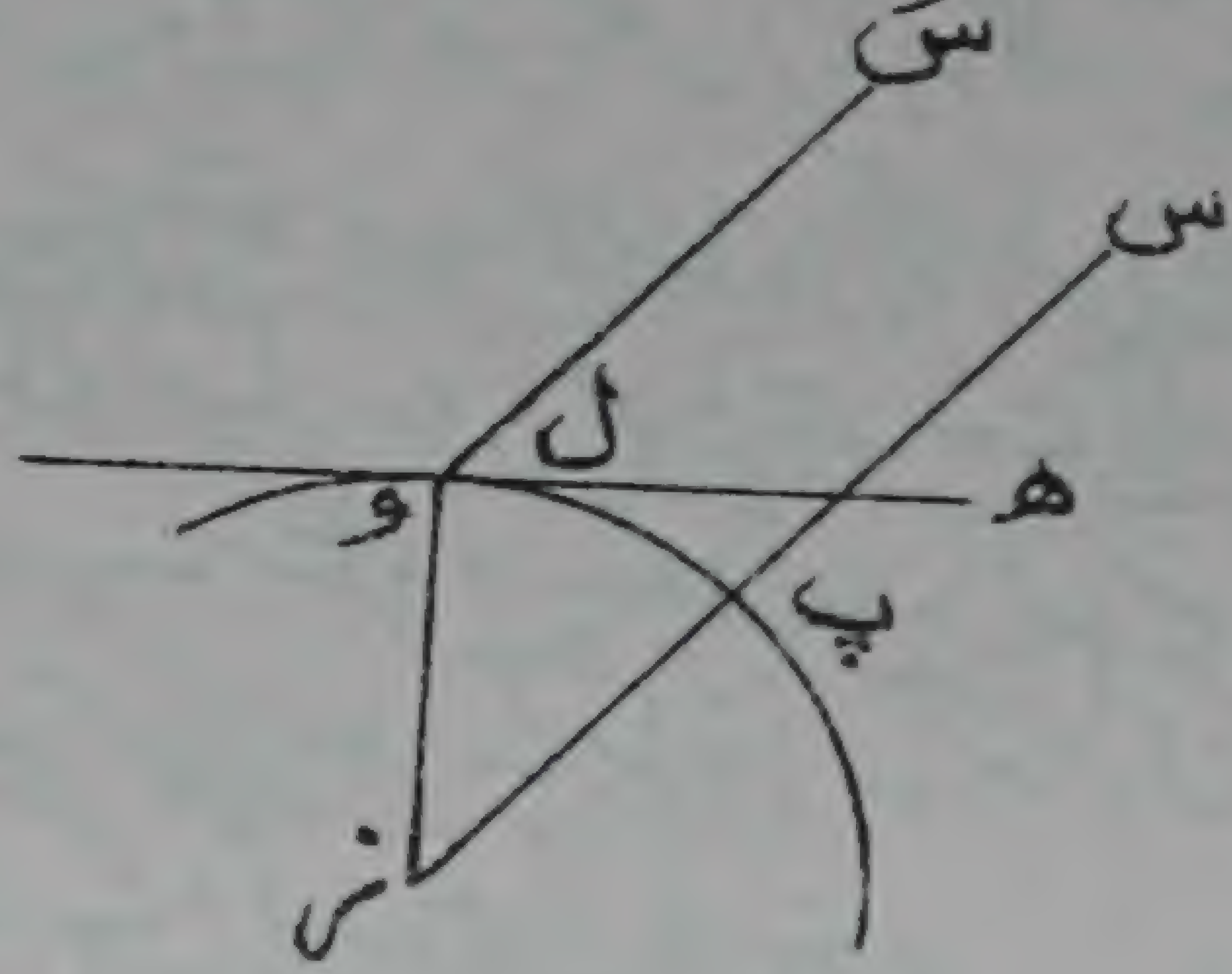
چاند کو کرہ سمجھ کر اس کے مرکز سے چاند کے مدار اور طریق الشمس کے شطبوں تک خطوط کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خطوط چاند کی سطح سے علی الترتیب ا اور ب میں ملتے ہیں۔ قوس اب کو ب سے آگے ج تک اتنا خارج کرو کہ ب ج = ۱° ۳۲' ۶"۔ پس قمری خط استوا کا شطب چاند کی سطح پر ج ہے۔

۱۳۴ — سمندر میں جہاز کا محل معلوم کرنے کے لیے سمنر (Sumner) کا طریقہ۔

اگر زمین کے مرکز سے سورج کے مرکز کی طرف ایک خط کھینچا جائے تو یہ خط زمین کی سطح کو ایک نقطہ میں قطع کرے گا، اس نقطہ کو زیر شمسی نقطہ کہا جائے گا۔

اس طرح ہر لمحہ پر کسی نہ کسی جگہ ایک زیر شمسی نقطہ ہوگا۔ زمین پر یہ وہ مقام ہوتا ہے جہاں سورج اُس لمحہ پر ٹھیک راس میں ہوتا ہے ۔ زیر شمسی نقطہ کا ارض مرکزی عرض بلد صریحاً سورج کا مَیل ہے ۔ زیر شمسی نقطہ کا طول بلد جو گرینوچ سے مشرق کی جانب[1] پیمائش کیا گیا ہو {۲۴ گ۔ (ظاہری وقت گرینوچ پر)} ہے۔

(۴۰۴) فرض کرو کہ زمین ایک کرہ ہے جس کا مرکز ن ہے (شکل ۱۰۱) اور سورج کے اختلاف منظر کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ ن س سورج کی سمت ہے اور پ زیر شمسی نقطہ ہے ۔ فرض کرو کہ مشاہد کا محل و ہے جو سورج کو سمت و سَ میں جو ن س کے متوازی ہے دیکھتا ہے اور فرض کرو کہ وہ سورج کا ارتفاع ل = زاویہ ھ و سَ مشاہدہ کرتا ہے ۔ تب زاویہ و ن پ = ۹۰° ۔ ل اور



شکل (۱۰۱)

ہم دیکھتے ہیں کہ سورج کا ارتفاع مشاہد اور زیر شمسی نقطہ کے درمیان زاویُ فاصلہ کا تکملہ ہے۔ جب مشاہدہ سے سورج کا ارتفاع ل حاصل ہوتا ہے تو مشاہد یہ جان لیتا ہے کہ وہ اُس لمحہ پر زمین کے ایک چھوٹے دائرہ کے محیط پر واقع ہے جو زیر شمسی نقطہ کے گرد نصف قطر ۹۰° ۔ ل لیکر کھینچا گیا ہو۔ اگر مشاہد کو گرینوچ کا وقت اور شمسی مَیل معلوم ہیں تو وہ زیر شمسی نقطہ کا جغرافیُ محل معلوم کر لیتا ہے اور اسلیے وہ تسطیحی نقشہ پر (دفعہ ۲۳) ایک دائرہ کا محیط کھینچ سکتا ہے جس پر اس کا محل واقع ہے۔ بلاشبہ مشاہد کو اپنے محل وقوع کا کچھ اندازہ ہوگا اور اس لیے اُس کو ایک بہت چھوٹی قوس سے زیادہ کی ضرورت نہیں ہوگی جو عملاً ایک خط مستقیم ہوگی۔ اس خط کو سمنری خط کہتے ہیں کیونکہ سمنر نے اس طریقہ کو ایجاد کیا تھا۔ اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ سورج کے ارتفاع کے صرف ایک واحد مشاہدہ سے ملاح اپنے نقشہ پر ایک چھوٹا خط جو اُس کے حقیقی محل میں سے گذرے کھینچ سکتا ہے۔ اس محل کو متعین کرنیکے لیے

[1] ارضی طول بلدوں کو گرینوچ کے مشرقاً پیمائش کرنا اکثر سہولت بخش ہوتا ہے۔

اُسے مشاہدہ کو دُہرانا چاہئے جبکہ سورج ایک مختلف ارتفاع پر چند گھنٹوں بعد پہنچے۔ تب وہ دوسرا سمنری خط کھینچ سکیگا اور ان دو خطوں کے نقطہ تقاطع سے اُس کا محل معلوم ہوگا۔

اِس بحث میں ہم نے یہ تسلیم کرلیا ہے کہ مُشاہد کا محل مُشاہدوں کے درمیانی وقفہ میں نہیں بدلتا۔ اگر مشاہد حرکت میں ہے اور وہ اس راستہ سے واقف ہے جس پر وہ حرکت کررہا ہے اور اسے یہ بھی واقف ہے کہ مشاہدہ اول کے بعد اس نے کتنے میل طے کئے ہیں تو اُسے حسب ذیل طریقہ پر عمل کرنا ہوگا:۔ پہلے سمنری خط پر کوئی نقطہ ا لو اور نقشہ پر ایک ایسے نقطہ ب کا نشان لگاؤ کہ ا ب مقدار اور سمت دونوں میں طے شدہ فاصلہ کو تعبیر کرے۔ ب میں سے ایک خط پہلے سمنری خط کے متوازی کھینچو تو جہاز دوسرے مشاہدہ کے وقت اِس متوازی پر کہیں نہ کہیں واقع ہونا چاہئے۔ دوسرے سمنری خط کے ساتھ اس متوازی کا نقطہ تقاطع جہاز کے محل کو دوسرے مشاہدہ کے وقت تعبیر کرتا ہے۔

(۳۰۵) ہم حسب ذیل طریقہ سے سمنری خط کے تسطیحی ظل کی مساوات معلوم کرسکتے ہیں جس میں زیرِ شمسی نقطہ کا عرض بلد اور طول بلد ضہ اور طہ ہیں اور جہاں سورج کا مشاہدہ کردہ ارتفاع ل ہے۔

فرض کرو کہ مشاہد کا عرض بلد بہ اور طول بلد لہ ہے تو

جب ل = جب بہ جب ضہ + جم بہ جم ضہ جم (لہ - طہ)

اگر ظل میں نقطہ بہ، لہ کے متناظر نقطہ کے محدد لا، ما ہوں تو صفحہ ۹۷ حصہ اول کی مساواتوں سے

لا = ا جم بہ جم لہ \ (ا - جب بہ)، ما = ا جم بہ جب لہ \ (ا - جب بہ)

اس لیے ا \ (ا - جب بہ)

= (ا جب ضہ - لا جم طہ جم ضہ - ما جب طہ جم ضہ) \ (ا جب ضہ - ا جب ل)

اور لا² + ما² = ا² { ۲ \ (ا - جب بہ) - ا }

(ا - جب بہ) کو ساقط کرنے سے دائرہ کی مطلوبہ مساوات حسب ذیل حاصل ہوتی ہے:۔

(لا² + ما²) (جب ضہ - جب ل) + ۲ ا جم ضہ (لا جم طہ + ما جب طہ)

- ا^2 (جب ضہ + جب ل) = ۰

اِس کی تصدیق ہم اس طرح کر سکتے ہیں کہ اگر ل = ۹۰° تو یہ مساوات ذیل کی سادہ مساوات میں تحویل ہو جاتی ہے

{لا - ا جم ضہ جم طہ | (ا - جب ضہ)}^{2} + {ما - ا جم ضہ جب طہ | (ا - جب ضہ)}^{2} = ۰

اِس صورت میں ظاہر ہے کہ دائرہ نقشہ کے اُس نقطہ میں تحویل ہو جاتا ہے جو زیر شمسی نقطہ کے متناظر ہے۔

مثال ۱ ۔ سورج کے دو ارتفاع ا$_1$ اور ا$_2$ وقت ۲ و کے وقفہ سے مشاہدہ کئے گئے اور سمنری خطوط علی القوائم قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ

جب ا$_1$ جب ا$_2$ = ا - ۲ جب^2 و جم^2 ضہ

[Coll. Exam. 1903]

جہاں ضہ سورج کا میل ہے۔

فرض کرو کہ زیر شمسی نقطہ س$_1$ س$_2$ ہیں، پ ارضی قطب شمالی ہے اور و مشاہد کا محل ہے تو زاویہ س$_1$ پ س$_2$ = ۲ و نیز س$_1$ و س$_2$ = ۹۰° اور و س$_1$، و س$_2$ علی الترتیب ۹۰° - ا$_1$ اور ۹۰ - ا$_2$ ہیں اور پ س$_1$ = پ س$_2$ = ۹۰° - ضہ۔

مثال ۲ ۔ جب دو معلومہ ستاروں کے ارتفاعوں عہ$_1$ اور عہ$_2$ کا ایکساتھ مشاہدہ کر کے عرض بلد اور طول بلد حسب طریقہ سمنری معلوم کئے گئے ہوں تو ثابت کرو کہ مشاہدہ کے دو ممکن مقاموں کا طول بلد ایک ہی ہو گا اگر

جب عہ$_1$ | جب عہ$_2$ = جب ضہ$_1$ | جب ضہ$_2$

جہاں ضہ$_1$ اور ضہ$_2$ اِن دو ستاروں کے میل ہیں۔

مثال ۳ ۔ گرینوچ کو کبی وقت ت پر دو ستاروں کے راسی فاصلے ی$_1$ اور ی$_2$ مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ اِن ستاروں کے صعود مستقیم عہ$_1$ اور عہ$_2$ ہیں اور اِن کے میل ضہ مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ مشاہدہ کے مقام کا (مغربی) طول بلد ت - ½ (عہ$_1$ + عہ$_2$) سے بقدر فہ کے بڑا ہے جہاں مم فہ = جم لہ مم لہ ± جب لہ قم لہ × مس ی$_1$ اور ی$_2$، لا، لہ معاون زاویے ہیں جو حسب ذیل مساواتوں سے معلوم ہوتے ہیں (۴۰۶)

(۱) مم لہ = مم ضہ جم ½ (عہ$_1$ - عہ$_2$)،

(۲) جب ط = جم ضہ جب $\frac{1}{2}$ (ع$_{1}$ − ع$_{2}$)،

(۳) مس لا = مس $\frac{1}{2}$ (ی$_{1}$ − ی$_{2}$) مس $\frac{1}{2}$ (ی$_{1}$ + ی$_{2}$) مم ط،

(۴) جم ی = جم $\frac{1}{2}$ (ی$_{1}$ − ی$_{2}$) جم $\frac{1}{2}$ (ی$_{1}$ + ی$_{2}$) قط لا قط ط

[Math. Trip.]

لہ اُس نقطہ کا میل ہے جو اِن دو ستاروں کے درمیانی فاصلہ کا وسطی ہے، ستاروں کا درمیانی فاصلہ ۲ ط ہے، ستاروں کو ملانے والی قوس پر راس سے عمود ی ہے، اِس عمود کے پائین سے ستاروں کے فاصلوں کا حسابی اوسط لا ہے، ستاروں کے درمیانی فاصلہ کے وسطی نقطہ کا ساعتی زاویہ ۔ ضہ ہے اور اِس نقطہ، قطب، اور راس سے ایک مثلث بنتا ہے جس سے صفحہ ۴ حصہ اول کے ضابطہ (۶) کے ذریعہ مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے ۔

مثال ۴ ۔ یہ دیا گیا ہے کہ سورج کا میل ۱۵° ش ہے، اور وقت پیما سے گرینوچ اوسط وقت ۲ گ ۱۰ م معلوم ہوتا ہے اور سورج کا مشاہدہ کردہ راسی فاصلہ ۵۴° ہے ثابت کرو کہ اُس نقشہ پر جو قطب جنوبی سے خط اُستواء کے متوازی مستوی پر تسطیحی ظِل لیکر بنایا گیا ہے متناظر سمتری خط کی مساوات (قطبی محددوں میں، شمالی قطب کو قطب اور گرینوچ کے نصف النہار کو ابتدائی خط لیکر)

$$ر^{2} = ۲\,ج\,ر\,جم\,(ط + ۳۰^{\circ}) + ج^{2}\,(۲\sqrt{۳} - ۳) = ۰$$

ہے ۔ وقت کی مساوات نظرانداز کیگئی ہے اور ج ایک مستقل ہے جو نقشہ کے پیمانہ پر منحصر ہے ۔

[Coll. Exam.]

(۴۰۷)

بیسواں باب

سیاروی مظاہر

۱۳۵ – تمہید –

ہم دیکھ چکے ہیں (دفعہ ۵۰) کہ ہر سیّارہ سورج کے گرد کیپلر کے کُلیوں کی بموجب حرکت کرتا ہے۔ چونکہ زمین بھی ایک سیارہ ہے اور کیپلر کے کُلیوں کی پابندی کرتی ہے اس لیے کسی دوسرے سیارہ کی مشاہدہ کردہ حرکت ارضی مشاہد کی حرکتوں کی وجہ سے پیچیدہ ہوتی ہے۔ مثلاً ستاروں کے لحاظ سے سیارونکی ظاہری حرکتیں بالعموم مغرب سے مشرق کی طرف ہوتی ہیں لیکن وہ کبھی کبھی مقیم ہوتے ہیں یا مشرق سے مغرب کی طرف حرکت کرتے نظر آتے ہیں۔

حسب ذیل اصطلاحیں استعمال کی جائیں گی :-

عقدوں کا خط۔ سیارہ کے مدار کا مستوی طریق الشمس کو جس خط پر قطع کرتا ہے اُس کو عقدوں کا خط کہتے ہیں۔

طریق الشمس اور سیارہ کے مدار کو زمین اور سیارہ کی حرکتوں کی سمتوں میں درجہ دار بڑے دائرے تصور کیا جائے تو ان دو دائروں کا میلان سیارہ کے مدار کا میلان ہے۔

سیارہ کے مدار کا **صعودی عقدہ** وہ ہے جس میں حرکت کی سمت طریق الشمس کو اُس جانب سے جس میں طریق الشمس کا ضد شطب ہے اُس جانب جس میں **شطب** ہے عبور کرتی ہے۔ دوسرے عقدہ کو **نزولی عقدہ** کہتے ہیں۔

سیاروں کے مقاموں کی تعریف ان کے **عرض بلدوں** اور **طول بلدوں** سے کیجاتی ہے اور یہ مقام **شمس مرکزی** کہلاتے ہیں جبکہ انہیں سورج پر کے ایک مشاہد کے حوالہ سے بیان کیا جائے اور **ارض مرکزی** کہلاتے ہیں جبکہ انہیں زمین پر کے ایک مشاہد کے حوالے سے بیان کیا جائے۔ (۲۰۸)

اس طرح کسی سیارہ کا **شمس مرکزی عرض بلد** طریق الشمس سے اُس کا وہ زاوئی فاصلہ ہے جو سورج سے نظر آتا ہے۔ **شمس مرکزی طول بلد** وہ زاویہ ہے جو سورج پر اُس قوس کے محاذی بنتا ہے جو راس الحمل اور اُس عمود کے پائین کو ملاتی ہے جو سیارہ سے طریق الشمس پر کھینچا گیا ہو جہاں اس قوس کی پیمائش ♈ سے مثبت سمت میں کی گئی ہو۔

اسی طرح ارض مرکزی عرض بلد اور طول بلد کی تعریفیں کیجاتی ہیں جبکہ مشاہد کے متعلق یہ فرض کر لیا جائے کہ وہ زمین پر یا زیادہ صحیح طور پر زمین کے مرکز پر واقع ہے۔

کسی سیارہ کا مدار پوری طرح متعین کرنے کے لیے چھہ مقداریں ضروری ہیں اور وہ حسب ذیل ہیں :-

(۱) طریق الشمس پر صعودی عقدہ کا طول بلد قہ
(۲) طریق الشمس کے ساتھ سیارہ کے مدار کا میلان مہ
(۳) حضیض کا طول بلد حہ جو ۷ سے طریق الشمس پر مثبت سمت میں سیارہ کے صعودی عقدہ تک اور وہاں سے سیارہ کے مدار کے مستوی میں سیارہ کی حرکت کی سمت میں حضیض تک یعنی اس کے مدار کے اُس نقطہ تک جہاں وہ سورج سے قریب ترین ہوتا ہے پیمائش کیا گیا ہو۔
(۴) ناقص کا نیم محور اعظم ا۔ اس مقدار کو بالعموم اوسط فاصلہ کہتے ہیں (دیکھو صفحہ ۲۲)
(۵) ناقص کا خروج المرکز ز
(۶) آن ت یا وہ تاریخ جس پر سیارہ حضیض میں سے گذرتا ہے۔
اِن چھہ مقداروں میں سے پہلی دو مقداروں سے مدار کا مستوی متعین ہوتا ہے، تیسری مقدار سے قطع ناقص کے محور کا محل معلوم ہوتا ہے اور چوتھی اور پانچویں مقداروں سے قطع ناقص کی شکل اور اس کے ابعاد حاصل ہوتے ہیں۔ چھٹی مقدار سیارہ کے مدار میں اس کا محل متعین کرنے کے لیے ضروری ہے۔

۱۳۶ — مشاہدہ سے کسی سیارہ کے مدار کا تقریبی تعین۔

چونکہ اہم سیاروں کے مدار تقریبًا دائری ہیں اس لیے ہم اس تقرب میں انہیں ٹھیک دائری فرض کریں گے اگرچہ وہ مختلف مستویوں میں ہیں۔ ہم اول یہ ثابت کریں گے کہ اگر اِس مفروضہ کو صحیح سمجھا جائے تو ہر سیارہ کے صرف دو مشاہدے اُس کا مدار متعین کرنے کے لیے کافی ہیں۔

کسی سیارہ کا ایک مشاہدہ جس سے ہماری مُراد کرۂ سماوی پر سیارہ کے محل کی تعیین ہے جس سے اس کا عرض بلد اور طول بلد معلوم ہو سکیں اس سے زیادہ کچھ ظاہر نہیں کرتا کہ فضا میں اُس خط مستقیم کا محل کیا ہے جس پر سیارہ اُس آن کسی جگہ واقع ہے۔ بلاشبہ مشاہدہ کے وقت زمین کا مقام معلوم ہوتا ہے اور مشاہدہ کے ذریعہ زمین سے اُس خط ا کی سمت معلوم ہوتی ہے (۴۰۹)

جس میں سیارہ واقع ہونا چاہئے۔ اسکے بعد کسی تاریخ پر اسی قسم کے مشاہدہ سے ایک دوسرا خط مستقیم ب معلوم ہوتا ہے جس میں سیارہ اس وقت واقع ہے۔ ان دو مشاہدوں کے درمیان وقت کا وقفہ نوٹ کرلیا جاتا ہے۔

یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ سیارہ کا مدار ایک دائرہ ہے اور بلاشبہ اس دائرہ کا مرکز چونکہ سورج کا مرکز ہے اس لیے معلوم ہے۔ اس طرح ہمیں ایک دائرہ بنانا ہے جس کا مرکز س ایک دئے ہوئے نقطہ پر ہو اور اس کا محیط دو دئے ہوئے خطوط مستقیم ا اور ب کو قطع کرے۔ بلاشبہ اس مسئلہ کے حلوں کی تعداد لامتناہی ہے کیونکہ ا پر کوئی نقطہ ف لو اور س کو مرکز اور س ف کو نصف قطر مانکر ایک کرہ کھینچو۔ فرض کرو کہ یہ کرہ ب کو جن نقطوں پر قطع کرتا ہے ان میں سے ایک ق ہے۔ تب مستوی س ف ق کرہ کو ایک دائرہ میں قطع کرتا ہے جس کا مرکز س پر ہے اور جو ا اور ب کو قطع کرتا ہے۔ اس لیے پہلی نظر میں یہ معلوم ہوگا کہ کسی سیارہ کے دائری مدار کو دو مشاہدوں کے ذریعہ متعین کرنے کا مسئلہ مبہم ہے۔

لیکن وقت کے اس وقفہ کے مشاہدہ سے جو ف سے ق تک جانے میں سیارہ لیتا ہے یہ مسئلہ مبہم نہیں رہتا۔ جب مستوی س ف ق کھینچ لیا جاتا ہے تو مدار جو اس طرح معلوم ہوتا ہے ایک مدت دوران رکھتا ہے جس کو اس کے نصف قطر کے طول سے تیسرے کلیہ کے ذریعہ معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اگر وقت کی اکائی سال ہو اور زمین کا اوسط فاصلہ طول کی اکائی ہو اور اگر مدت دوران سالوں میں ت ہو تو $ت^2 = (س ف)^3$ یا

$ت = (س ف)^{\frac{3}{2}}$۔ اس لیے ف اور ق کے درمیان وقت کا وقفہ

$(س ف)^{\frac{3}{2}} \times$ زاویہ ف س ق $\div 2\pi$ ہے۔ اس وقفہ کا مقابلہ مشاہدہ کردہ وقفہ سے کرنا چاہئے اور متواتر آزمایشوں میں ف کو بدلنا چاہئے جب تک کہ مشاہدہ کردہ اور محسوبہ وقت کے وقفے منطبق نہ ہوجائیں۔ تب س ف ق مطلوبہ مدار ہوگا۔

اس مسئلہ کی تحقیق کا تحلیلی طریقہ حسب ذیل ہے۔
فرض کرو کہ سیارہ کے شمس مرکزی محدد لا، ما، ی ہیں اور اس کے مدار کا نصف قطر ا ہے تو مدار کی مساواتیں جبکہ محور لا، ♈ میں سے گذرے اور محوری طریق الشمس کا عماد ہو حسب ذیل ہیں

لا^2 + ما^2 + ی^2 = ا^2 .... (۱)

ی = ف لا + ق ما .... (۲)

فرض کرو کہ مشاہدہ اول پر سیارہ کا ارض مرکزی عرض بلد، طول بلد، اور فاصلہ علی الترتیب بہ، لہ، غہ ہیں اور سورج سے زمین کا فاصلہ ر اور اُس کا شمس مرکزی طول بلد ل ہے تو (۴۱۰)

لا = غہ جم بہ جم لہ + ر جم ل،

ما = غہ جم بہ جب لہ + ر جب ل

ی = غہ جب بہ

پس (۱) اور (۲) میں درج کرنے سے

غہ^2 + ۲ غہ ر جم بہ جم (ل - لہ) + ر^2 = ا^2 .... (۳)

غہ جب بہ = ف (غہ جم بہ جم لہ + ر جم ل) + ق (غہ جم بہ جب لہ + ر جب ل) ...... (۴)

اسی طرح دوسرے مشاہدہ سے دو متشابہ مساواتیں ملتی ہیں

غَہ^2 + ۲ غَہ رَ جم بَہ جم (لَ - لَہ) + رَ^{2} = ا^2 .... (۵)

غَہ جب بَہ = ف (غَہ جم بَہ جم لَہ + رَ جم لَ) + ق (غَہ جم بَہ جب لَہ + رَ جب لَ) ...... (۶)

اگر ت وقت ہو تو ۲ ٣١ ت ا$^{\frac{3}{2}}$ وہ زاویہ ہے جس میں سے سیارہ حرکت کرچکا ہے، اور چونکہ زمین کا فاصلہ اور سال علی الترتیب فاصلہ اور وقت کی

اکائیاں ہیں اس لیے

ا^۲ جم (۲ ہ ت اَ ^(۳/۲)) = لالَ + ما مَا + ی یَ

= غہ غہَ جم بہ جم بَہ جم (لہ - لہَ) + س سَ جم (ل - لَ)
+ غہ سَ جم بہ جم (لہ - لَ) + غہَ س جم بَہ جم (لہَ - ل)
.... (۷)

اِس طرح پانچ مساواتیں (۳ تا ۷) حاصل ہوئیں اوران میں پانچ مجہول مقداریں یعنے غہ، غہَ، ف، ق، ا ہیں۔

اب ہم یوں عمل کرتے ہیں :- ا کی ایک قیمت تسلیم کر کے ہم (۳) سے غہ کی دو قیمتیں اور (۵) سے غہَ کی دو قیمتیں معلوم کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ آیا اِن چار جوڑوں میں کوئی (۷) کو پورا کرتا ہے۔ اگر کوئی ابھی پورا نہیں کرتا تو مزید آزمائشیں کرنی چاہئیں تا آنکہ ا کی ایک ایسی قیمت حاصل ہو کہ اِس سے غہ اور غہَ کی وہ قیمتیں ملیں جو مساوات (۷) کو پورا کریں۔ پھر مساواتوں (۴) اور (۶) سے ف اور ق خطی طور پر معلوم ہوتے ہیں۔ بعد ازیں عقدہ اور اور سیارہ کے مدار کا میلان معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ کیونکہ اگر (لاَ، ماَ، ۰) عقدہ ہو تو ف لاَ + ق ماَ = ۰ یا س قہ = - ف\ق اور اس لیے قہ یا قہ + ۱۸۰° معلوم ہوتا ہے اور قط مہ = √(۱ + ف^۲ + ق^۲)

اکثر سیاروں کے مداروں کو اِس طریقہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے کیونکہ خروج المرکز چھوٹا ہونے کی وجہ سے یہ مدار دائروں سے زیادہ مختلف نہیں ہوتے۔[۱]

(۲۱۱) **عرض بلد کی دلیل** - کسی سیارہ کے شمس مرکزی محدد اُس

---

[۱] مداروں کے محسوب کرنے کا بیان گاؤس کی *Theoria Motus Corporum Cœlestium* میں دیکھو۔

زاوئی فاصلہ کی رقوم میں بہ سہولت بیان کئے جا سکتے ہیں جس میں سے سیارہ اپنے صعودی عقدہ میں سے گذرنے کے بعد سے سورج کے گرد حرکت کر چکا ہے۔ اِس زاویہ کو ہر صورت میں حرکت کی سمت میں ناپنا چاہیئے۔ اسے ہم د سے مختص کریں گے اور اُس کو **عرض بلد کی دلیل** کہینگے۔

اب ہم محور + لا، + ما، + ی وہ خطوط لیتے ہیں جو سورج کے مرکز سے اُن نقطوں تک کھینچے گئے ہیں جن کے صعود مستقیم اور میل علی الترتیب (۰°، ۰°)، (۹۰°، ۰°)، (۰°، ۹۰°) ہیں۔ پس اُس سیارہ کے محدد جو فاصلہ ر اور اُستوائی محددوں عہ، ضہ پر ہے حسب ذیل ہو جاتے ہیں

رجم ضہ جم عہ، رجم ضہ جب عہ، رجب ضہ

یا اگر انہیں طول بلد لہ اور عرض بلد بہ کی رقوم میں بیان کیا جائے تو ہم دفعہ ۳۸ ضابطوں (۱) سے بہ آسانی معلوم کرتے ہیں کہ

لا = رجم بہ جم لہ

ما = ـ رجب بہ جب سہ + رجم بہ جم سہ جب لہ،

ی = رجب بہ جم سہ + رجم بہ جب سہ جب لہ

اگر طریق الشمس کے ساتھ سیارہ کے مدار کا میلان مہ ہو اور اسکے صعودی عقدہ کا طول بلد قہ تو

جب بہ = جب د جب مہ، جم بہ جب (لہ ـ قہ) = جب د جم مہ

جم بہ جم (لہ ـ قہ) = جم د

اِن سے بہ آسانی حاصل ہوتا ہے

جم بہ جم لہ = جم د جم قہ ـ جب د جم مہ جب قہ

جم بہ جب لہ = جم د جب قہ + جب د جم مہ جم قہ

لا، ما، ی کے جملوں سے بہ اور لہ کو ساقط کرنے پر د کے متناظر جو نقطہ مدار میں ہے اُس کے محدد

لا = رجب ا جب (ا + د)، ما = رجب ب جب (ب + د)، ی = رجب ج جب (ج + د)

حاصل ہوتے ہیں جہاں ا، ب، ج، ا، ب، ج، خط اُستوار کے مستقلوں کے طور پر موسوم ہیں اور حسب ذیل معلوم کئے جاتے ہیں:-

جب ا جب ا = جم قہ،

جب ا جم ا = -جم مہ جب قہ،

جب ب جب ب = جم سہ جب قہ،

جب ب جم ب = جم مہ جم سہ جم قہ - جب مہ جب سہ،

جب ج جب ج = جب سہ جب قہ،

جب ج جم ج = جب مہ جم سہ + جم مہ جب سہ جم قہ (۲۱۲)

یہ ثابت کرنا بھی آسان ہے کہ

جم ا = جب مہ جب قہ،

جم ب = -جب مہ جم سہ جم قہ - جم مہ جب سہ،

جم ج = -جب مہ جب سہ جم قہ + جم مہ جم سہ،

مس مہ = قم ا جب ب جب ج قط ا جب (ج-ب)

ہم واٹسن کی تھیوریٹیکل آسٹرانومی سے ایک مثال لیتے ہیں۔ اس میں

قہ = ۲۰۶° ۴۳′ ۴۷،۳۳″

مہ = ۴ ۳۶ ۱۱،۵۰

سہ = ۲۳ ۲۷ ۲۴،۰۳

اور طالب علم اس امر کی تصدیق کر سکتا ہے کہ خط اُستوار کے مستقلوں کیلئے حاصل ہوتا ہے

ا = ۲۹۶° ۳۹′ ۷،۰۵″ ل جب ا = ۹،۹۹۹۷۱۵۶

ب = ۲۰۵ ۵۵ ۲۷،۱۴ ل جب ب = ۹،۹۷۴۸۲۵۲

ج = ۲۱۲ ۳۲ ۱۷،۷۴ ل جب ج = ۹،۵۲۲۱۹۲۰

۱۳۷ ـ شمس مرکزی محددوں سے ارض مرکزی محددین متعین

کرنے کا طریقہ اور اس کے برعکس -

فرض کرو کہ ہم تین قائم محور لیتے ہیں جہاں مبدا، سورج کے مرکز پر ہے، + لا کا محور وہ خط ہے جو ♈ تک کھینچا گیا ہے، + ما کا محور وہ خط جو اس نقطہ تک کھینچا گیا ہے جس کا عرض بلد اور طول بلد ۰°، ۹۰° ہیں، اور + ی کا محور وہ خط ہے جو طریق الشمس کے شطب تک کھینچا گیا ہے -

فرض کرو کہ سورج کے مرکز سے سیارہ کا فاصلہ ر ہے اور سیارہ کے شمس مرکزی طول بلد اور عرض بلد لہ، بہ ہیں تب سیارہ کے شمس مرکزی محدد لا، ما، ی ہوں تو

لا = رجم بہ جم لہ، ما = رجم بہ جب لہ، ی = رجب بہ

اگر زمین کا فاصلہ ں ہو اور اسکا طول بلد ل اور اگر زمین کے محدد ﻻ، ﻣﺎ ہے ہوں تو

ﻻ = ں جم ل، ﻣﺎ = ں جب ل، ہے ::

فرض کرو کہ زمین کے مرکز میں سے گذرنے والے متوازی محوروں کے ایک جٹ کے لحاظ سے سیارہ کے محدد لَا، مَا، یَ ہیں تو

لا = لَا + ﻻ، ما = مَا + ﻣﺎ، ی = یَ + ہے .... (۱)

اور اگر سیارہ کا ارض مرکزی طول بلد اور عرض بلد لَہ، بَہ ہوں اور اسکا فاصلہ زمین کے مرکز سے غہ ہو تو

لَا = غہ جم بَہ جم لَہ، مَا = غہ جم بَہ جب لَہ، یَ = غہ جب بَہ (۲۱۲)

اور اس لیے (۱) سے حاصل ہوتا ہے

رجم بہ جم لہ = ں جم ل + غہ جم بَہ جم لَہ
رجم بہ جب لہ = ں جب ل + غہ جم بَہ جب لَہ ...... (۲)
رجب بہ = غہ جب بَہ

ان مساواتوں (۲) میں سے پہلی کو جم ل سے اور دوسری کو جب ل سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

رجم بہ جم (ل - لہ) = ں + غہ جم بَہ جم (ل - لَہ)

انہی دو مساواتوں کو علی الترتیب جب ل اور جم ل سے ضرب دینے اور تفریق کرنے سے

رجم بہ جبب (ل - لہ) = غہ جم بہَ جبب (ل - لہَ)

اس لیے مس (ل - لہَ) = رجم بہ جبب (ل - لہ) / (رجم بہ جم (ل - لہ) - ر)

چونکہ مشاہدہ کا وقت معلوم ہے اس لیے ل اور ر دونوں معلوم ہیں اور اس لیے جب سیارہ کے شمس مرکزی محدد لہ، بہ معلوم ہوں تو ل - لہَ اور اس لیے لہَ معلوم ہو جاتے ہیں۔

نیز ر جم ل اور ر جب ل کو دوسری جانب منتقل کر کے مساواتوں (۲) کا مربع لینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوتا ہے

غہ² = ر² - ۲ ر ر جم بہ جم (ل - لہ) + ر²

جس سے غہ معلوم ہو جاتا ہے۔

(۲) کی پہلی دو مساواتوں سے

غہ² جم² بہَ = ر² جم² بہ - ۲ ر ر جم بہ جم (ل - لہ) + ر²

اِس لیے (۲) کی آخری مساوات سے

مس بہَ = رجب بہ / (ر² جم² بہ - ۲ ر ر جم بہ جم (ل - لہ) + ر²)^½

اس لیے بہَ معلوم ہوتا ہے۔

اسی طرح بہ اور لہ حاصل ہو سکتے ہیں جبکہ بہَ اور لہَ دیے گئے ہوں۔

۱۳۸ — سیارہ کی ارض مرکزی حرکت۔

فرض کرو کہ سورج س، زمین ز، سیارہ پ ہے (شکل ۱۰۲)۔ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ زمین اور سیارہ دائروں میں ہم سطوی مداروں میں گردش کرتے ہیں جن کے نصف قطر علی الترتیب ا، ب ہیں۔ فرض کرو کہ زمین اور سیارہ کے شمس مرکزی طول بلد ل اور ل ہیں اور سیارہ کا ارض مرکزی طول بلد اور فاصلہ لہ اور غہ ہیں۔

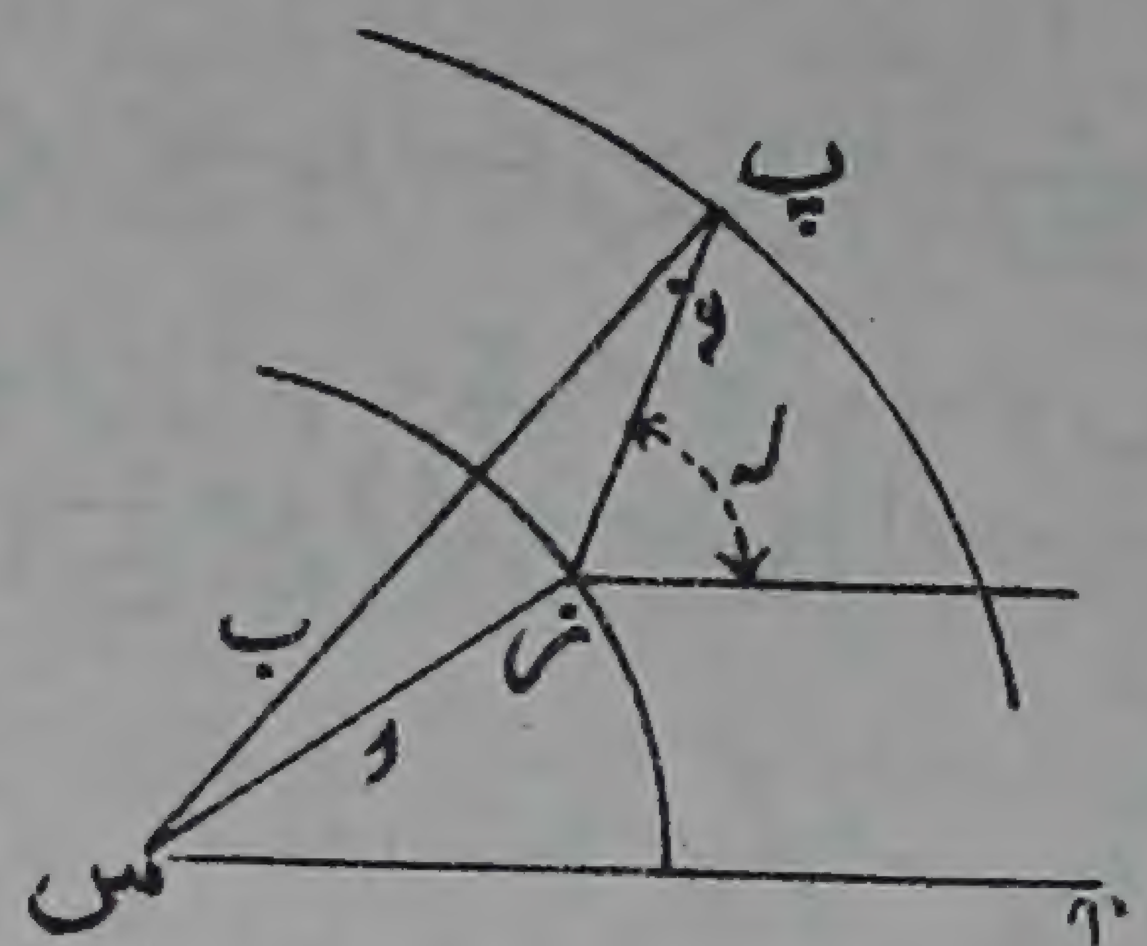
چونکہ

غہ جب لہ = ب جب ل - ا جب ل
غہ جم لہ = ب جم ل - ا جم ل ......(۱)

اس لیے

مس لہ = (ب جب ل - ا جب ل) / (ب جم ل - ا جم ل)

جس سے ارض مرکزی طول بلد حاصل ہوتا ہے۔



شکل (۱۰۲)

کیپلر کے کلیوں کی رُو سے سیّارہ کی اوسط حرکت $ب^{-\frac{3}{2}}$ کے متناسب ہے۔ ہم وقت اور فاصلہ کی ایسی اکائیاں منتخب کریں گے کہ اوسط حرکت یعنے شمس مرکزی زاوی رفتار نہ صرف $ب^{-\frac{3}{2}}$ کے متناسب ہو بلکہ فی الواقع اُس کے مساوی ہو، پس

$$\frac{\text{فرل}}{\text{فرت}} = ب^{-\frac{3}{2}} ،\quad \frac{\text{فرل}}{\text{فرت}} = ا^{-\frac{3}{2}}$$

اب ز کے لحاظ سے پ کی زاوی رفتار میں جو تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں انکی تحقیق کے لیے (۱) کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{غہ جم لہ}\ \frac{\text{فرلہ}}{\text{فرت}} + \text{جب لہ}\ \frac{\text{فرغہ}}{\text{فرت}} = ب^{-\frac{1}{2}}\ \text{جم ل} - ا^{-\frac{1}{2}}\ \text{جم ل}$$

$$-\text{غہ جب لہ}\ \frac{\text{فرلہ}}{\text{فرت}} + \text{جم لہ}\ \frac{\text{فرغہ}}{\text{فرت}} = -ب^{-\frac{1}{2}}\ \text{جب ل} + ا^{-\frac{1}{2}}\ \text{جب ل} \quad ...(۲)$$

اس لیے (۱) سے

$$\text{غہ}^{2}\ \frac{\text{فرلہ}}{\text{فرت}} = ا^{\frac{1}{2}} + ب^{\frac{1}{2}} - (ا\ ب^{-\frac{1}{2}} + ب\ ا^{-\frac{1}{2}})\ \text{جم}\ (\text{ل} - \text{ل}) \quad ...(۳)$$

نیز شکل سے

$$\text{غہ}^2 = \text{ا}^2 - 2\,\text{ا}\,\text{ب}\ \text{جم}\,(\text{ل} - \text{ل}) + \text{ب}^2$$

اس لیے جم (ل - ل) کو ساقط کرنے سے

$$\text{غہ}^2\,\frac{\text{فرلہ}}{\text{فرت}} = \text{ا}^{\frac{1}{2}} + \text{ب}^{\frac{1}{2}} - \frac{\text{ا}\,\text{ب}^{\frac{1}{2}} + \text{ب}\,\text{ا}^{\frac{1}{2}}}{2\,\text{ا}\,\text{ب}}\,(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{غہ}^2)$$

جو کچھ اختصار کے بعد ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{فرلہ}}{\text{فرت}} = \frac{1}{2}(\text{ا}^{\frac{3}{2}} + \text{ب}^{\frac{3}{2}})\left\{1 - \frac{(\text{ب}^2 - \text{ا}^2)(\text{ب}^{\frac{3}{2}} - \text{ا}^{\frac{3}{2}})}{\text{غہ}^2(\text{ا}^{\frac{3}{2}} + \text{ب}^{\frac{3}{2}})}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (۴)$$

مساوات (۳) کو حسب ذیل طریقہ پر لکھا جا سکتا ہے:

$$\text{غہ}^2\,\frac{\text{فرلہ}}{\text{فرت}} = (\text{ا}^{\frac{1}{2}} + \text{ب}^{\frac{1}{2}})\left\{1 - \frac{(\text{ا}^{\frac{1}{2}} - \text{ب}^{\frac{1}{2}}) + \text{ا}^{\frac{1}{2}}\,\text{ب}^{\frac{1}{2}}}{\text{ا}^{\frac{1}{2}}\,\text{ب}^{\frac{1}{2}}}\ \text{جم}\,(\text{ل} - \text{ل})\right\}$$

جس سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر فرلہ\ فرت = ۰ تو (۴۱۵)

$$\text{جم}\,(\text{ل} - \text{ل}) = \text{ا}^{\frac{1}{2}}\,\text{ب}^{\frac{1}{2}} \Big\backslash (\text{ا} - \text{ا}^{\frac{1}{2}}\,\text{ب}^{\frac{1}{2}} + \text{ب}) \quad \ldots\ldots (۵)$$

اس طرح ل - ل کی ہمیشہ ایک حقیقی قیمت ہوگی اور اس لیے ہمیشہ ایسے نقطے ہونے چاہئیں جن پر ایک سیارہ کی کوئی زاویٔ رفتار نظر نہ آئے جبکہ اُسے دوسرے سیارہ سے دیکھا جائے۔ ایسے نقطوں کو مقیم نقطے کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ عہ ایک زاویہ ہے جس کی تعریف مساوات

$$\text{جم عہ} = \text{ا}^{\frac{1}{2}}\,\text{ب}^{\frac{1}{2}} \Big\backslash (\text{ا} - \text{ا}^{\frac{1}{2}}\,\text{ب}^{\frac{1}{2}} + \text{ب}) = (\text{ا}^{\frac{1}{2}} + \text{ب}^{\frac{1}{2}}) \Big\backslash (\text{ا}\,\text{ب}^{\frac{1}{2}} + \text{ب}\,\text{ا}^{\frac{1}{2}})$$

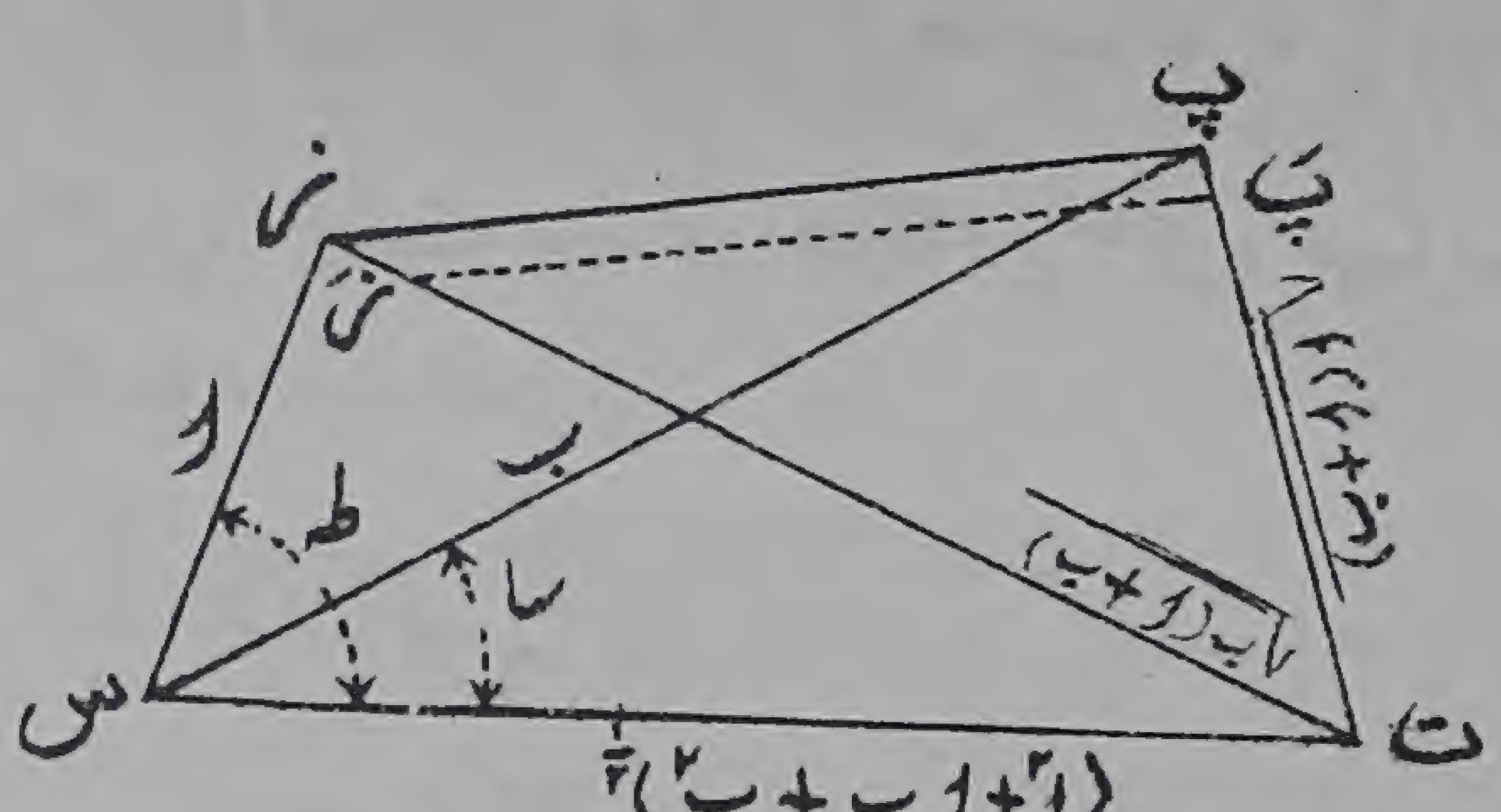
سے کی گئی ہے تو مساوات (۳) کی شکل ہو سکتی ہے

$$\text{غہ}^2\,\frac{\text{فرلہ}}{\text{فرت}} = (\text{ا}\,\text{ب}^{\frac{1}{2}} + \text{ب}\,\text{ا}^{\frac{1}{2}})(\text{جم عہ} - \text{جم فہ})$$

جہاں اختصار کے خیال سے ل - ل کی بجائے فہ لکھا گیا ہے۔ اقترانی مدت کی اثنا میں (دفعہ ۱۵۰) فہ، صفر سے ۳۶۰° تک سب قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ جب سیارے اقتران میں ہوتے ہیں تو فہ = ۰ اور فرلہ \ فرت منفی ہوتا ہے، اس لیے حرکت رجعی ہوتی ہے۔ برخلاف ازیں جب، فہ = ۱۸۰° تو فرلہ \ فرت مثبت ہوتا ہے اور حرکت راست ہوتی ہے۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ صفر اور ۱۸۰° کے درمیان فہ کی ایک قیمت کے لیے اور ۱۸۰° اور ۳۶۰° کے درمیان فہ کی دوسری قیمت کے لیے سیارہ ارضی مشاہد کو مقیم نظر آنا چاہیئے۔ اس لیے اقترانی گردش میں حرکت رجعی ہوتی ہے جبکہ فہ زاویہ ۲ عہ میں سے بڑھتا ہے اور حرکت راست ہوتی ہے جبکہ فہ زاویہ ۳۶۰° - ۲ عہ میں سے بڑھتا ہے اور اگر سیارہ اور زمین کی دَوری مدتیں د، ڈ ہوں تو اقترانی مدت میں راست اور رجعی حرکتوں کے دَور

$$\frac{۱۸۰° - عہ}{۱۸۰°} \cdot \frac{ڈ\ د}{ڈ - د} \quad \text{اور} \quad \frac{عہ}{۱۸۰°} \cdot \frac{ڈ\ د}{ڈ - د}$$

ہیں۔



شکل (۱۰۳)

سیارہ کے مدار میں مقیم نقطوں کی تحقیق جبکہ مدار کو دائری فرض کیا جائے لیکن وہ طریق الشمس کے مستوی میں نہو۔ (۴۱۶)

اگر دو سیارے سورج کے گرد دائری مداروں میں گردش کر رہے ہوں لیکن اگر یہ مدار ایک ہی مستوی میں نہوں تو مقیم نقطوں ز، پ (شکل ۱۰۳) کی تحقیق حسب ذیل طریقہ پر ہوسکتی ہے۔

فرض کرو کہ زَ اور پَ وہ محل ہیں جن تک سیارے قلیل وقت فرت میں حرکت کر چکے ہیں تو زَ پَ، ز پ کے متوازی ہونا چاہیئے اور اس لیے ز زَ، پ پَ ایک ہی مستوی میں ہونے چاہئیں اور کسی نقطہ ت پر قطع کرنے چاہئیں۔ پس چونکہ ہر سیارہ کی رفتار اپنے مدار کے نصف قطر کے جذر المربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے اس لیے

$$\text{ز ت} / \text{پ ت} = \text{ز زَ} / \text{پ پَ} = \text{ا}^{-\frac{1}{2}} / \text{ب}^{-\frac{1}{2}}$$

اور ز ت = $\text{لا ا}^{-\frac{1}{2}}$ اور پ ت = $\text{لا ب}^{-\frac{1}{2}}$ رکھنے سے

$$\text{س ت}^2 = \text{ا}^2 + \text{لا}^2 / \text{ا} = \text{ب}^2 + \text{لا}^2 / \text{ب}$$

کیونکہ زاویہ س ز ت = 90° اور زاویہ س پ ت = 90°، اسلیے $\text{لا}^2 = \text{ا ب (ا + ب)}$ اور

$$\text{پ ت} = \sqrt{\text{ا (ا + ب)}}\text{،}\quad \text{ز ت} = \sqrt{\text{ب (ا + ب)}}$$

$$\text{س ت} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ا ب} + \text{ب}^2}$$

اگر ط = زاویہ ز س ت اور سا = زاویہ پ س ت تو

$$\text{ا قط ط} = \text{ب قط سا} = \sqrt{\text{ا}^2 + \text{ا ب} + \text{ب}^2}$$

فرض کرو کہ مداروں کے مُستویوں کے درمیان زاویہ عہ ہے۔ ایک کرہ کا تصور کرو جس کا مرکز س ہے اور جو س زا، س پ، س ت سے علی الترتیب نقطوں زا، پا، تا پر منقطع ہوتا ہے تو زا پا = فہ، زا تا = طہ، پا تا = سا اور زاویہ پا تا زا = مہ اور حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم فہ} = \text{جم طہ جم سا} + \text{جب طہ جب سا جم مہ}$$

اگر طہ اور سا کی بجائے ان کی قیمتیں درج کی جائیں تو

$$\text{جم فہ} = \frac{\text{اب} + \sqrt{\text{اب}}\,(\text{ا} + \text{ب})\,\text{جم مہ}}{\text{ا}^{2} + \text{اب} + \text{ب}^{2}}$$

مثال ۱ ـــ ثابت کرو کہ اگر زمین ساکن ہوتی تو کوئی علوی سیّارہ کبھی بھی مقیم نظر نہیں آتا۔

مثال ۲ ـــ مداروں کو دائری اور ہم مُستوی تسلیم کر کے ایک سیارہ کا فاصلہ معلوم کرو اگر رجعی حرکت کا عرصہ سیارہ کی مدت دوران کا ک واں حصہ ہو۔

مثال ۳ ـــ فرض کرو کہ ایک سیارہ کا ابتعاد سورج سے اُس آن جبکہ سیّارہ مقیم ہو ت ہے اور زمین اور سیارہ کے مدار دائری اور ہم مُستوی ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ب}/\text{ا} = \tfrac{1}{2}\,\text{مس}^{2}\,\text{ت} + \tfrac{1}{2}\,\text{مس ت}\,\sqrt{4 + \text{مس}^{2}\,\text{ت}}$$

[Maddy's Astronomy, p. 273]

مثال ۴ ـــ اگر طہ وہ زاویہ ہو جو زمین پر سورج اور ایک سیّارہ کے (۲۱۷)
مدار کے مقیم نقطہ کے محاذی بنتا ہے اور اگر سیّارہ کا بڑے سے بڑا ابتعاد فہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{۲ مم طہ} = \text{قط}\,\tfrac{1}{2}\,\text{فہ} + \text{قم}\,\tfrac{1}{2}\,\text{فہ}$$

[Godfray's Astronomy, p. 320]

مثال ۵ ـــ اگر زمین اور ایک سیّارہ کی اوسط حرکتیں طول بلد میں م، مَ ہوں اور اگر ان کے مدار دائری اور ہم مُستوی ہوں اور ان کے طول بلد و نکا

فرق فہ ہو تو ثابت کرو کہ سیّارہ کا ارضی مرکزی طول بلد شرح

$$\frac{(\text{م م}')^{\frac{2}{3}}(\text{م}^{\frac{1}{3}}+\text{م}'^{\frac{1}{3}})(\text{م م}')^{\frac{1}{3}}-\{\text{م}^{\frac{2}{3}}-(\text{م م}')^{\frac{1}{3}}+\text{م}'^{\frac{2}{3}}\}\ \text{جم فہ}}{\text{م}^{\frac{4}{3}}-2(\text{م م}')^{\frac{2}{3}}\ \text{جم فہ}+\text{م}'^{\frac{4}{3}}}$$

سے بڑھ رہا ہے۔　　[Math. Trip.]

مساوات (۳) صفحہ ۲۴۹ میں فہ = ل - ل'، م = $\text{ا}^{-\frac{3}{2}}$، م' = $\text{ب}^{-\frac{3}{2}}$ رکھنے سے نتیجہ فوراً حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۶ ۔ ثابت کرو کہ ایک سفلی سیارہ، سورج کے گرد علوی سیّارہ کی ایک گردش کی اثناء میں جتنی دفعہ راست حرکت سے رجعی حرکت میں تبدیل ہوتا نظر آتا ہے وہ $\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)^{\frac{3}{2}}$ کا یا $\left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)^{\frac{3}{2}}-1$ کا صحیح عددی حصہ ہے جہاں ا اور ب مداروں کے نصف قطر ہیں (ب > ا)۔　　[Math. Trip.]

فرض کرو کہ فہ کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمت جو راست حرکت سے رجعی حرکت میں تبدیلی کے متناظر ہے فہَ ہے تو متشابہ تبدیلیاں واقع ہونگی جبکہ فہ، ۲ ن π + فہَ ہو خواہ ن کوئی صحیح عدد ہو (اور رجعی حرکت سے راست حرکت میں تبدیلیاں ۲ ن π - فہَ کے متناظر ہونگی)۔ سفلی سیارہ کی زاویٔ رفتار کا اضافہ علوی سیارہ کی زاوئی رفتار پر $\text{ا}^{-\frac{3}{2}}-\text{ب}^{-\frac{3}{2}}$ ہے اور علوی سیارہ کی مدت دوران ۲π $\text{ب}^{\frac{3}{2}}$ ہے۔ اس لیے علوی سیارہ کی ایک گردش کے وقفہ میں فہ کا اضافہ ۲π ($\text{ب}^{\frac{3}{2}}$ \ $\text{ا}^{\frac{3}{2}}$ - ۱) ہے۔ ن کی صحیح عددی قیمتوں کی تعداد جو ن + فہَ\ ۲π کو ل + ک سے کم بناتی ہیں ل - ا یا ل ہونی چاہیئے جہاں $\text{ب}^{\frac{3}{2}}$ \ $\text{ا}^{\frac{3}{2}}$ - ۱ کا صحیح حصہ ل اور کسری حصہ ک ہے۔ ن = ۰ کی صورت جمع کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۷ ۔ اگر دو سیاروں کی رفتاریں جن کے مدار دائری اور ہم مستوی

ہیں ۶ اور و ہوں تو راست حرکت کی مدت کو رجعی حرکت کی مدت کے ساتھ
نسبت (۱۸۰° - طہ) : طہ ہوگی جہاں

جم طہ = ۶ و \ (۶² - ۶ و + و²)

[Coll. Exam.]

مثال ۸ — اگر یہ فرض کرلیا جائے کہ زمین اور ایک سیّارہ سورج کے گرد دائرے مرتسم کرتے ہیں اور سورج اور سیارہ کے طول بلدوں کا فرق طہ ہے تو ثابت کرو کہ طہ کی تبدیلی کی شرح

$$\frac{\pi 2}{س}\left(1 - \frac{ا}{ج}\text{ جم طہ}\right)$$

ہے، جہاں س اقترانی مدت ہے، ا زمین کے مدار کا نصف قطر، اور ج سیارہ کا فاصلہ زمین سے زیر بحث لمحہ پر ہے اور مدار ایک ہی مستوی میں فرض کئے گئے ہیں۔

(۴۱۸) فرض کرو کہ زمین اور سیارہ کے شمس مرکزی طول بلدوں کا فرق فہ ہے

تو فہ = ۲π \ س۔

غہ² = ا² - ۲ ا ب جم فہ + ب² کو تفرق کرنے سے غہ = ۲ ا π جب طہ \ س

اور غہ جب طہ = ب جب فہ کو تفرق کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۹ — ثابت کرو کہ زمین کی طرف ایک سفلی سیّارہ کی سریع ترین آمد کا وقت وہ ہے جبکہ اس کا ابتعاد بڑے سے بڑا ہو اور اس وقت آمد کی رفتار وہ ہے جس کے تحت سیارہ اپنا مدار زمین اور سیارہ کی اقترانی مدت میں مرتسم کرتا۔ اِن کے جواب میں ایک علوی سیارہ کے لیے نتیجے حاصل کرو۔ مدار بہر صورت دائری اور ہم مستوی لینے ہونگے۔

[Math. Trip.]

کیونکہ پچھلی مثال سے غہ = ۲ ا π جب طہ \ س

مثال ۱۰ — اگر دو سیّاروں کو ایک دوسرے سے ملانے والا خط سورج پر ۶۰° کا زاویہ بنائے اور سیارے ایک دوسرے کو مقیم نظر آئیں تو ثابت کرو کہ ا² + ب² = ۷ ا ب جہاں سیاروں کے فاصلے سورج سے ا، ب ہیں

[Math. Trip.]

مثال ۱۱ — یہ تسلیم کر کے کہ عطارد اور زمین کے مدار دائری اور ہم مستوی ہیں اور سورج اور عطارد کے محاذی زمین پر زاویہ مم ۲ بنتا ہے جبکہ عطارد ایک مقیم نقطہ پر ہو ثابت کرو کہ سورج سے سیاروں کے فاصلوں میں جو نسبت ہے وہ تقریبًا ۳۹ : ۱۰۰ کے مساوی ہے۔ [Math. Trip.]

مثال ۱۲ — ثابت کرو کہ اگر ایک سیارہ مطلقًا مقیم ہو جبکہ اُسے زمین سے دیکھا جائے تو اُس کی اور زمین کی حرکت کی سمتیں سیارہ کے مدار کے عقدوں کے خط پر متقاطع ہونی چاہئیں، نیز ثابت کرو کہ طریق الشمس کے مستوی پر سیارہ کا ظل بھی مقیم ہوگا۔ سیارہ کے مدار کا مستوی طریق الشمس پر منطبق نہیں ہے۔

[Math. Trip. 1.]

اضافی رفتار، پ ز کی سمت میں ہوگی اور اس لیے طریق الشمس کے مستوی پر اضافی رفتار کا ظل اُس خط پر ہوگا جو ز کو پ کے ظل سے ملاتا ہے۔

مثال ۱۳ — دو سیاروں کے مدار دائری فرض کئے گئے ہیں لیکن وہ ایک ہی مستوی میں نہیں ہیں۔ ثابت کرو کہ سیارے ایک دوسرے کے لحاظ سے مقیم ہوں گے اگر ان کے مداروں کے ایک عقدہ سے اُن کے جدائی کے زاوئے ایک ہی سمت میں پیمائش کردہ علی الترتیب

$$\text{سں}^{-1}\left\{\text{ب}^{\frac{1}{2}}(\text{ا}+\text{ب})^{\frac{1}{2}} \backslash \text{ا}\right\} \text{ اور } \text{سں}^{-1}\left\{\text{ا}^{\frac{1}{2}}(\text{ا}+\text{ب})^{\frac{1}{2}} \backslash \text{ب}\right\}$$

ہوں جہاں ا اور ب مداروں کے نصف قطر ہیں۔ [Math. Trip.]

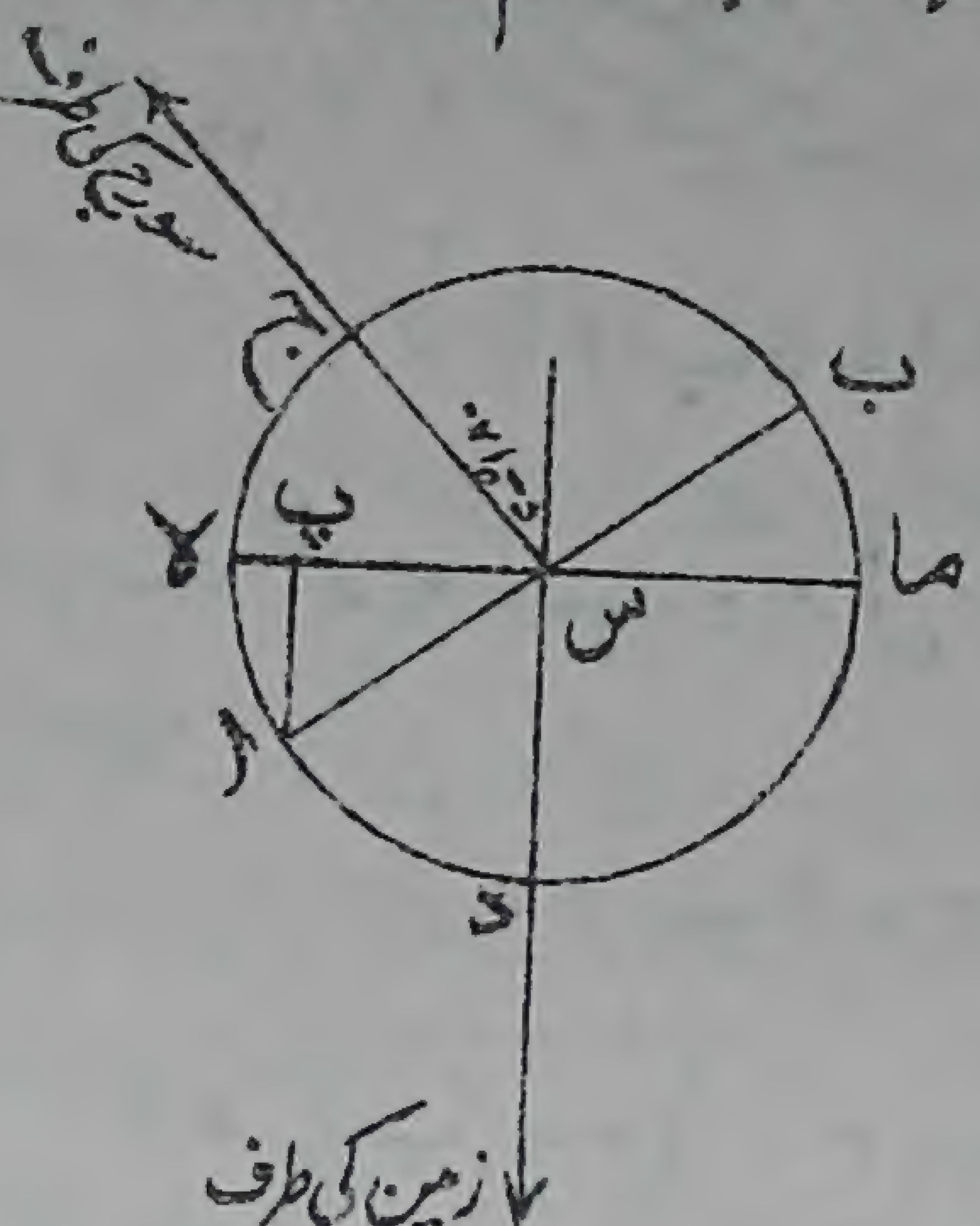
مثال ۱۴ — مشتری کی اقترانی مدت ۳۹۹ دن ہے اور اس کا فاصلہ سورج سے، زمین کے مدار کے نصف قطر کا ۵٫۲ گنا ہے۔ مشتری کا کوکبی دور معلوم کرو اور اس کوکبی دور میں اس کی ارض مرکزی حرکت کو ایک شکل میں دکھاؤ۔

[Coll. Exam.]

۱۳۹ — چاند اور سیاروں کی ہیئتیں اور چمک۔

کسی جرم فلکی کی "ہیئت" سے وہ نسبت مراد ہے جو اِس کے قرص کے (۳۱۹)

اُس حصہ کو جو منور نظر آتا ہے پورے قرص کے ساتھ ہوتی ہے۔ ہیئت کی پیمائش قرنوں کے خط پر عمود وار قطر کی اُس کسر کے ذریعہ کی جاتی ہے جو منور حصہ میں واقع ہے۔ جرم سماوی کا وہ نیم کرہ ا ج ب (شکل ۱۰۴) جو سورج کے مقابل ہے سورج کی روشنی سے منور ہوتا ہے۔ نیم کرہ لا ا ما وہ ہے جو زمین کے سامنے ہے۔



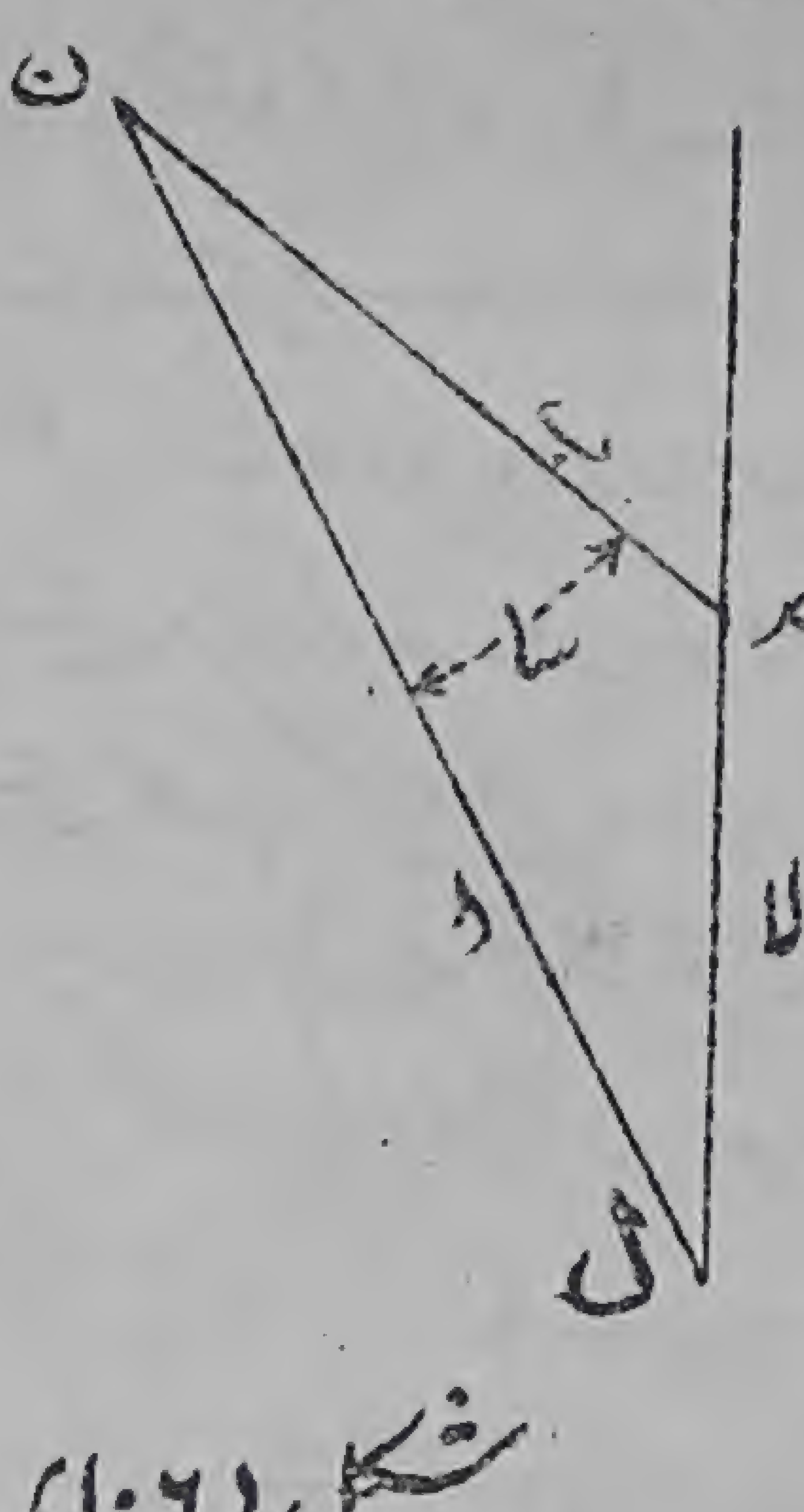
شکل (۱۰۴)

شکل (۱۰۵) جرم فلکی کا وہ منظر پیش کرتی ہے جو زمین سے نظر آتا ہے۔ شکل ع پ ھ لا قرص کے اُس منور حصہ کو تعبیر کرتی ہے جو مشاہد کی جانب ہے۔ اس منحنی کا رقبہ ہے

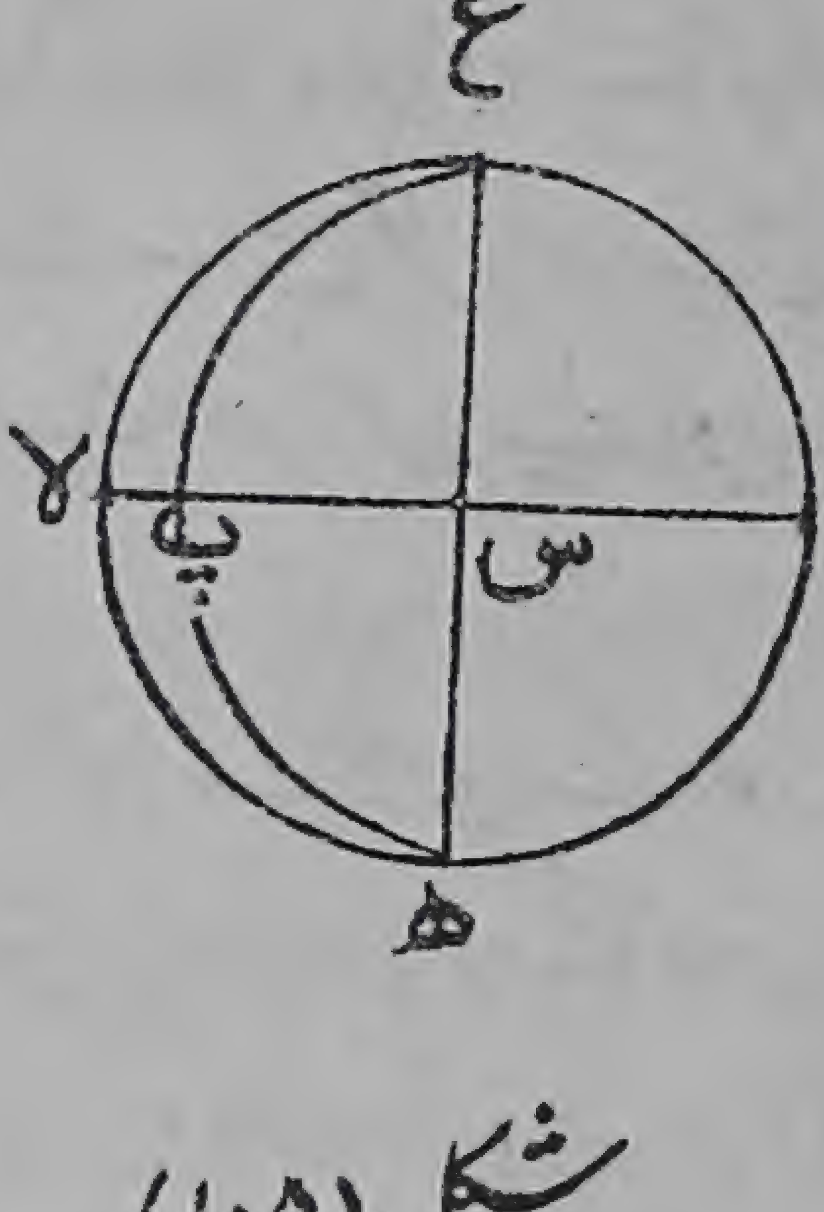
$$\frac{1}{2}\pi\ \text{ع س} \times \text{پ لا}$$

$$= \frac{1}{2}\pi\ \text{ع س}^2\ (1+\text{جم د})$$

جہاں زمین کا ابتعاد سورج سے د ہے جیسا کہ وہ سیارہ سے دکھائی دیتا ہے۔ پس جملہ $\frac{1}{2}$(۱+جم د) جرم سماوی کی "ہیئت" کی پیمائش کرتا ہے۔ یہ بھی ظاہر ہے کہ وصول شدہ



شکل (۱۰۶)



شکل (۱۰۵)

نور کی مقدار لا کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے جہاں زمین ل سے سیارہ م کا فاصلہ لا ہے (شکل ۱۰۶) اور اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ سیارہ کی چمک جو ارضی مشاہد کو نظر آتی ہے (۱ + جم د) \ لا^{2} کے متناسب ہے۔

اگر سورج سے زمین اور سیارہ کے فاصلے ا، ب ہوں تو جملہ (۱ + جم د) \ لا^{2} کو لکھ سکتے ہیں

$$(\text{لا}^{2} + ۲\,\text{ب}\,\text{لا} - \text{ا}^{2} + \text{ب}^{2}) \backslash ۲\,\text{ب}\,\text{لا}^{3}$$

اور اگر اسے اعظم ہوتا ہے تو تفرقی سر کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا}^{2} + ۴\,\text{ب}\,\text{لا} + ۳(\text{ب}^{2} - \text{ا}^{2}) = ۰$$

یا $\text{لا} = \sqrt{\text{ب}^{2} + ۳\text{ا}^{2}} - ۲\,\text{ب}$ ، $\text{جم د} = \{ ۳\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2} - ۴\,\text{ب}\sqrt{\quad} \} \backslash ۳\,\text{ب}$

ایک مخصوص صورت کے طور پر ہم سیارہ زہرہ پر غور کرتے ہیں جہاں

ا = ۱ ، ب = ۰٫۷۲۳۳

جب سیارہ روشن ترین ہوتا ہے تو

لا = ۰٫۴۳۰ ، د = °۱۱۷ ′۵۵ ، سا = °۲۲ ′۲۰

اور سیارہ کا ابتعاد سورج سے °۳۹ ′۴۳ ہے۔ اگر زہرہ کی اعظم چمک اکائی ہو تو بڑے سے بڑے ابتعاد پر چمک ۰٫۲۷ ہے۔ زیادہ سے زیادہ چمک اقتران اسفل کے ۳۶٫۲ دنوں بعد واقع ہوتی ہے۔ اس عمل حساب میں ہم نے زمین اور سیارہ کے مداروں کو دائری تسلیم کیا ہے اور اس لیے اوپر کے نتیجے صرف تقریبی طور پر صحیح ہیں۔

یہ بہت مفید ہوگا اگر ہم چمک کو ایک منحنی کے معین کے طور پر مرتسم کریں جس کا فصلہ وہ زاویہ ہو جو سورج پر زمین اور سیارہ کے محاذی بنتا ہے۔

مثال ۱۔ ایک قمریہ کے ربعات اول و دوم کے درمیان فرق نصف گھنٹہ ہے، زمین سے سورج اور چاند کے فاصلوں کا مقابلہ کرو۔ [Coll. Exam.]

چاند پہلے ربع سے تربیع تک پاؤ گھنٹہ میں حرکت کرتا ہے اور اس اثنا میں وہ تقریباً ۸ʹ کا زاویہ مُرتسم کرتا ہے اور ۸ʹ کا قاطع التمام تقریباً وہ نسبت ہے جو سورج کے فاصلہ کو چاند کے فاصلہ سے ہے۔

مثال ۲ - اگر چاند کی ہیئت جو زمین سے نظر آئے لا ہو اور زمین کی ہیئت جو چاند سے نظر آئے ما ہو تو ثابت کرو کہ تقریباً

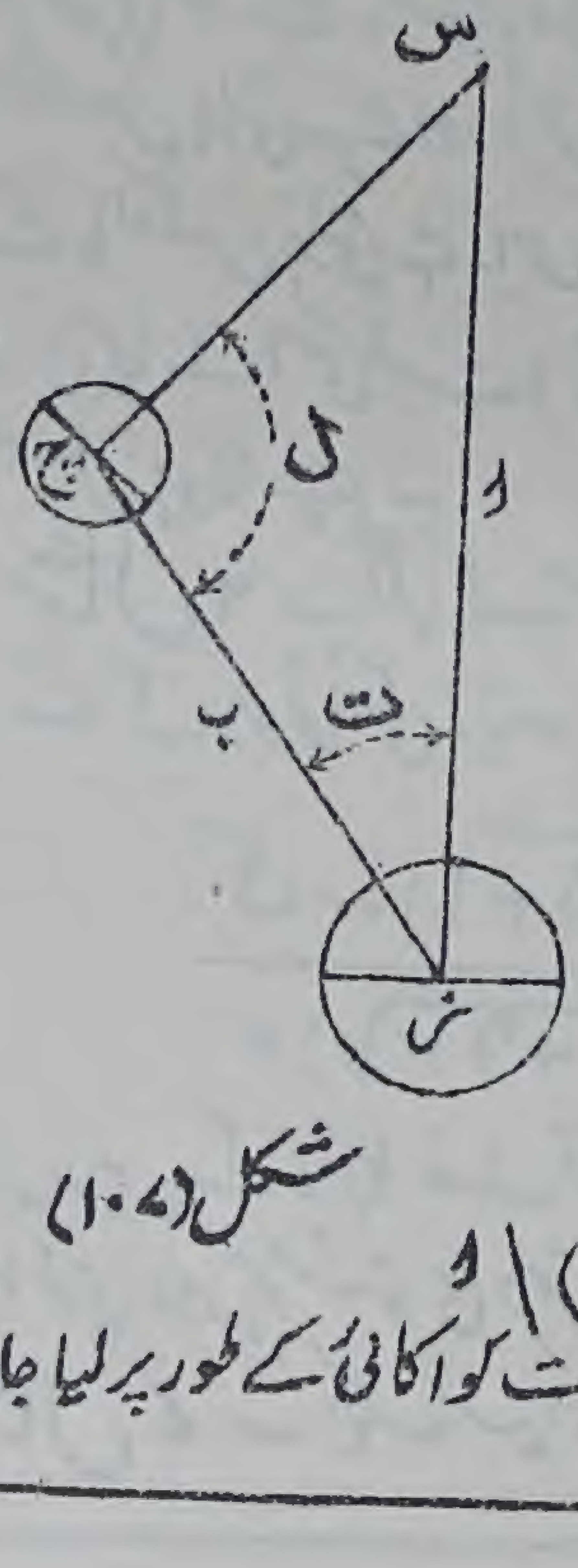
ما = ۲ - لا + ب (۲ لا - لا^۲) \ ا

جہاں پورے چاند کی ہیئت کو ۲ سے تعبیر کیا گیا ہے اور زمین اور چاند کے نصف قطر علی الترتیب ا، ب ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ چاند کا ربع اول زمین کے ربع آخر کے آغاز سے قبل ختم ہوتا ہے اور چاند کا ربع آخر زمین کے ربع اول کے ختم کے بعد شروع ہوتا ہے۔

[Math. Trip.]

فرض کرو کہ سورج، چاند، اور زمین س، چ، ز (شکل ۱۰۷) ہیں تو (۴۲۱)



شکل (۱۰۷)

چاند کا قطر جو چ س پر عمود ہے اور زمین کا وہ قطر جو ز س پر عمود ہے منور نیم کروں کو ظاہر کرتے ہیں۔ اگر زمین اور چاند کے ابعاد ت اور ل ہوں تو چاند کی ہیئت

لا = ۱ + جم ل ہے اور زمین کی

ما = ۱ + جم ت، نیز

ا جب (ل + ت) = ب جب ل

اور چونکہ ب \ ا ایک چھوٹی مقدار ہے اس لیے

جم ت = - جم ل + ب جب^۲ ل \ ا

اس لیے ما = ۲ - لا + ب (۲ لا - لا^۲) \ ا

مثال ۳ - اگر پورے چاند کی ہیئت کو اکائی کے طور پر لیا جائے تو

ثابت کرو کہ محاق اور پہلے ربع کے درمیان وسط میں ہئیت ۱/۲ ویں حصہ سے خفیف طور پر بڑی ہوگی۔

مثال ۴ ۔ ثابت کرو کہ ایک علوی سیارہ کی ہئیت جب اسے زمین سے دیکھا جائے کم سے کم ہوگی جبکہ زمین سیارہ سے نیم منور نظر آئے لیکن ایک علوی سیارہ کی ظاہری چمک تقابل پر زیادہ سے زیادہ اور اقتران پر کم سے کم ہوگی۔

(Coll. Exam.)

مثال ۵ ۔ اگر زہرہ اور زمین کے سمتی نیم قطر ر، س ہوں اور اگر زہرہ کا فاصلہ زمین سے ف ہو تو ثابت کرو کہ زہرہ کی چمک

(ر + ف + س) (ر + ف − س) \ ۴ر ف۳

کے متناسب ہے۔

فرض کرو کہ ط وہ زاویہ ہے جو زمین اور سورج زہرہ پر بناتے ہیں۔ زہرہ کے قرص کا جو حصہ ہمیں منور نظر آتا ہے اُس کی نسبت پورے قرص کے ساتھ (۱ + جم ط) \ ۲ ہے۔ سیارہ کی ذاتی چمک سورج سے اُس کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے اور اُس کی ظاہری چمک زمین سے اُس کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے۔ اِس لیے چمک ایسے بدلتی ہے جیسے (۱ + جم ط) \ ر۲ ف۲ اور جم ط کی بجائے اسکی قیمت (ر۲ + ف۲ − س۲) \ ۲ س ف درج کرنے سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۶ ۔ اگر ایک سفلی سیارہ کی چمک جبکہ اُسے سورج سے دیکھا جائے ک ہو تو اُسکی زیادہ سے زیادہ چمک جبکہ اُسے زمین سے دیکھا جائے

ک ب (√(۳ ا۲ + ب۲) − ب)
―――――――――――
۳ (√(۳ ا۲ + ب۲) − ۲ ب)۲

ہوگی جہاں زمین کے مدار کا نصف قطر ا ہے اور سیارہ کے مدار کا نصف قطر ب ہے اور مدار دائری اور ہم مستوی فرض کئے گئے ہیں۔

مثال ۷ ۔ ایک سیارہ جس کا اوسط فاصلہ سورج سے ا ہے دوسرے

سیّارہ سے جس کا اوسط فاصلہ سورج سے ب ہے ہئیت ع میں نظر آتا ہے اور دوسرا سیّارہ پہلے سیّارہ سے ہئیت و میں نظر آتا ہے۔ اگر مداروں کا میلان (ایک دوسرے کے ساتھ) اور اِن کے خروج المرکز نظر انداز کر دئے جائیں تو ثابت کرو کہ

$$\text{ب}^{2}\,\text{و}\,(۱-\text{و}) = \text{ا}^{2}\,\text{ع}\,(۱-\text{ع})$$

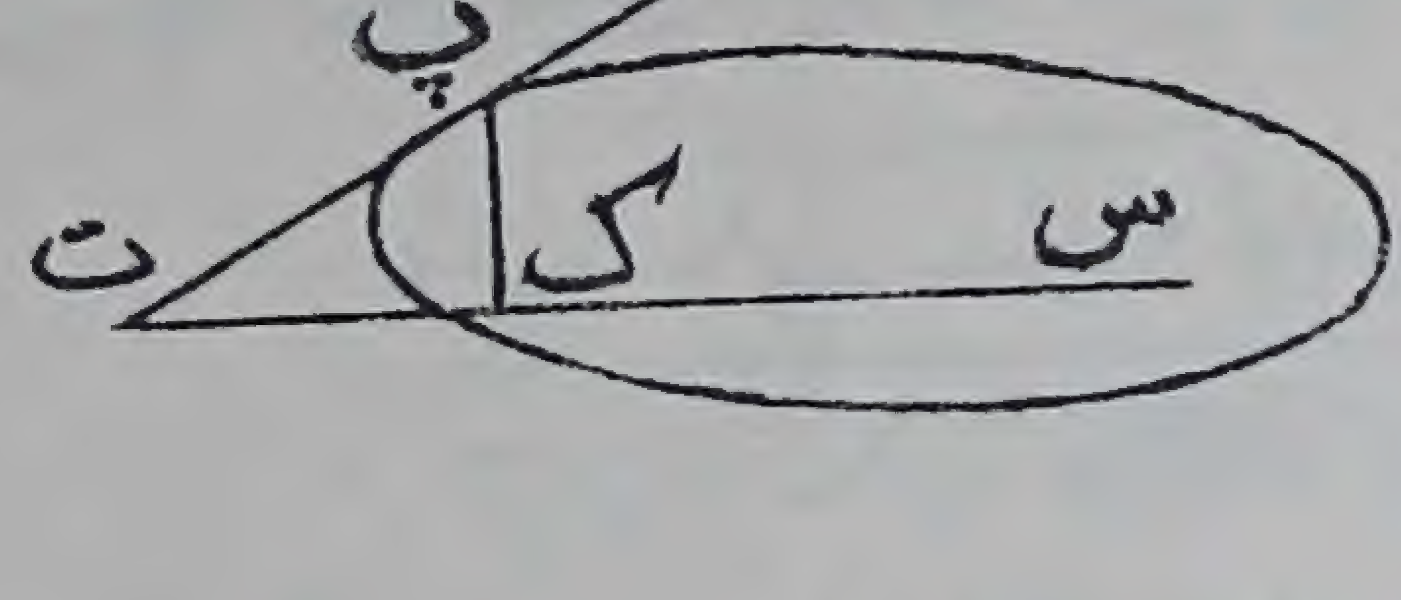
پس اگر زہرہ کا فاصلہ (سورج سے) زمین کے فاصلہ (سورج سے) کا (۴۲۲)
۷۲۳ء گنا ہو تو ثابت کرو کہ زمین کے قرص کے روشن حصہ کا کم از کم $\frac{۵}{۶}$ حصہ زہرہ سے نظر آئے گا۔
[Math. Trip]

بیسویں باب پر مثالیں

مثال ۱ ــ مشتری کے اُستوائی اور قطبی نیم قطر جبکہ وہ سورج سے اوسط فاصلہ پر ہو ۱۷،۱۸ً اور ۱۵،۱۷ً ہیں (Schur.)- اس طرح مشتری کا قرص جس قطع ناقص کو پیش کرتا ہے اُس کا خروج المرکز معلوم کرو۔

مثال ۲ ــ اگر زمین اور ایک سیّارہ کے مداروں کو قطعات ناقص تسلیم کیا جائے اور مدار مختلف مستویوں میں ہوں تو ثابت کرو کہ اگر وہ ایک دوسرے سے مقیم نظر آئیں تو وہ عمود جو اُن سے عقدوں کے خط پر کھینچے جائیں مداروں کے خاص وتروں کی نسبت، جذریہ میں ہوں گے۔ [Math. Trip.]

دفعہ ۱۳۸ سے یہ آسانی سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر دو سیّارے دو مختلف مداروں میں حرکت کررہے ہوں تو اُن کی رفتاریں س ہا √ل \ ع اور س ہا √لَ \ عَ سے تعبیر ہوسکتی ہیں جہاں اُن کے مداروں کے وتر خاص ل اور لَ ہیں سورج سے اُن کی حرکت کی سمتوں پر عمود ع اور عَ ہیں، اور س نظام شمسی کے لیے ایک مستقل ہے۔



شکل (۱۰۸)

مماس عقدوں کے خط پر نقطہ ت پر ملتے ہیں اور رفتاریں ع اور عَ
پ ت اور ق ت کے متناسب ہیں لیکن

$$\frac{\text{ع}}{\text{پ ت}} = \frac{\text{ھ}}{\text{س ت جب س ت پ} \times \text{پ ت}} = \frac{\text{ھ}}{\text{س ت} \times \text{پ گ}}$$

اس لیے $\text{پ ک} : \text{ق ل} = \text{ھ} : \text{ھَ} = \sqrt{\text{ل}} : \sqrt{\text{لَ}}$

مثال ۳ — دو سیاروں کے مدار قطعات ناقص ہیں جن کے وتر خاص ۲ل اور ۲لَ ہیں۔ اگر یہ وتر خاص عقدوں کے خط میں واقع ہوں تو ثابت کرو کہ سورج سے فاصلے جبکہ سیارے مقیم ہوں حسب ذیل رشتہ کو پورا کرتے ہیں

$$\text{ز}\sqrt{\text{ل}} \,/\, (\text{ل} - \text{ر}) = \text{زَ}\sqrt{\text{لَ}} \,/\, (\text{لَ} - \text{رَ})$$

[Coll. Exam. 1900]

جہاں ز اور زَ خروج المرکز ہیں۔

مثال ۴ — اگر دو سیاروں کے مدار مخروطیاں ہوں جن کے وتر خاص مساوی ہیں اور جو ایک ہی مستوی میں ہیں تو ہر سیارہ دوسرے سیارہ پر کے ایک مشاہد کو مقیم نظر آئے گا جبکہ سیاروں کو ملانے والا خط اس خط کے متوازی ہو جو سورج کو سیاروں کی حرکت کی سمتوں کے نقطہ تقاطع سے ملاتا ہے۔

[Math. Trip]

فرض کرو کہ س سورج ہے، سیارے پ اور ن ہیں، ان کی حرکت
کی سمتوں کا نقطہ تقاطع ت ہے، اور س سے ن ت اور پ ت پر عمود (۲۲۳)
ع اور عَ ہیں۔ تب

$$\text{ن ت} : \text{پ ت} = 1/\text{ع} : 1/\text{عَ}$$

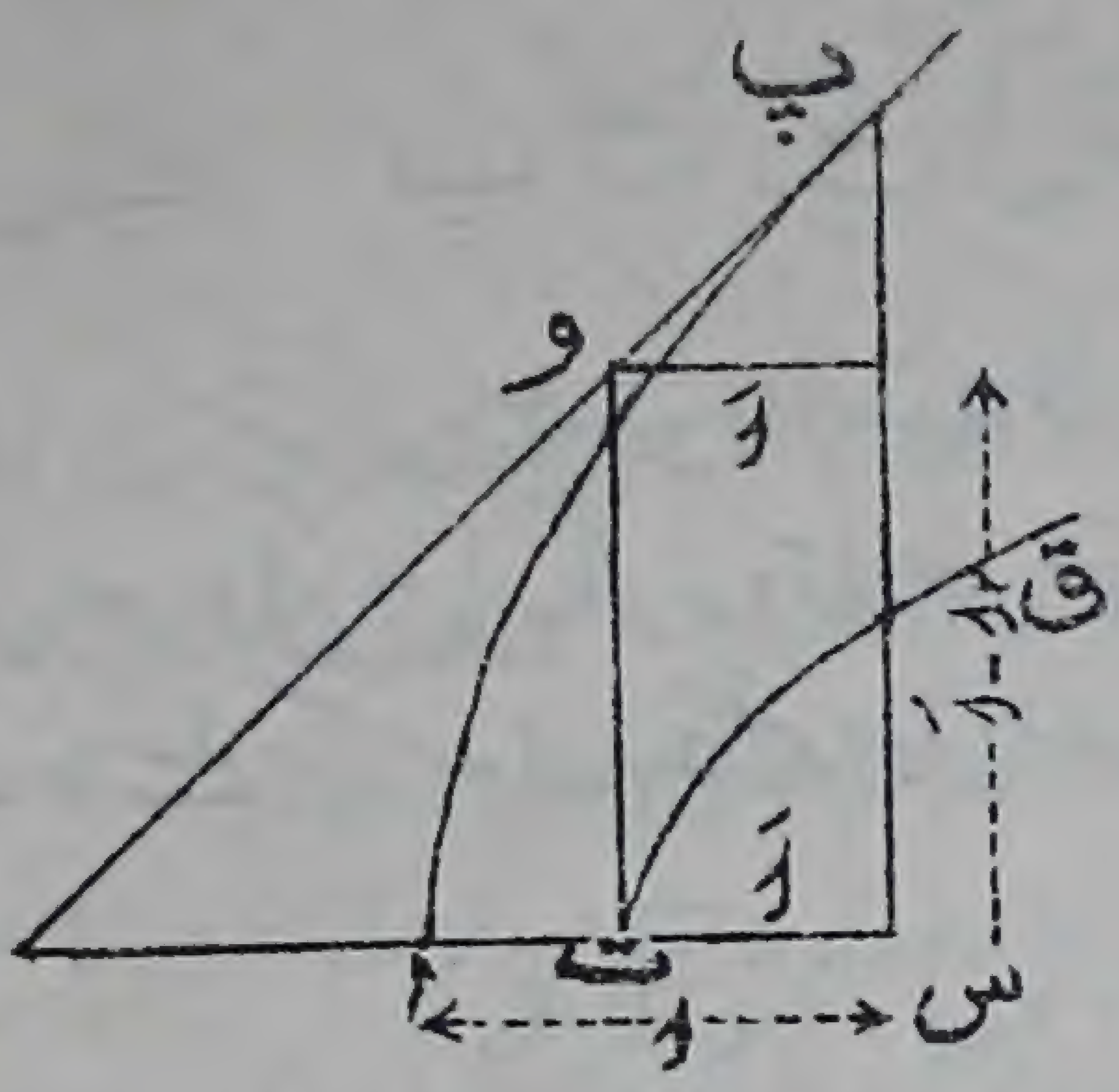
اس لیے $\triangle\, \text{س ت ن} = \triangle\, \text{س ت پ}$

یعنی   س ت اور ن پ متوازی ہیں۔

مثال ۵ — اگر ایک بیرونی سیارہ کا مدار خروج المرکز ز اور نیم محور ا کا ایک قطع ناقص ہو اور اگر وہ حضیض پر تقابل میں ہو تو ثابت کرو کہ اس وقت

اس کی حرکت راست نظر آئے گی اگر ا\ا ب > (ا + ز) \ (ا - ز) -

مثال ۶ – دو دُمدار تارے ہم محور قطعات مکافی میں جو ایک ہی مُستوی میں ہیں قوت کے ایک مرکز کے گرد جو ماسکہ پر ہے حرکت کرتے ہیں۔ وہ شرط معلوم کرو کہ وہ ایک دوسرے کو مقیم نظر آسکیں جبکہ ایک اپنے مدار کے راس پر اور دوسرا اپنے مدار کے وتر خاص کے سرے پر ہو۔ [Coll. Exam.]



شکل (۱۰۹)

فرض کرو کہ سورج س ہے، قطعات مکافی ا پ، ت ق ہیں اور سیارے پ اور ت۔ پ اور ت پر (رفتاریں)² نسبت

پ و² : ت و² = ۲ اَ² : (۲ ا - اَ)² میں ہونی چاہئیں لیکن رفتاروں کے مربع ۲ ا اور اَ کے بالعکس متناسب ہیں، اس لیے

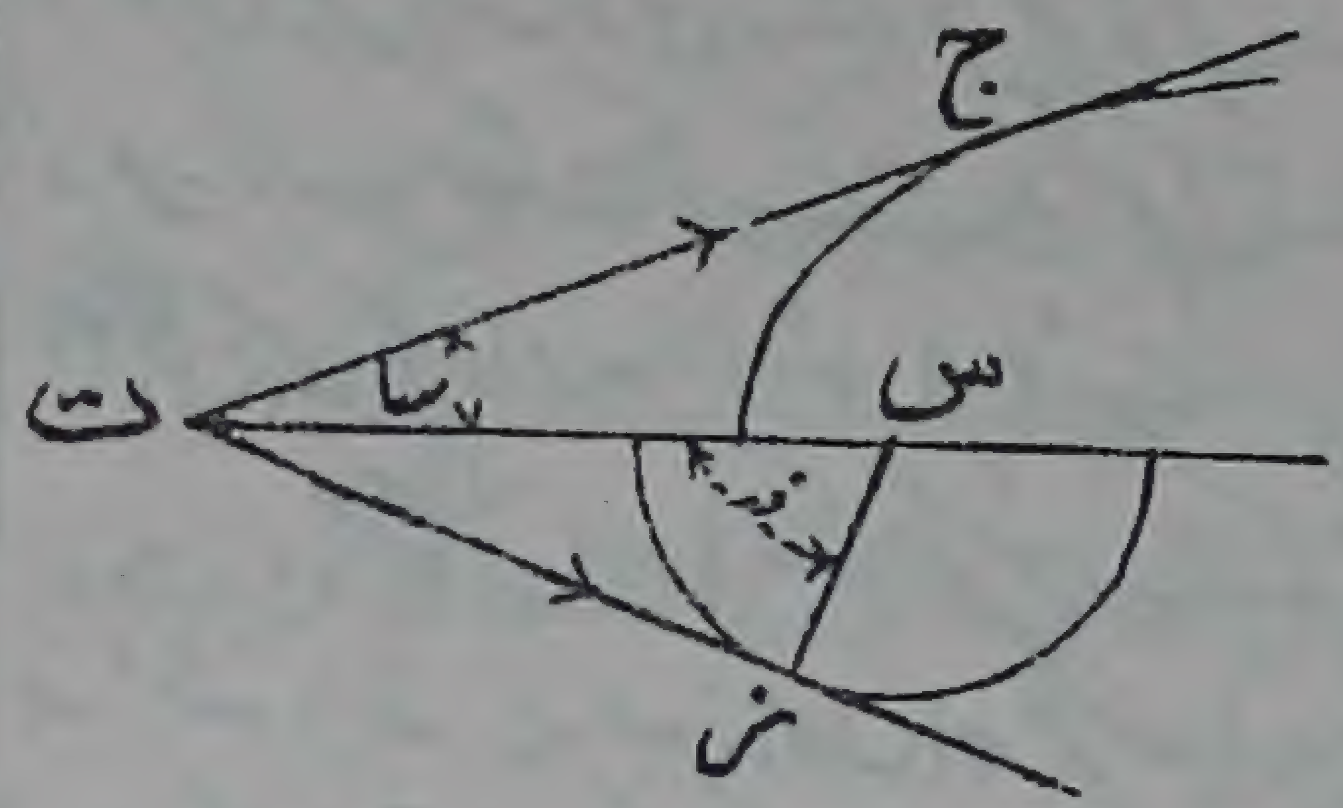
۴ ا اَ = (۲ ا - اَ)²

مثال ۷ – ایک دُمدار تارہ ایک مُستوی میں جو زمین کے مدار کے ساتھ مائل ہے ایک قطع مکافی مرتسم کر رہا ہے۔ زمین کا مدار دائری تسلیم کیا گیا ہے اور عقدوں کا خط قطع مکافی کے محور پر منطبق ہے۔ اگر ت سال میں دُمدار تارہ راس سے وتر خاص کے سرے تک حرکت کرے تو ثابت کرو کہ خواہ مدار دُمدار کا میلان کچھ ہی ہو جب دُمدار تارہ مقیم نظر آتا ہے تو زمین کا زاویُ فاصلہ عقدوں کے خط سے حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے

۲ قط فہ - جب² فہ = (۳ π ت)^(۲/۳)

[Math. Trip. I. 1903]

فرض کرو کہ دُمدار تارہ ج (شکل ۱۱۰) ہے، زمین نر اور سورج س۔ حسب سابق نر اور ج پر کے مماس نقطہ ت پر ملتے ہیں اور رفتاریں ت نر اور ت ج کے متناسب ہیں۔ فرض کرو کہ ج اور نر پر رفتاریں و، وَ ہیں اور س نر = ۱ اور قطع مکافی کا وتر خاص ۴ ا ہے۔ تب



شکل (۱۱۰)

و : وَ = ت ج : ت نر

= ۲ ا قم² سا جم سا : س فہ

نیز و = جب سا √(۲ مہ ÷ ا)،

وَ = √مہ، س ت = قط فہ

= ا قم² سا

اس لیے سا کو ساقط کرنے اور مختصر کرنے سے

۲ ا = ۲ قط فہ − جب² فہ

اور ت = (۲ × رقبہ س ا ل) ÷ ہ = (۸/۳ ا²) ÷ √(۲ مہ ا) = (۴ √۲ ÷ ۳) (ا^(۳/۲) ÷ √مہ) = (۲ √۲ ÷ ۳ π) ا^(۳/۲)

کیونکہ سال وقت کی اکائی ہے۔

(۴۲۴) **مثال ۸** — ایک دُمدار تارہ جو ایک مکافی مدار میں حرکت کر رہا ہے اور ایک سیّارہ جو ایک دائری مدار میں حرکت کر رہا ہے سورج کے ساتھ ایک خط میں ہیں جبکہ دُمدار تارہ حضیض میں ہے۔ وہ نسبت معلوم کرو جو دُمدار تارہ کے حضیضی فاصلہ کو سیارہ کے فاصلہ کے ساتھ ہے تاکہ اُس وقت ہر سیارہ دوسرے سے مقیم نظر آ سکے۔

مثال ۹ — اگر ایک سیّارہ ایک دائری مدار میں مرتسم کر رہا ہو اور اسکا نصف قطر ایک دُمدار تارہ کے مکافی مدار کے وتر خاص کے مساوی ہو اور اگر دُمدار تارہ کی حرکت کا مُستوی سیارہ کی حرکت کے مُستوی پر منطبق ہو تو ثابت کرو کہ سیّارہ اور دُمدار تارہ ایک دوسرے کے لحاظ سے مطلقاً مقیم ہوں گے جبکہ سیّارہ دُمدار

تارے کے اوج سے ٦٠° کے فاصلہ پر ہو بشرطیکہ اوج سے اُس کا زاوی فاصلہ تقریباً ٣٩° تھا جبکہ دُمدار تارہ اوج میں سے گذر رہا تھا۔
[Math. Trip.I]

جب دُمدار تارہ اوج سے ١٢٠° اور سیارہ ٦٠° پر ہو تو اِن کی حرکتوں کی سمتیں مماثل ہوں گی اور ان کی رفتاریں مساوی ہونگی اور دُمدار تارہ اور سیارہ مساوی وقتوں میں مساوی رقبے مرتسم کریں گے۔ وہ رقبہ جو دُمدار تارہ اوج سے ١٢٠° کے زاویہ تک حرکت کرنے میں مرتسم کرتا ہے سیارہ کے مدار کے اُس قطاع کے مساوی ہوگا جس کا زاویہ ٦٠° + ٣٩° ہے۔

مثال ١٠ — اگر سُورج کے محدد عہ، ضہ ہوں اور ایک سیّارہ کے محدد عَہ، ضَہ (عَہ > عہ) ہوں اور اگر سیارہ پر تنویر کے زیادہ سے زیادہ تاریک نقطہ کا زاویہ محل سیّارہ کے مرکز سے پیمائش کردہ ق ہو یعنی وہ زاویہ جو سیّارہ کے قرص کے شمال ترین نقطہ سے مشرق سے ہوتے ہوے سیّارہ کے کنارہ کے اُس نقطہ تک پیمائش کیا گیا ہو جو بظاہر سورج سے بڑے سے بڑے فاصلہ پر ہے، اور اگر کرۂ سماوی پر سیّارہ کے مرکز سے سورج کے مرکز تک فاصلہ غہ ہو تو ثابت کرو کہ غہ اور ق کی تعیین کے لیے حسب ذیل مساواتیں ہیں:

جب غہ جب ق = جم ضہ جب (عہَ - عہ)

جب غہ جم ق = - جب ضہ جم ضَہ + جم ضہ جب ضَہ جم (عَہ - عہ)

جم غہ = جب ضہ جب ضَہ + جم ضہ جم ضَہ جم (عَہ - عہ)

یہ مساواتیں اُس کروی مثلث سے فوراً حاصل ہوتی ہیں جو قطب اور سورج اور سیّارہ کے مرکزوں سے بنتا ہے۔

مثال ١١ — بتاریخ ٣٠ مئی ١٩٠٨ء بوقت ظہر زہرہ کا ظاہری صعود مستقیم اور میل ٧گ ١٩م ٤ش اور ٢٤° ٥٩َ ٢٦ً ش ہیں اور زمین سے اصلی فاصلہ کا لوک ٩٫٦٥٤٣٩ ہے۔ سورج کے لیے متناظر مقداریں ٤گ ٢٧م ٣٩ش، ٢١° ٤٥َ ١٦ً ش، اور ٠٫٠٠٦٠٦ ہیں۔ ثابت کرو کہ ق اور غہ کی قیمتیں علی الترتیب ٤٫٩٤° اور ٥٠° ٣٧َ ٥٥ً ہیں۔

مثال ۱۲ — جب ایک سیارہ کا قرص نصف سے زیادہ منور ہو تو ثابت کرو کہ تاریک کنارہ کے صعود مستقیم اور میل کے مشاہدہ میں علی الترتیب تہ (۱- جم فہ) اور ا (۱- جم سا) کی تصحیحیں کرنی ہوں گی جہاں تہ وہ گوبی وقت ہے جس میں نیم قطر نصف النہار سے گذرتا ہے، سیارہ کا نیم قطر ا ہے اور فہ اور سا مساوالتوں

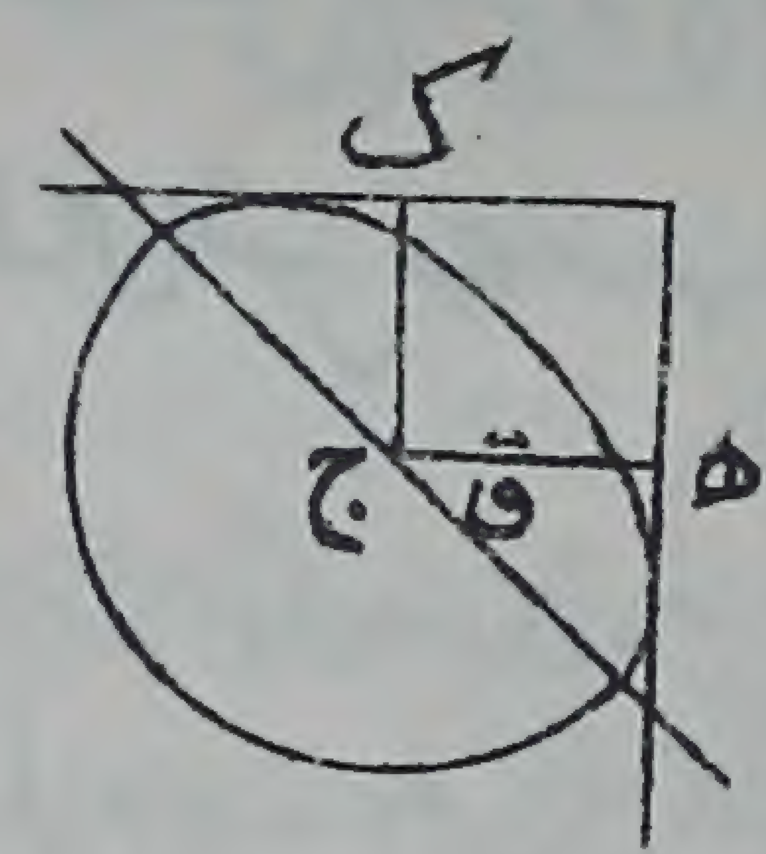
جب فہ = جب د جب ق، جب سا = جب د جم ق

سے متعین ہوتے ہیں۔ د وہ زاویہ ہے جو زمین اور سورج کے درمیان سیارہ سے نظر آتا ہے اور ق وہ زاویہ محل ہے جس کی تعریف مثال ۱۰ میں کی گئی ہے۔
دیکھو بحری جنتری ۱۹۰۸ء، ضمیمہ صفحہ ۳۱)

نیز ثابت کرو کہ جب تصحیحیں چھوٹی ہوں تو وہ علی الترتیب $\frac{1}{2}$ تہ جب^2 د جب^2 ق اور $\frac{1}{2}$ ا جب^2 د جم^2 ق کے بہت قریب ہوتی ہیں۔ (۴۲۵)

صعود مستقیم میں تصحیح تہ (۱- ج ھ \ ا) ہے اور میل میں تصحیح ا- ج ک ہے۔ لیکن قطع ناقص کے خواص سے عمود ج ھ اور ج ک (شکل ۱۱۱) علی الترتیب حسب ذیل ہیں:-

$\sqrt{}$ا^2 جم^2 ق + ب^2 جب^2 ق اور $\sqrt{}$ا^2 جب^2 ق + ب^2 جم^2 ق



شکل (۱۱۱)

چونکہ ب = ا جم د اس لیے یہ عمود ہو جاتے ہیں

ج ھ = ا $\sqrt{}$ ۱ - جب^{2} د جب^{2} ق اور ج ک = ا $\sqrt{}$ ۱ - جب^{2} د جم^{2} ق

اس لیے تہ (۱ - ج ھ / ا) = تہ (۱ - جم فہ) اور ا - ج ک = ا (۱ - جم سا)
اور جب تصحیحیں چھوٹی ہوں تو

تہ (۱ - ج ھ / ا) = $\frac{1}{2}$ تہ جب^{2} د جب^{2} ق

اور

ا - ج ک = $\frac{1}{2}$ ا جب^{2} د جم^{2} ق

مثال ۱۳ — ثابت کرو کہ جب سیارہ نصف سے کم منور ہو تو قرن کے میل کے مشاہدہ میں تصحیح

نیم قطر (۱ ± جب ق)

کرنی ہوگی جہاں وہ علامت لینی چاہیئے کہ خطوط وحدانی کے اندر کی مقدار اکائی سے کم ہو۔

مثال ۱۴ — یہ ثابت کرو کہ وہ تصحیح جو چاند کے تاریک کنارے کے میل کے مشاہدہ میں ضروری ہے تاکہ مشاہدہ اس مشاہدہ میں تحویل ہو جائے جو پورے چاند کو دیکھنے سے حاصل ہوتا حسب ذیل ہے:

چاند کا نیم قطر × سہم الجیب طہ

جہاں جب طہ = - جب ضس جم ضچ + جم ضس جب ضچ جم پ

چاند کا میل ضچ ہے، سورج کا میل ضس ہے اور پ سورج کا ساعتی زاویہ ہے۔

(Coll. Exam.)

مثال ۱۵ — مریخ اور مشتری کی دوری مدتیں علی الترتیب ۶۸۷ اور ۴۳۳۳ یوم ہیں۔ ثابت کرو کہ ہئیت کی وجہ سے مریخ کی تاریکی یعنے قطر کی وہ بڑی سے بڑی کسر جو تاریک حصہ میں ہو سکتی ہے آٹھویں حصہ سے زیادہ نہیں ہو سکتی اور یہ کہ مشتری ہمیشہ تقریباً پورا روشن نظر آتا ہے۔

[Coll. Exam.]

اگر سورج سے زمین اور سیارہ کے اضافی فاصلے ب، ا ہوں اور سورج سے
(۴۲۶ زمین کا ابتعاد طہ ہو جبکہ سیارہ سے دیکھا جائے تو تاریکی $\frac{1}{2}$ ا (۱ - جم طہ) ہے،

طہ کی بڑی سے بڑی قیمت جب ا ب \ ا ہے اور اس لیے تاریکی ۱/۲ - ۱/۲ √(۱ - ب۲ \ ا۲)

سے ہرگز متجاوز نہیں ہو سکتی۔ مریخ کی صورت میں

ب۲ \ ا۲ = (۳۶۵ / ۶۸۷)^(۴/۳) = ۰٫۴۳۰

مشتری کی صورت میں ب۲ \ ا۲ کا اثر نا قابل قدر ہے۔

مثال ۱۶ — بتاریخ ۳۰ مئی ۱۹۰۶ء بوقت گرینوچ اوسط ظہر سورج کا ظاہری مقام

عہ = ۴گ ۲۷م ۲۰٫۳۹ش

ضہ = ۲۱° ۴۵َ ۵٫۶اً (ش)

ہے اور زمین سے سورج کے فاصلہ ا کا لوگ ۰٫۰۰۶۰۶ ہے۔ زہرہ کا ظاہری مقام

عَہ = ۷گ ۱۹م ۲۵٫۴ش

ضَہ = ۲۴° ۶۹َ ۲۶٫۳اً (ش)

ہے اور زمین سے زہرہ کے فاصلہ غہ کا لوگ ۹٫۶۵۴۳۹ ہے۔

ثابت کرو کہ زہرہ کے قرص کا ۰٫۲۷ حصہ منور نظر آتا ہے۔

پہلے زہرہ کا ابتعاد ت ضابطہ

جم ت = جب ضہ جب ضَہ + جم ضہ جم ضَہ جم (عہ - عَہ)

سے محسوب کرو۔ پھر وہ زاویہ د جو زمین اور سورج زہرہ پر بناتے ہیں ضابطوں

ب جب د = ا جب ت اور ب جم د = غہ - ا جم ت سے معلوم کرو جہاں سورج

سے زہرہ کا فاصلہ ب ہے۔

عمل حساب حسب ذیل ہے

جب ضہ	۹٫۵۶۸۹۴	ا	۰٫۰۰۶۰۶	ب جب د	۹٫۸۰۷۸۳
جب ضَہ	۹٫۶۲۵۷۹	جب ت	۹٫۸۰۱۷۷	جب د	۹٫۹۴۸۲۲
ل (۱)	۹٫۱۹۴۷۳	ب جب د	۹٫۸۰۷۸۳	ب	۹٫۸۵۹۶۱

جم ضہ ۹٫۹۹۶۷۹۱ ا ٫۰۰۶۰۶ ب جم د ۹٫۵۲۲۹۳ (ن)
جم ضَہ ۹٫۹۵۷۳۱ جم ت ۹٫۸۸۸۵۸ جم د ۹٫۶۶۲۳۱ (ن)

جم (عہ ـ عہَ) ۹٫۸۶۵۱۶ اجم ت ۹٫۸۹۴۶۴ ب ۹٫۸۵۹۶۲

ل (ا) ۹٫۷۹۰۳۸

(ا) ٫۱۵۶۵۸ (غہ) ٫۴۵۱۲۲
(۲) ٫۶۱۷۱۳ (اجم ت) ٫۷۸۴۵۹

(جم ت) ٫۷۷۴۷۱ (ب جم د) ـ ٫۴۴۴۳۷
ت ۳۹° ۱۸′ ۴۰″

ب جب د ۹٫۸۰۷۸۳
ب جم د ۹٫۵۲۲۹۳ (ن)

مس د ۹۰ ٫۲۸۴ (ن)
د ۱۱۷° ۲۵′ ۳۰″

مطلوبہ کسر
ک = ½ (۱+جم د) = ½ (۱–٫۴۶۰۶) = ٫۲۷۰

دیکھو بحری جنتری سنہ ۱۹۰۸ء صفحہ ۳۰ ضمیمہ۔

مثال ۱۷ ـ ایک تابع ایک دائرہ (نصف قطر ب) میں ایک ابتدائی کے گرد گردش کرتا ہے جو خود ایک ثابت مرکز کے گرد ایک دائرہ میں (نصف قطر ا) گردش کررہا ہے۔ تابع کی زاوی رفتار ابتدائی کی رفتار کا م گنی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر تابع کو ثابت مرکز سے دیکھا جائے تو اس کے راستہ کا ایک خاص حصہ (۲۴۷) محدب ہوگا اور اس میں اس کی حرکت رجعی ہوگی اگر ا > ب اور < م ب۔
[Math. Trip.]

تابع کے راستہ کی مساوات

لا = ا جم طہ + ب جم م طہ

ما = ا جب طہ + ب جب م طہ

سے حاصل ہوتی ہے۔ نقطہ طہ پر اس راستہ کے مماس کی مساوات ہے

لا (ا جم طہ + ب م جم م طہ) + ما (ا جب طہ + ب م جب م طہ)

= ا^2 + ب^2 م + ا ب (م + ۱) جم (م - ۱) طہ

جب مدار مرکز کے لحاظ سے راست مقعر سے رجعی محدب میں داخل ہوتا ہے تو مماس مرکز میں سے گذرنا چاہئے۔ پس اگر ایسی تبدیلیاں ہوتی ہیں تو طہ کی ایک قیمت کا حاصل کرنا ممکن ہونا چاہئے جو بائیں جانب کے جملے کو صفر بنا دے۔ لیکن اس کے لیے ضرورت ہے کہ

ا ب (م + ۱) > ا^2 + ب^2 م

یا ۰ > (ا - ب م) (ا - ب)

فرض کرو کہ ما \ لا = مس فہ تو فر فہ \ فر طہ کی وہی علامت ہوگی جو

ا^2 + م ب^2 + ا ب (م + ۱) جم (م - ۱) طہ

کی ہے اور اس لیے حرکت متواتر تقسیم نقطوں کے درمیان باری باری سے راست اور رجعی ہوگی۔

مثال ۱۸ — یہ تسلیم کر کے کہ زمین کا مدار سورج کے گرد اور چاند کا مدار زمین کے گرد دائری ہیں ثابت کرو کہ چاند کا راستہ سورج کی طرف ہر جگہ مقعر ہے۔

مثال ۱۷ سے ہم دیکھتے ہیں کہ وہ رجعت نہیں کر سکتا کیونکہ ا > ب اور ا > ب م۔ وہ شرط کہ مدار بغیر رجعت کے مقعر سے محدب میں تبدیل ہو یہ ہے کہ نصف قطر انحنا قیمت ∞ میں سے گذرنا چاہئے یعنے فر^2 ما \ فر لا^2 = ۰۔ اس شرط سے رشتہ حاصل ہوتا ہے

ا^2 + م^2 ب^2 + ا ب (م^2 + ۱) جم (م - ۱) طہ = ۰

اِس لئے ا ب (م^۲ + ۱) > ا^۲ + م^۳ ب^۲

یا ۰ > (ا - م^۲ ب) (ا - م ب)

چونکہ ا > م ب اس لیے اس امر کی ضرورت ہے کہ م^۲ > ا\ب۔ لیکن

م^۲ > ۱۶۹ اور ا\ب = ۳۸۷

مثال ۱۹ ـــ ایک صغیر تابع ہر تقابل پر مکسوف ہوتا ہے۔ بڑے سے بڑے میلان کے لیے جو اس کا مدار طریق الشمس کے ساتھ رکھ سکتا ہے ایک جملہ معلوم کرو۔

[Math. Trip.]

یہ جملہ جب^-۱ (ا\ر) - جب^-۱ {(س - ا)\ر'} ہے جہاں زمین اور سورج کے قطر ا اور س ہیں اور تابع اور سورج کے فاصلے زمین سے ر، ر' ہیں۔

مثال ۲۰ ـــ اگر چاند کو کرہ نما سمجھا جائے تو ثابت کرو کہ منور حصہ کا احاطہ جو زمین سے دکھائی دیگا دو نیم ناقصوں سے ترکیب یافتہ ہوگا جہاں زمین اور سورج کے اختلاف منظروں کو جو چاند سے نظر آتے ہیں نظر انداز کیا گیا ہے۔

[Coll. Exam.]

مثال ۲۱ ـــ اکثر ایسا ہوتا ہے کہ محاق سے بدر تک وقت کا وقفہ، بدر سے آئندہ محاق تک وقت کے وقفہ سے ایک یوم یا اِس سے زیادہ متجاوز ہوتا ہے۔ اس کا اصلی سبب معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ سبب درست ہے جبکہ یہ دیا گیا ہو کہ اعظم اور اقل ظاہری قطر تقریبًا ۳۳′ اور ۲۹٫۵′ ہیں۔

[Math. Trip.]

خروج المرکز کی وجہ سے بڑے سے بڑا فرق اُس وقت ہوگا جبکہ سورج چاند (۴۲۸)
کے مدار کے وتر خاص پر ہو۔

مثال ۲۲ ـــ یہ دیا گیا ہے کہ زہرہ کی مدت دوران زمین کی مدت دوران کا تقریبًا دو ثلث ہے، تقریبًا معلوم کرو کہ بحری جنتری سے ماخوذ حسب ذیل امور سے سال کا کونسا وقت ظاہر ہوتا ہے:۔

پہلا مہینہ: زہرہ شام کا تارہ ہے۔ میزان میں داخل ہوتا ہے۔

دوسرا مہینہ: زہرہ سورج سے اس قدر قریب ہے کہ وہ آسانی سے دکھائی

[Math. Trip.]

نہیں دیکھ سکتا۔

مثال ۲۳ ۔ اگر زمین اور زحل نصف قطر ا اور ن^{۲} کے دائری مداروں میں ایک ہی مستوی میں حرکت کریں اور زحل کے حلقے اس مستوی کے ساتھ ایک محدود زاویہ پر مائل ہوں تو ثابت کرو کہ وہ شرط کہ زحل کے حلقے زمین پر کے ایک مشاہد کو غائب ہوتے یا باز نمود ہوتے نظر آئیں یہ ہے کہ

$$\text{جب}\,(\text{ت} + \text{صہ}) = \text{ن}^{۲}\ \text{جب}\ \text{ن}^{-۳}\text{ت}$$

جہاں ت وقت ہے اور صہ ایک مستقل ہے۔

اس لیے مساوات کو ترسیمی طریقہ سے یا کسی اور طرح سے حل کر کے ثابت کرو کہ حیلولت یا باز نمودگی کے موقع ا یا ۳، ۳ یا ۵، ۵ یا ۰، وغیرہ گروہوں میں واقع ہوتے ہیں جبکہ ن بڑھتا ہے۔ نیز ن کی وہ فاصل قیمت معلوم کرو جو پہلی اور دوسری صورتوں کو جدا کرتی ہے۔

[Sheepshanks Exhibition.]

فرض کرو کہ زمین اور زحل علی الترتیب ز اور پ (شکل ۱۱۲) ہیں تو جب حلقے زمین کی طرف کنارہ وار نظر آتے ہیں تو زحل کے حلقہ کے مستوی اور طریق الشمس کے مستوی کا خط تقاطع پ ز ہوگا۔ ا ل ب اور ج م د، پ ز کے متوازی کھینچو۔ تب مطلوبہ شرطیں صرف اسوقت پوری ہو سکتی ہیں جبکہ زحل ا سے ج تک یا د سے ب تک حرکت کر رہا ہو۔ اگر س پ = ن^{۲}



شکل (۱۱۲)

اور ز س = ۱ اور اگر ہم طول بلدوں کو ز پ سے اور وقت کو اُس لمحہ سے پیمائش کریں جبکہ زحل کا طول بلد صفر ہے تو مثلث ز س پ سے حاصل ہوتا ہے

ن ا جب ن ۳ ت = جب (ت + ص)

وقت ت، جو زحل ا سے ج تک گذرنے میں لیتا ہے، سال ت. کے مقابلہ میں حسب ذیل مساوات سے حاصل ہوتا ہے

ت \ ت. = ن ۳ / ۲ جب ا ن ۲ = ن / ۲ + ۱ / ۲ ۲ ۲ ن ۳ = ۰،۹۸۶

کیونکہ زحل کی صورت میں ن = ۳،۰۹ ۔

فرض کرو کہ پ ن، ا ل سے چلتا ہے تو وہ ج م تک سال کے ۰،۹۸۶ میں پہنچتا ہے اور اس اثناء میں ن اس متحرک توازی سے یقیناً ایک مرتبہ اور امکاناً تین مرتبہ ملیگا۔ اگر ت \ ت. > ۱،۵ تو ن اس توازی کو یقیناً تین مرتبہ اور امکاناً پانچ مرتبہ ملیگا۔ ن کی قیمت مساوات

۱ / ۲ ۲ ۲ ن ۳ + ن / ۲ = ۱،۵

سے حاصل ہوتی ہے جس میں بلا شبہ دوسری رقم میں ن کی بجائے ۵،۲ درج کیا جاسکتا ہے

مثال ۲۴ ۔ یہ فرض کیا گیا ہے کہ عطارد اپنے محور کے گرد اتنی ہی مدت میں گھومتا ہے جتنی مدت میں وہ سورج کے گرد ایک ناقصی مدار میں گردش کرتا ہے (ز = ۰،۲۰۵)۔ اگر یہ مفروضہ درست ہو تو عطارد کی سطح پر رات اور دن کے مظاہر بیان کرو۔ (۴۲۹)

مثال ۲۵ ۔ فرض کرو کہ مشتری کے خط اُستوا کے مُستوی کے اوپر زمین کا ارتفاع ب ہے اور مستوی کے صدر نیم محور ا، ب ہیں۔ ثابت کرو کہ سیارہ کے قرص کے ظاہری مرکز کا جو ویغرافی[۹۱] عرض بلد بَ مساوات

مس بَ = ا ۲ مس ب \ ب ۲

سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر ہم مشتری کی سطح پر کے نقطوں کو حسب معمول خارج المرکز زاویہ کے ذریعہ تعبیر کریں تو لا = ا جم فہ، ما = ب جب فہ، تب مشتری کے مرکز اور مشاہد کو ملانے والا خط سیارہ کی سطح کو ایک نقطہ پر عبور کرے گا جس پر خارج المرکز زاویہ فہ کا نشان ہو گا جبکہ

[۹۱] Jovigraphical، ایک مشتری سے متعلق۔

مس ب = ب مس فہ \ ا ۔ نقطہ فہ پر مشتری کا عماد مشتری کے خط استواء کے مستوی کو زاویہ بَ پر قطع کرتا ہے اور

مس بَ = ا مس فہ \ ب

مثال ۲۶ ۔ زہرہ کا اوسط فاصلہ سورج سے زمین کے فاصلہ کا ۲، ۷ ہے۔ زہرہ کا مدار دائری اور طریق الشمس کے مستوی میں فرض کیا گیا ہے۔ وہ بڑے سے بڑا ارتفاع معلوم کرو جس پر زہرہ غروب آفتاب کے بعد ایک دیے ہوئے عرض بلد سے نظر آ سکے۔ نیز سال کا وہ وقت معلوم کرو جس میں یہ واقع ہو سکتا ہے۔
[Math. Trip. I.]

اگر طریق الشمس کا میلان سہ اور عرض بلد فہ ہو تو طریق الشمس کے قطب کا بڑے سے بڑا فاصلہ راس سے ۹۰° ۔ فہ + سہ ہے۔ اس لیے مطلوبہ بڑے سے بڑے ارتفاع کی جیب ۲، ۷ جم (فہ ۔ سہ) ہے اور وقت اعتدال ربیع ہے۔

مثال ۲۷ ۔ اگر ایک سفلی سیارہ سورج سے اپنے بڑے سے بڑے ابتعاد کے لمحہ پر روشن ترین ہو تو ثابت کرو کہ ب = ا \ ۵ جہاں سورج سے زمین اور سیارہ کے فاصلے علی الترتیب ا، ب ہیں۔ ثابت کرو کہ عطارد بڑے سے بڑے مشرقی ابتعاد سے قبل اور بڑے سے بڑے مغربی ابتعاد کے بعد روشن ترین ہوتا ہے لیکن زہرہ بڑے سے بڑے مشرقی ابتعاد کے بعد اور بڑے سے بڑے مغربی ابتعاد سے قبل روشن ترین ہوتا ہے۔
[عطارد اور زہرہ کے لیے ب کی قیمتیں علی الترتیب ۱، ۷ ۳۸، ۱۰ اور ۳، ۷۲۳، ۱۰ ہیں۔]

مثال ۲۸ ۔ یہ تسلیم کر کے کہ زمین اور زہرہ دونوں طریق الشمس کے مستوی میں علی الترتیب ۱۰ اور ۷ نصف قطروں کے دائروں میں حرکت کرتے ہیں ثابت کرو کہ اقتران اعلیٰ پر زہرہ کے دو متصل مروروں (نصف النہار پر سے) کے درمیان وقفہ ایک اوسط دن سے بقدر ۶، ۱ م کے متجاوز کر سکتا ہے، یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ طریق الشمس کے میلان کا قاطع ۱۲ \ ۱۱ ہے۔
[Coll. Exam 1904]

فرض کرو کہ زہرہ اور زمین کے طول بلد علی الترتیب ب ۲/۳ ت اور ا ۲/۳ ت + صہ

ہیں ۔اگر زہرہ کا ظاہری صعود مستقیم جب کہ زمین سے دیکھا جائے عَہ ہو تو

قط سہ مس عَہ = (ب جب ب^{-۳/۲} ت ـ ا جب (ا^{-۳/۲} ت + صہ)) / (ب جم ب^{-۳/۲} ت ـ ا جم (ا^{-۳/۲} ت + صہ))

(۴۳۰) ت کے لحاظ سے تفرق کرنے اور پھر ا^{-۳/۲} ت + صہ = ۱۸۰° + ب^{-۳/۲} ت رکھنے سے

قط سہ (فرعَہ / فرت) = جم² عَہ (√ا + √ب) / (√اب (ا + ب) جم² ب^{-۳/۲} ت)

= (√ا + √ب) / (√اب (ا + ب) (جم² ب^{-۳/۲} ت + جم² سہ جب² ب^{-۳/۲} ت))

اس طرح فرعَہ / فرت کی بڑی سے بڑی قیمت ہے

قط سہ (√ا + √ب) / (√اب (ا + ب))

یہ جزو ضربی ۲ π ا^{۳/۲} ÷ پ سے متجانس بن جاتا ہے جہاں پ سال ہے۔ اسلیے

فرعَہ / فرت = (۲ π قط سہ / پ) · (ا (√ا + √ب)) / (√ب (ا + ب))

اس لیے ایک دن میں صعود مستقیم میں تبدیلی بقدر

(۱ / ۳۶۵) × ۰۴ ۴ ۱ قط سہ (ا (√ا + √ب)) / (√ب (ا + ب)) = ۹۵، ۳م قط سہ (ا (ب + √اب)) / (ب (ا + ب))

= ۳۱، ۴ × ۲۹، ۱ = ۶، ۵م

کے بڑی ہو سکتی ہے۔

اِس لیے زہرہ کا ظاہری صعود مستقیم ایسی صورتوں میں بقدر ۶ د ۵ ث کے بڑھ سکتا ہے اور چونکہ اوسط یوم کو کسی یوم سے تقریباً ۴م بڑا ہوتا ہے اس لیے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو جاتا ہے ۔

مثال ۲۹ ۔ مختلف طور پر یہ بیان کیا جاتا ہے کہ زمین کا مدار سورج کے گرد (۱) ایک دائرہ ہے جس کا مرکز سورج کے قریب ہے اور (۲) ایک قطع ناقص ہے جس کا ایک ماسکہ سورج کے مرکز پر ہے ۔ اگر او جین کو متعین کرنے میں وہی مشاہدے استعمال کئے جائیں تو ثابت کرو کہ سورج کا راست مشاہدہ کر کے اِن دو مداروں کے درمیان تمیز کرنا ناممکن ہوگا سوائے اُس صورت کے جبکہ سورج کا قطر تقریباً ایک ربع ثانیہ کے اندر تک پیمائش کیا جا سکے ۔
[سورج کے قطر کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں تقریباً ۳۲َ ۳۶ً اور ۳۱َ ۳۲ً ہیں ۔]

[Math. Trip. I]

ایک صورت میں مدار کی مساوات ہوگی

$$ر = ا (۱ + ز جم ط - \frac{۱}{۲} ز^۲ جب^۲ ط)$$

اور دوسری صورت میں

$$ر = ا (۱ + ز جم ط - ز^۲ جب^۲ ط)$$

اس لیے سورج کے قطر کے مشاہدہ کے ذریعہ اِن مساواتوں کے درمیان تمیز کرنا ناممکن ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ $\frac{۱}{۲}$ ز^۲ × نیم قطر جیسی مقداریں پیمائش کیجا سکیں ۔

(۴۳۱)

اکیسواں باب

تعیمی آلہ

صفحہ دفعہ

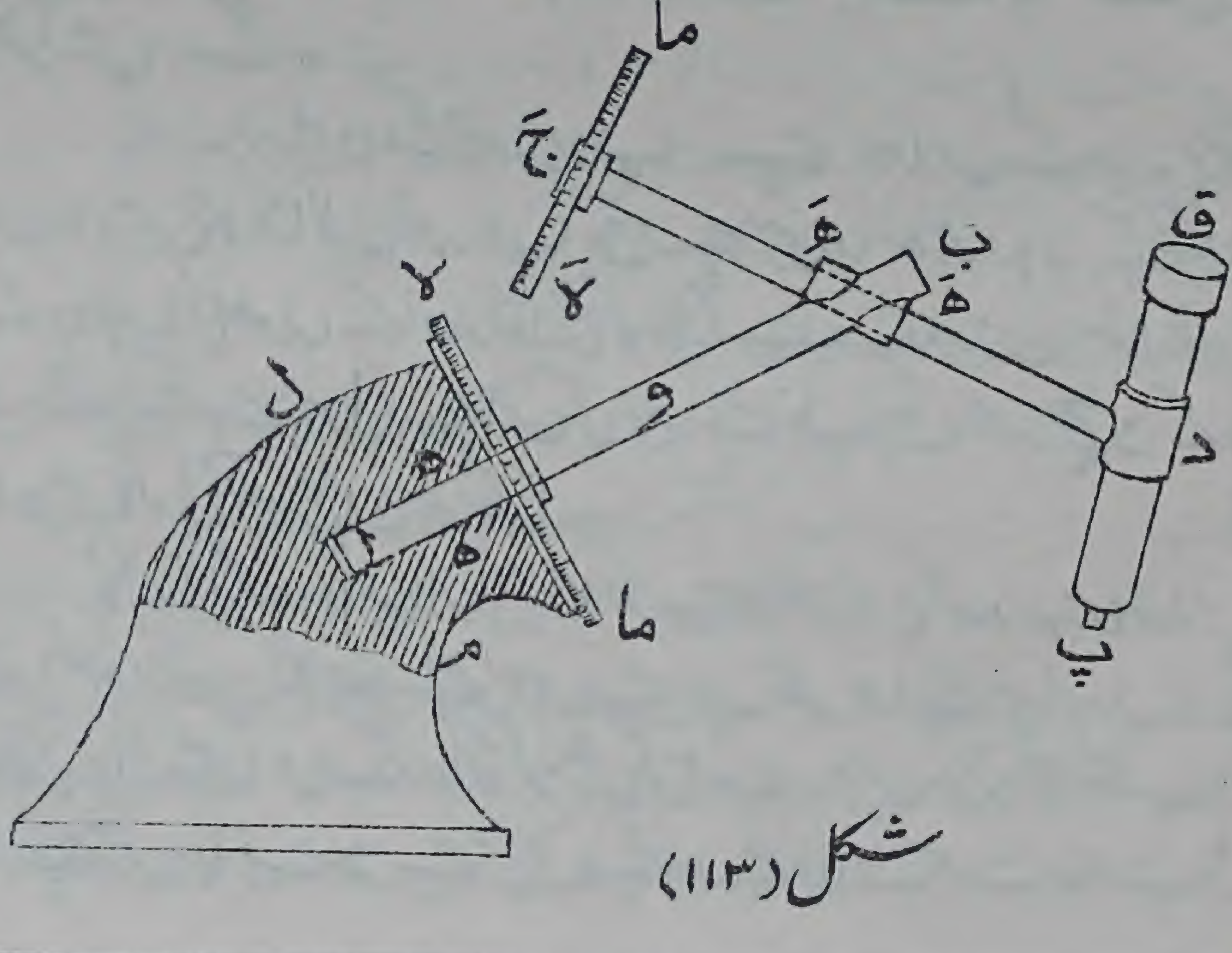
۳۱۳ ۱۵۲ — تعیمی دائرہ مرور

۱۴۰ — تعیمی آلہ کے بنیادی اصول ۔

جملہ "تعیمی آلہ" سے کوئی خاص آلہ مراد نہیں ہے جو فی الواقع رصدگاہ میں استعمال ہوتا ہو بلکہ یہ ایک ہندسی تجرید ہے جس کے نظریہ میں خاص صورتوں کے طور پر اُن بنیادی آلوں کے اصول شامل ہیں جو عملی علم ہیئت میں استعمال ہوتے ہیں۔

جب ہم وہ مساواتیں حاصل کرلیں گے جن سے تعیمی آلہ کے نظریہ کی وضاحت ہوتی ہے تو یہ معلوم ہوگا کہ اِن مساواتوں میں خاص صورتوں کے طور پر وہ (۴۳۲) ضابطے شامل ہیں جو دوسرے آلات کے علاوہ حسب ذیل آلات کے مطالعہ میں ضروری ہیں :- آلہ ارتفاع السمت، آلہ مرور، آلہ اول السمت، المقنطر اور اُستوائی دوربین ۔ اِن میں سے بعض آلات بائیسویں باب میں زیر بحث آئیں گے ۔

حسب ذیل شکل میں تعیمی آلہ کے لازمی اجزا (شکل ۱۱۳) دکھائے گئے ہیں ۔



شکل (۱۱۳)

بنیادی محور ا ب جس کو محور ۱ سے موسوم کیا جاتا ہے سہاروں کے گرد گھوم سکتا ہے، یہ سہارے قاعدہ ل م میں اسطوانی گردانک ھ ھ سے تعبیر کئے جا سکتے ہیں۔ یہ ذہن نشین رہے کہ محور ۱ افقی ہو سکتا ہے یا انتصابی یا کسی اور محل میں لیکن اس کی سمت قاعدہ ل م کے لحاظ سے ثابت ہوتی ہے اور بلاشبہ وہ گردش کے سوا کسی دوسری حرکت کے لیے آزاد نہیں ہے۔

ھَ پر کے سہارے، ا ب کے ساتھ استوار طور پر لگے ہوتے ہیں انہیں جَ د جو محور ۲ کہلاتا ہے لگا ہوتا ہے جو اپنے سہاروں میں آزادانہ گردش کر سکتا ہے۔ یہ تسلیم نہیں کیا گیا ہے کہ وہ اپنے سہاروں میں سے طولی حرکت کر سکتا ہے۔ جب ا ب کو گھمایا جاتا ہے تو جَ دَ اس کے ساتھ گھومتا ہے اور جَ د اور ا ب کا درمیانی زاویہ مستقل رہتا ہے۔

لا ما ایک درجہ دار دائرہ کا قطر ہے جو استوار طور پر ل م کے ساتھ لگا ہوا ہے اور جس کا مستوی ا ب پر عمود ہے۔ اس دائرہ کی درجہ بندی صفر سے لیکر ۳۶۰° تک کیجاتی ہے اور اس کا شطب اس جانب ہوتا ہے جس جانب ب ہے جس کا مطلب بلاشبہ یہ ہے کہ ایک مشاہد کو جو ب کی جانب سے دیکھ رہا ہو دائرہ کے درجے خلاف سمت ساعت بڑھتے نظر آئیں گے۔ (۳۴۳)

ایک دوربین کے چشمہ پر پ ہے اور اس کے دہانہ پر ق۔ اس دوربین کا مناظری محور پ ق ہے یعنی وہ خط جو دہانہ کے مرکز اور ماسکہ پر کے دو چلیپائی قطعوں کے نقطہ تقاطع کو ملاتا ہے۔ یہ دوربین استوار طور پر جَ د کے ساتھ پیوست ہوتی ہے جس کی وجہ سے پ ق اور جَ د کے درمیانی زاویہ میں کوئی تغیر نہیں ہو سکتا۔

لاَ ماَ ایک درجہ دار دائرہ کا قطر ہے جو محور ۲ پر عمود ہے اور اس کے ساتھ استوار طور پر لگا ہوا ہے، اس لیے جب محور ۲ اپنے سہاروں میں گھومتا ہے تو یہ دائرہ بھی اس کے ساتھ گردش کرتا ہے۔ اس دائرہ کا شطب اس جانب ہوتا ہے جس جانب د ہے، اس لیے درجے خلاف سمت ساعت بڑھتے

نظر آتے ہیں جب انہیں د سے دیکھا جاتا ہے اور یہ دوسرا دائرہ بھی پہلے دائرہ کی طرح صفر سے لیکر ۳۶۰° تک درجوں میں تقسیم ہوتا ہے۔

ایک نمائندہ (شکل میں نہیں دکھایا گیا ہے) جو استوار طور پر محور ا کے ساتھ نقطہ و پر لگا ہوتا ہے محور ا کے ہر مختلف محل کے متناظر ثابت دائرہ لاما پر ایک مختلف قراءت کا بتلائے گا۔ ضروری نزاکت حاصل کرنے کے لیے اس نمائندہ کی شکل کسی اصلی آلہ میں ایک کسر پیما ورنیر کی یا ایک خوردبین کی ہونی چاہیئے لیکن ہندسی نظریہ میں ہم اسے صرف ایک خط مستقیم سمجھیں گے۔

دائرہ لاما کی قرارت کے لیے ایک اور نمائندہ بھی محور ۲ پر استوار طور پر لگا ہوا ہوتا ہے۔ جب محور ۲ اپنے سہاروں ھ ھَ میں اطراف گھومتا ہے تو دائرہ لاما کا محل اس نمائندہ سے معلوم ہوگا۔ اس قرارت کو ہم رَ کہیں گے۔

تعمیمی آلہ کا استعمال حسب ذیل ہے۔ محوروں ۱ اور ۲ کے گرد مناسب گردشوں سے دوربین کا مناظری محور خاص حدود کے اندر جن پر ہم آئندہ غور کریں گے کسی ستارہ کی سمت میں لایا جاسکتا ہے۔ جب مناظری محور مطلوبہ خط میں آجائے تو مذکورہ بالا دو نمائندوں سے قرارتیں ر اور رَ حاصل ہونگی۔ اب ان دو قرارتوں سے ستارہ کا مقام متعین کرنا ہے۔ پس ہم یہ معلوم کرینگے کہ کرۂ سماوی پر ستارہ کے محدد ان دو قرارتوں ر اور رَ کی رقوم میں کس طرح بیان کیے جاسکتے ہیں۔

اس کا لحاظ رہے کہ تعمیمی آلہ یا زیادہ صحیح طور پر اس کا ہندسی مماثل جو اسوقت زیر بحث ہے خطوط مستقیم کا ایک اجتماع ہے چنانچہ اب اور ج د کے محور (۱ اور ۲) خط مستقیم ہیں، دوربین کا محور خط مستقیم ہے۔ نیز دائروں پر کے درجے ان کے نصف قطروں سے پوری طرح ظاہر ہوسکتے ہیں۔ مزید بریں ہم دیکھتے ہیں کہ ان میں سے ہر خط سمت کے علاوہ جہت رکھتا ہے
(۴۳۴) مثلاً محور اب کی جہت دائرہ لاما کے مرکز سے اس دائرہ کے شطب کی

طرف ہے اور محور جَ د کی جہت لاَ مَا کے مرکز سے اس کے شطب کی طرف ہے۔ دوربین کا محور چشمہ سے دہانہ کی طرف ہے اور دائروں کے نصف قطر اپنے متعلقہ مرکزوں سے محیط کی طرف۔

نمائندے جیسا کہ ہم پہلے کہہ چکے ہیں اب کے ساتھ استوار طور پر لگے ہوئے ہیں۔ اگر ہم یہ تصور کریں کہ نمائندہ ایک خطِ مستقیم ہے جو استوار طور پر اب کے ساتھ لگا ہوا ہے اور اس پر عمود ہے تو یہ خط درجہ دار دائرہ کے کسی نہ کسی نصف قطر کے متوازی ہوگا۔ جب محور اب ۳۶۰° میں سے گردش کرتا ہے تو یہ متوازی نصف قطر بھی محیط کے گرد پوری طرح گردش کرتا ہے۔ اگر نمائندہ پر اس کی جہت ظاہر کرنے کے لیے ایک تیر کا نشان ہو تو ہم وہ قراءت اختیار کر سکتے ہیں جو دائرہ کے مرکز سے نمائندہ کے متوازی اور نمائندہ کے تیر سے ظاہر ہونے والی سمت میں کھینچے ہوئے نصف قطر سے معلوم ہو۔

اسی طرح دائرہ لاَ مَا کی قراءت کے لیے محور ا کے ساتھ استوار طور پر پیوستہ شدہ اور محور ۲ پر عمود وار ایک نمائندہ ہونا چاہیے۔ جہاں تک ہندسی نظریہ کا تعلق ہے ہم ایک ہی نمائندہ کو دونوں دائروں کے لیے کام میں لا سکتے ہیں۔ ہمیں صرف یہ خیال کرنا ہوگا کہ نمائندہ اب اور جَ د کا مشترک عمود ہے اور استوار طور پر اب کے ساتھ لگا ہوا ہے تب یہ خط دونوں دائروں کے مستویوں کے متوازی ہوگا اور اس کے متوازی ہر دائرہ کے نصف قطر سے اس دائرہ کی متناظر قراءت حاصل ہوگی۔

فرض کرو کہ اس نمائندہ کے متوازی اور اس جہت میں جو نمائندہ کے تیر سے ظاہر ہو دائرہ ۱ (یعنی لا ما) کا نصف قطر ر° کو دکھاتا ہے نیز فرض کرو کہ نمائندہ کے متوازی اور اس جہت میں جو نمائندہ کے تیر سے ظاہر ہو دائرہ ۲ (یعنی لاَ مَا) کا نصف قطر رَ° کو دکھاتا ہے

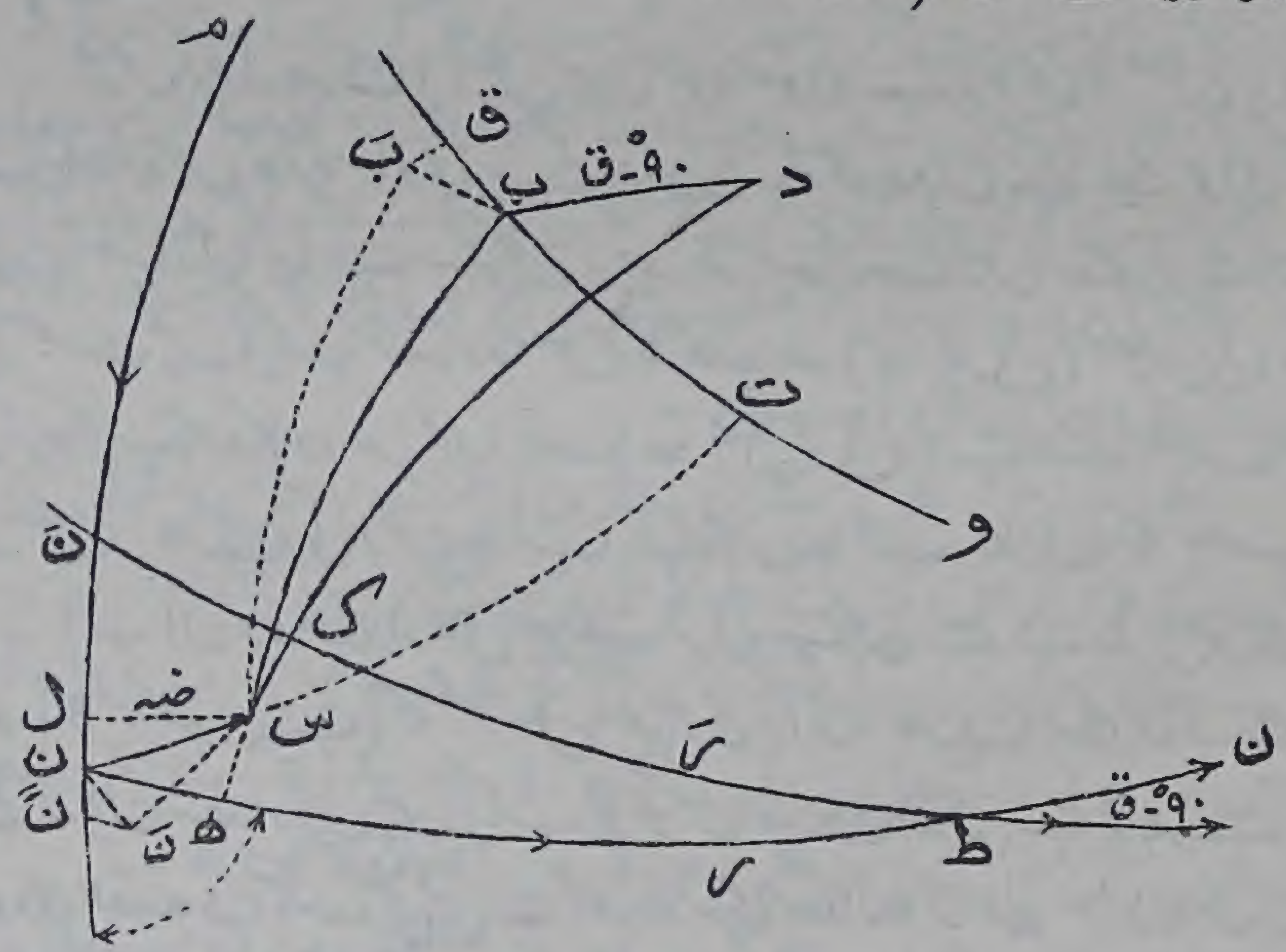
تب خواہ کوئی نمائندے عملاً استعمال کیے جائیں بشرطیکہ وہ محور ا کے ساتھ پیوستہ ہوں ان سے صرف ر + مف ر اور رَ + مف رَ قراءتیں حاصل ہو سکتی ہیں جہاں مف ر اور مف رَ مظہاری خطائیں (Index errors) ہیں جو آلہ کے لیے مستقل ہوتی ہیں۔ آئندہ مناسب موقع پر یہ معلوم ہوگا کہ مقداریں مف ر اور مف رَ کس طرح متعین کی جا سکتی ہیں۔ اول ہم ر اور رَ اور جرم کے محددوں کے درمیان رشتوں کی تحقیق کریں گے۔

۱۴۱ ۔ تعیمی آلہ میں وہ خطوط جو کرہ پر نقطوں کے طور پر تعبیر ہوتے ہیں ۔

اب ہم تعیمی آلہ کا مطالعہ کرہ سماوی پر کے اُن نقطوں کی مدد سے کریں گے جو تعیمی آلہ کے خطوں کے متناظر ہیں ۔

کسی محدود نقطہ و سے تعیمی آلہ کے خطوں کے متوازی خطوط کھینچو جنہیں سے ہر ایک (۴۳۵)
اُس جہت میں ہو جو متناظر خط پر تیر کے ذریعہ دکھائی گئی ہے ۔ کرہ سماوی کا ہر نصف قطر جو اِس طریقہ سے کھینچا گیا ہو کرہ پر ایک نقطہ میں ختم ہوگا اور کسی ایسے دو نقطوں کی درمیانی قوس آلہ کے دو متناظر خطوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوگی ۔

و سے ایک خط جرم سماوی کی سمت میں بھی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ جرم ایک ستارہ ہے جس کا مشاہدہ کیا جا رہا ہے ۔ یہ خط اُس خط پر منطبق ہوگا جو و سے دوربین کے محور کے متوازی کھینچا گیا ہو جبکہ دوربین کو اُس ستارہ کی سمت میں لگایا گیا ہو ۔ فرض کرو کہ یہ نقطہ س (شکل ۱۱۴) ہے، اسی طرح فرض کرو کہ محور ۱ کے متناظر نقطہ ب حاصل ہوتا ہے، محور ۲ کے متناظر نقطہ د اور دائروں کے مشترک نمائندہ کے متناظر نقطہ ط ۔



شکل (۱۱۴)

فرض کرو کہ ب کا قطبی دائرہ ن ط ہے، اس لیے ن ط وہ بڑا دائرہ ہے جو دائرہ ا کے مستوی کو تعبیر کرتا ہے۔ اس لیے ن ط پر کے کسی دو نقطوں کو ملانے والی قوس اُس زاویہ کے مساوی ہوگی جو لا ما کے متناظر نصف قطروں کے درمیان ہے۔ چونکہ دائرہ ن ط کا شطب ب ہے اس لیے درجے ن سے ط کی سمت میں بڑھتے ہیں (جیسا کہ شکل میں تیر کے ذریعہ دکھایا گیا ہے) ہم پہلے تصفیہ کر چکے ہیں کہ نقطہ ط پر کے درجے رہا ہیں۔ چونکہ دائرہ لا ما اُسی محل میں قائم رہتا ہے خواہ آلہ کو ا ب کے گرد یا ج د کے گرد کسی طرح گھمایا جائے اس لیے جہاں تک آلہ کی ایسی حرکتوں کا تعلق ہے ن ط کو کرہ سماوی پر ایک ثابت دائرہ سمجھا جا سکتا ہے۔ (۴۳۶)

۱۴۲ ۔ کسی جرم فلکی کے محددوں کو تعیمی آلہ کی قراءتوں کی رقوم میں بیان کرنا جبکہ اس آلہ کو جرم فلکی کی سمت میں لگایا گیا ہو ۔

فرض کرو کہ م ن (شکل ۱۱۴) خط استواء ہے یا طریق الشمس یا کوئی اور ثابت بڑا دائرہ جس کو کرہ سماوی پر کے نقطوں کے محددوں کے لیے حوالہ کے معیار کے طور پر اختیار کیا گیا ہے۔ فرض کرو کہ م مبداء ہے جس سے تیر کے ذریعہ دکھائی ہوئی سمت میں ایک ستارہ س کا محدد عہ (= م ل) متعین کیا جائے گا۔ فرض کرو کہ ستارہ کا دوسرا محدد ضہ (= س ل) ہے جسے مثبت لینا ہوگا کیونکہ س، م ن کی اس جانب ہے جس جانب م ن کا شطب ہے۔

اب اُن دو مقداروں کی تعریف کرنی ہے جن سے ن ط (جو بلا شبہ دائرہ ا کا مستوی ہے) کا محل معیاری دائرہ م ن کے لحاظ سے بیان ہو سکے۔ اِن مقداروں میں ایک تو قوس م ن (= لہ) ہے جو م سے ن ط کے صعودی عقدہ ن تک کھینچی گئی ہے، اور دوسری مقدار وہ زاویہ ط ن ن َ (= طہ) ہے جو دو بڑے دائروں کے درمیان جو ن سے منتسع ہوتے ہیں بنتا ہے جہاں طہ، ٥

اور ۱۸۰° کے درمیان ایک زاویہ ہے۔ نقطۂ ن کو ن ط پر درجہ بندی کا صفر سمجھا جا سکتا ہے اور پھر ہمیں حاصل ہوتا ہے ن ط = رَ۔

یہ بیان کیا جا چکا ہے کہ ا ب اور جَ دَ (شکل ۱۱۳) کے درمیان ایک مستقل زاویہ ہے۔ اِس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خواہ آلہ کو کسی طرح حرکت دی جائے نقطہ د جو نَ ط کا شطب ہے ب سے جو ن ط کا شطب ہے ہمیشہ اُسی فاصلہ پر ہونا چاہیئے۔ اِس مستقل قوس کو جو دائروں ۱ اور ۲ کے شطبوں کے درمیان ہے ہم ۹۰°- ق سے تعبیر کرینگے چنانچہ ق ہمیشہ +۹۰° اور -۹۰° کے درمیان ہوگا۔ چونکہ دو درجہ دار دائروں کا درمیانی زاویہ اِن کے شطبوں کی درمیانی قوس کے مساوی ہوتا ہے اِسلیے ہم دیکھتے ہیں کہ زاویہ ن ط نَ (شکل ۱۱۴) بھی ۹۰°- ق ہے۔

ہم پہلے یہ تصفیہ کر چکے ہیں کہ نَ ط پر نقطہ ط کی قرارت رَ ہے اور اب نَ کَ ط پر یعنے دائرہ لامَا پر درجہ بندی کے لیے صفر کا مقام انتخاب کرنا باقی ہے۔ اِس صورت میں ط نَ اور معیاری دائرہ م ن کے نقطہ تقاطع نَ سے استفادہ نہیں کیا جا سکتا کیونکہ عقدہ نَ آلہ کو استعمال کرنے میں مسلسل بدلتا رہتا ہے۔

لامَا پر سہولت بخش صفر اس طرح حاصل ہوتا ہے۔ جَ د اور
(۴۳۷ پ ق (شکل ۱۱۳) میں سے گذرنے والا مستوی، دائرہ لامَا کو ہمیشہ ایک ہی قطر میں قطع کرے گا خواہ آلہ کو کسی طرح استعمال کیا جائے۔ فرض کرو کہ اِس قطر کا وہ سرا لامَا پر درجہ بندی کا صفر ہے جو جَ د کی اُسی جانب واقع ہے جس جانب دوربین کا دہانہ ہے۔

شکل ۱۱۴ میں س ستارہ ہے جس کی طرف دوربین لگائی گئی ہے اور اِس لیے قوس س دَ نَ ط کو کَ میں قطع کرنی چاہیئے جو درجہ بندی کا صفر ہے۔ اِس لیے رَ = کَ ط۔ نیز ہم جَ د کے ساتھ پ ق کا جو میلان ہے اُس کو ۹۰°+ ر لیتے ہیں جہاں ر، +۹۰° اور -۹۰° کے درمیان واقع ہے۔ پس شکل ۱۱۴ میں د س = ۹۰°+ ر اور کَ س = ر

اب ہم یہ بتا سینگے کہ ع اور ض، مشاہدہ کردہ مقداروں رَ، رَ

اور چار مستقلوں ل، ط، ر اور ق کی رقوم میں کس طرح بیان کئے جا سکتے ہیں
ضروری مساواتیں چار قائمۃ الزاویہ مثلثوں ن ل س، ن ھ س، ط ک س، ط ھ س سے حاصل ہوتی ہیں۔

مثلثوں ن ھ س، ن ل س سے حاصل ہوتا ہے

جب ن س جب ھ ن س = جب ھ س
جب ن س جم ھ ن س = جب ھ ن جم ھ س ....(۱)
جم ن س = جم ھ ن جم ھ س

جب ن س جب ل ن س = جب ل س
جب ن س جم ل ن س = جب ل ن جم ل س ....(۲)
جم ن س = جم ل ن جم ل س

ل ن س + ھ ن س = ۱۸۰° - ط

جب ل ن س = جب ط جم ھ ن س + جم ط جب ھ ن س
جم ل ن س = - جم ط جم ھ ن س + جب ط جب ھ ن س

اور اِن قیمتوں کو (۲) میں درج کرنے سے اور (۱) کی مدد لینے سے حاصل ہوتا ہے

جب ل س = جم ط جب ھ س + جب ط جم ھ س جب ھ ن
جب ل ن جم ل س = جب ط جب ھ س - جم ط جم ھ س جب ھ ن ....(۳)
جم ل ن جم ل س = جم ھ س جم ھ ن

یہ مساواتیں ذو اربعۃ الاضلاع س ل ن ھ کے ضلعوں ل س، ل ن کو دوسرے دو ضلعوں اور ن پر کے خارجی زاویہ ط کی رقوم میں بیان کرتی ہیں، جہاں ذو اربعۃ الاضلاع س ل ن ھ نقطوں ل اور ھ پر قائم الزاویہ ہے۔

اسی طرح ذو اربعۃ الاضلاع س ک ط ھ سے جو ک اور ھ پر قائم الزاویہ ہے اور جس کا خارجی زاویہ ط پر ۹۰° + ق ہے حاصل ہوتا ہے

جب ھ س = - جب ق جب ک س + جم ق جب ک ط جم ک س
جب ھ ط جم ھ س = جم ق جب ک س + جب ق جب ک ط جم ک س ....(۴)
جم ھ ط جم ھ س = جم ک ط جم ک س

(۴۳،۱)

چونکہ ہ ن = را - ہ ط

اس لیے جم ہ س جم ہ ن = جم را جم ہ س جم ہ ط + جب را جم ہ س جب ہ ط

اور جم ہ س جب ہ ن = جب را جم ہ س جم ہ ط - جم را جم ہ س جب ہ ط

اِن قیمتوں کو (۳) میں درج کرنے اور (۴) کے ذریعہ تحویل کرنے سے

جب ل س = - جم ط جب ق جب ک س + جم ط جم ق جب ک ط جم ک س

+ جب ط جب را جم ک ط جم ک س - جب ط جم را جم ق جب ک س

- جب ط جم را جب ق جب ک ط جم ک س۔

جب ل ن جم ل س = - جب ط جب ق جب ک س

+ جب ط جم ق جم ک س جب ک ط

- جم ط جب را جم ک ط جم ک س

+ جم ط جم را جم ق جب ک س

+ جم ط جم را جب ق جم ک س جب ک ط،

جم ل ن جم ل س = جم را جم ک ط جم ک س

+ جب را جم ق جب ک س

+ جب را جب ق جم ک س جب ک ط

فرض کرو کہ کروی محددوں کا مبداء م (شکل ۱۱۴) ہے اور فرض کرو کہ س کے محدد م ل (= ع) اور ل س (= ضہ) ہیں۔ چونکہ م ن = لہ ہے اسلیے

ل ن = لہ - ع اور ک س = ر، ک ط = رَا

اِن تبدیلیوں سے تعیمی آلہ کے لیے حسب ذیل بنیادی ضابطے ملتے ہیں:-

جب ضہ = - جم ط جب ق جب ر
- جب ط جم ق جب ر جم را
+ جم ط جم ق جم ر جب رَا
+ جب ط جم ر جب را جم رَا
- جب ط جب ق جم ر جم را جب رَا ..... (۱)

جب (لہ - عہ) جم ضہ = - جب طہ جب ق جب ر
+ جم طہ جم ق جب ر جم ں
+ جب طہ جم ق جم ر جب ںَ .... (۲)
- جم طہ جم ر جب ں جم ںَ
+ جم طہ جب ق جم ر جم ں جب ںَ

جم (لہ - عہ) جم ضہ = + جم ق جب ر جب ں
+ جم ر جم ں جم ںَ .... (۳)
+ جب ق جم ر جب ں جب ںَ

(۴۳۹) مطلوبہ مقداریں عہ اور ضہ مشاہدہ کردہ مقداروں ں اور ںَ سے اِن مساواتوں کے ذریعہ محسوب کیجاسکتی ہیں، یہ مان لیا گیا ہے کہ آلہ کے مستقلات طہ، لہ، ق، ر معلوم ہیں۔

مثال ۱ — تعیمی آلہ کی مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) کے تین دائیں جانبی ارکان کے مربعوں کا مجموعہ اکائی کے مساوی ہوتا ہے۔ اس امر کی تصدیق کرو کہ تین بائیں جانبی ارکان کے مربعوں کے مجموعہ کے لیے بھی یہ درست ہے۔

مثال ۲ — اگر محور ۱ محور ۲ پر عمود ہو (یعنی ق = ۰) تو معلوم کرو کہ تعیمی آلہ کی مساواتیں کیا ہو جاتی ہیں جبکہ دوربین میں کوئی خطائے توازی گری نہ ہو (ر = ۰) اور دائرہ ۱ کے شطب کے محدد عہ، ضہ ہی صرف آلہ کے وہ مستقل ہوں جو جملوں میں شریک ہوتے ہیں۔

یہ ظاہر ہے کہ لہ = ۹۰° + عہ اور طہ = ۹۰° - ضہ، اس لیے لہ اور طہ کو ساقط کرنے اور ق = ر = ۰ رکھنے سے مساواتیں (۱)، (۲)، (۳) حسب ذیل ہو جاتی ہیں۔

جب ضہ = جب ضہ جب ںَ + جم ضہ جب ں جم ںَ،
جم (عہ - عہ) جم ضہ = جم ضہ جب ںَ - جب ضہ جب ں جم ںَ،
جب (عہ - عہ) جم ضہ = - جم ں جم ںَ

مثال ۳ — ثابت کرو کہ ق + ر = ۰ وہ ضروری شرط ہے کہ تعیمی آلہ کی دوربین کو ں اور ںَ کی حقیقی قراءت سے دائرہ ۱ کے شطب کی جانب لگایا جاسکتا ہے۔

نیز ثابت کرو کہ ضد شطب کے لئے ضروری شرط ق ۔ ر = ۱۸۰° ہے۔

مثال ۴ ۔ اگر دائرہ ۲ کے شطب کے محدد عہ، ضہ ہوں اور آلہ کو اس طرح رکھا گیا ہو کہ دائرہ ا کی قرات ں ہے تو ثابت کرو کہ

جب ضہ = جم طہ جب ق + جب طہ جم ق جم ں

جب (لہ ۔ عہ) جم ضہ = جب طہ جب ق ۔ جم طہ جم ق جم ں

جم (لہ ۔ عہ) جم ضہ = ۔ جم ق جب ں

اگر بنیادی مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) میں ر = ۔ ۹۰° تو یہ ظاہر ہے کہ دوربین دائرہ ۲ کے شطب کی جانب ناقابل تغیر طور پر قائم ہے۔ اگر ر کو + ۹۰° بنایا جاتا تو دائرہ ۲ کے ضد شطب کے محدد حاصل ہوتے۔

مثال ۵ ۔ اگر دائرہ ا کے شطب سے اُس ستارہ تک جس کی جانب دوربین قائم کی گئی ہے توس غہ ہو جبکہ دائرہ ۲ کی قرات ںَ ہے تو ثابت کرو کہ

جم غہ = ۔ جب ق جب ر + جم ق جم ر جب ںَ

اور واضح کرو کہ اس جملہ سے ں کیوں غائب ہے۔

مثال ۶ ۔ کرۂ سماوی پر وہ میدان معلوم کرو جس کے اندر کسی جرم کو تعیمی آلہ سے دیکھ سکتے ہیں۔

مثال ۵ سے ہم دیکھتے ہیں کہ جم غہ کی انتہائی قیمتیں

ںَ = ۔ ۹۰° اور ںَ = + ۹۰°

کے متناظر ہیں اور اس لیے جم غہ کی انتہائی قیمتیں

جم غہ = جم {(۹۰° + ر) + (۹۰° ۔ ق)}

اور جم غہ = جم {(۹۰° + ر) ۔ (۹۰° ۔ ق)}

ہیں۔ اس لیے اگر دائرہ کے شطب کو مرکز مان کر علی الترتیب نصف قطروں (ق + ر) اور ۱۸۰° ۔ (ق ~ ر) کے دائرے کھینچے جائیں تو ان دائروں کا درمیانی منطقہ مطلوبہ میدان ہوگا جس کے اندر اجرام سماوی دیکھے جا سکیں گے۔

مثال ۷ ۔ فرض کرو کہ کرۂ سماوی پر دو متقاطر نقطے پ۱، پ۲ ہیں (۴۴۰)
اور فرض کرو کہ دائرہ ۲ کی قرات ںَ ہے جبکہ تعیمی آلہ کو نقطہ پ۱ کی جانب قائم

کیا جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ اس آلہ کو پ$_1$ کی جانب قائم نہیں کیا جا سکتا سوائے اُس صورت کے جبکہ

جم^2 $\frac{1}{2}$ (۹۰° - رَ) ≮ مس ق مس ر (اگر مس ق مس ر > ۰)،

اور جب^2 $\frac{1}{2}$ (۹۰° - رَ) ≮ - مس ق مس ر (اگر مس ق مس ر < ۰)

مثال ۸ ۔ بتاؤ کہ اگر مساوات (۳) سے ط غائب ہو تو اس کا ہندسی مفہوم کیا ہوگا ۔

۱۴۳ ۔ تعمیمی آلہ کی بنیادی مساواتوں کی معکوس شکل ۔

ہم پھر شکل ۱۴۱ کی طرف رجوع ہوتے ہیں اور اُس ترقیم کے علاوہ جو وہاں استعمال کی گئی ہے اب ہم ن ن. = ۹۰° لیتے ہیں ۔ اس صورت میں ظاہر ہے کہ ن. کے محدد لہ + ۹۰°، ط ہیں ۔ اب چونکہ عہ، ضہ اور عہَ، ضہَ کے درمیان فاصلہ کی جیب التمام

جب ضہ جیب ضہَ + جم ضہ جم ضہَ جم (عہ - عہَ)

ہے اس لیے س، ب، ن، ن. کے محدد درج کرنے سے حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

جم س ب = جب ضہ جم ط + جم ضہ جیب ط جب (لہ - عہ)

جم س ن. = جب ضہ جیب ط - جم ضہ جم ط جب (لہ - عہ)

جم س ن = جم ضہ جم (لہ - عہ)

لیکن ہم جم س ب، جم س ن.، جم س ن کے لیے دوسرے جملے حاصل کر سکتے ہیں ۔

مثلث ب د س میں زاویہ ب د س = ۹۰° - رَ، کیونکہ ب د کا قطب ط ہے اور اس لیے ط د ب = ۹۰° اور چونکہ ک ط کا قطب د ہے اس لیے ط د گ = رَ ۔ پس

جم س ب = جم (۹۰° - ق) جم (۹۰° + ر)

+ جب (۹۰° - ق) جب (۹۰° + ر) جم (۹۰° - سَ)

= - جب ق جب ر + جم ق جم ر جب سَ

مثلث س ط ن سے حاصل ہوتا ہے

جم س ن = جم س ط جم ن ط + جب س ط جب ن ط جم (۹۰° - ق - س ط ک)

= جم س ط جم ن ط + جب ن ط جب ق جب س ط جم س ط ک

+ جب ن ط جب ق جب س ط جم س ط ک

= جم ر جم س جم سَ + جب ق جم ر جب س جب سَ + جم ق جب ر جب س

اس جملہ میں س کی بجائے س - ۹۰° لکھنے سے جم س ن کی قیمت حاصل (۴۴۱)

ہوتی ہے یعنی

جم س ن = جم ر جب س جم سَ - جب ق جم ر جم س جب سَ - جم ق جب ر جم س

جم س ب، جم س ن، جم س ن کے جملوں کو اُن جملوں کے مساوی

رکھنے سے جو اوپر حاصل کئے گئے ہیں علی الترتیب حاصل ہوتا ہے

جم طہ جب ضہ + جب طہ جم ضہ جب (لہ - عہ)

= - جب ق جب ر + جم ق جم ر جب سَ .... (۱)

جب طہ جب ضہ - جم طہ جم ضہ جب (لہ - عہ)

= جم ر جب س جم سَ - جم ق جب ر جم س - جب ق جم ر جم س جب سَ

اور جم ضہ جم (لہ - عہ) .... (۲)

= جم ر جم س جم سَ + جم ق جب ر جب س + جب ق جم ر جب س جب سَ .... (۳)

اِن مساواتوں کو حسب ذیل معادل شکلوں میں رکھا جا سکتا ہے :-

جم ق جم ر جب سَ = جب ق جب ر
+ جم طہ جب ضہ
+ جب طہ جم ضہ جب (لہ - عہ) ....(۴)

جم ر جم سَ = جب طہ جب ضہ جب س
- جم طہ جم ضہ جب (لہ - عہ) جب س
+ جم ضہ جم (لہ - عہ) جم س ....(۵)

جب ر = - جم طہ جب ق جب ضہ
- جب طہ جب ق جم ضہ جب (لہ - عہ)
+ جم ق جم ضہ جم (لہ - عہ) جب س .... (٦)
- جب طہ جم ق جب ضہ جم س
+ جم طہ جم ق جم ضہ جب (لہ - عہ) جم س

بلاشبہ یہ مساواتیں دفعہ ۲۴۲ میں مندرجہ ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) سے بھی اخذ کیجا سکتی ہیں - اوپر کی شکلیں مفید ہیں کیونکہ ان میں تعمیمی آلہ کے نظریہ کے معکوس مسئلہ کا حل شامل ہے یعنی اگر عہ اور ضہ دیے گئے ہوں تو س اور سَ معلوم کرنا جبکہ طہ، لہ، ق، ر معلوم ہوں -

(۲۴۴) **مثال ۱** — فرض کرو کہ دو ستاروں کے محدد عہ$_1$، ضہ$_1$ اور عہ$_2$، ضہ$_2$ ہیں اور فرض کرو کہ ان کے جواب میں تعمیمی آلہ کی قراءتوں کے زوج س$_1$، سَ$_1$ اور س$_2$، سَ$_2$ ہیں - اگر ہم

ا$_1$ = جم ق جب ر جب س$_1$ + جم رجم س$_1$ جم سَ$_1$ + جب ق جم رجب س$_1$ جب سَ$_1$،

ب$_1$ = جم ق جب ر جم س$_1$ - جم رجب س$_1$ جم سَ$_1$ + جب ق جم ر جم س$_1$ جب سَ$_1$،

ج$_1$ = جم ق جم ر جب سَ$_1$ - جب ق جب ر

اور نیز مشابہ جملے لاحقہ ۲ کے ساتھ لکھیں تو ثابت کرو کہ

جب ضہ$_1$ جب ضہ$_2$ + جم ضہ$_1$ جم ضہ$_2$ جم (عہ$_1$ - عہ$_2$) = ا$_1$ ا$_2$ + ب$_1$ ب$_2$ + ج$_1$ ج$_2$

یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ خط و س$_1$ کی سمتی جیوب التمام قائم محوروں و ن، و ن، و ب کے لحاظ سے ا$_1$، ب$_1$، ج$_1$ ہیں جہاں و کرہ سماوی کا مرکز ہے اور س$_1$ وہ ستارہ ہے جس کے محدد عہ$_1$، ضہ$_1$ ہیں -

مثال ۲ — اگر ایک معیاری نقطہ عہ، ضہ کے لیے ا، ب، ج کی قیمتیں ا، ب، ج ہوں تو ثابت کرو کہ کسی دوسرے نقطہ عہ، ضہ کے محددوں میں خطائیں مف عہ، مف ضہ جو س کو متعین کرنے میں خطا مف س کی وجہ سے

پیدا ہوتی ہیں ربط

{جم ضہ جیب ضہ ـ جب ضہ جم ضہ جم (عہ ـ عہ)} مف ضہ ـ جم ضہ جم ضہ جیب (عہ ـ عہ) مف عہ
= (ب ا ـ ا ب) مف ٧

کو پورا کرتی ہیں۔
کیونکہ

جب ضہ جب ضہ + جم ضہ جم ضہ جم (عہ ـ عہ) = ا ا + ب ب + ج ج.

اور اس لئے ٧ کے لحاظ سے تفرق کرنے اور یہ یاد رکھنے سے کہ

(جف ا)/(جف ٧) = ب، (جف ب)/(جف ٧) = ـ ا، (جف ج)/(جف ٧) = ۰

مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۳ ۔ ثابت کرو کہ تعیمی آلہ کی مساواتیں شکل

جم ق جم ر جب ٧ٓ = ل + جب ق جب ر،
جم ر جم ٧ٓ = م جب ٧ + ن جم ٧،
جب ر = ـ ل جب ق ـ م جم ق جم ٧ + ن جم ق جب ٧

میں بیان کیجا سکتی ہیں جہاں

ل = جم طہ جب ضہ + جب طہ جم ضہ جب (لہ ـ عہ)،
م = جب طہ جب ضہ ـ جم طہ جم ضہ جب (لہ ـ عہ)،
ن = جم ضہ جم (لہ ـ عہ)

مثال ۴ ۔ ثابت کرو کہ

مس ٧ٓ = ± ½ {((جم (ق ـ ر) + ل) / (جم (ق + ر) ـ ل))^½ ـ ((جم (ق + ر) ـ ل) / (جم (ق ـ ر) + ل))^½}

جہاں ل کے وہی معنی ہیں جو پچھلی مساوات میں بیان کئے گئے ہیں۔

مثال ۵ ۔ بتاؤ کہ مقداریں ق، ر کس طرح معلوم کیجا سکتی ہیں جبکہ دو متقابل نقطوں میں سے ہر ایک کے لیے قراءتیں ٧ٓ، ٧ٓ اور ٧ٓ، ٧ٓ حاصل

یکجا چکی ہوں۔

مساواتیں

ف سس رجم ق + گ جب ق + ھ = ۰،

فَ سس رجم ق + گَ جب ق + ھَ = ۰

(۴۴۳) آسانی سے حاصل ہوتی ہیں جہاں ف، گ، ھ، فَ، گَ، ھَ معلوم مقداریں ہیں اور اِن مساواتوں کے حل سے سس رجم ق اور جب ق دونوں حاصل ہوتے ہیں۔

اس طرح دو ممکن حل ق، ر اور ۱۸۰° - ق، ۱۸۰° - ر ہیں لیکن چونکہ رَ، +۹۰° اور -۹۰° کے درمیان واقع ہے اس لیے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ کونسا زوج لینا چاہیے۔

مثال ۶۔ ثابت کرو کہ کرۂ سماوی پر کے ہر حقیقی نقطہ کے لیے (سوائے دائرہ ا کے شطب اور ضد شطب کے) متناظر قراتیں ر اور رَ یا تو دونوں حقیقی ہونگی یا دونوں خیالی، اور مستثنیٰ صورتوں میں رَ غیر متعین ہوتا ہے۔

مثال ۳ سے معلوم ہوتا ہے کہ

م جب ر + ن جم ر = جم رجم رَ

- م جم ر + ن جب ر = جب رجم ق + جب ق جم رجب رَ

اگر جب رَ، جم رَ دونوں حقیقی ہیں تو جب ر اور جم ر دونوں حقیقی ہیں اور اس کے برعکس سوائے اُس صورت کے جبکہ م = ۰، ن = ۰۔ دیکھو مثال ۸۔

مثال ۷۔ ثابت کرو کہ اگر رَ مساواتوں (۴)، (۵)، (۶) کو پورا کرے تو ۱۸۰° - رَ بھی انہیں پورا کرے گا۔

یہ صریحاً (۴) کے لیے درست ہے اور (۵) اور (۶) کے لیے درست ثابت کرنے کے لیے ہم مثال ۶ کی مساواتوں کا مربع لیتے ہیں اور جمع کرتے ہیں اور م، ن کی بجائے اِن کی قیمتیں رکھتے ہیں تو چونکہ ل² + م² + ن² = ۱ اِس لیے ر کو ساقط کرنے سے نتیجہ حاصل ہوتا ہے

۱ = ل² + جم² رجم² رَ + (جب رجم ق + جب ق جم رجب رَ)²

اگر بہ ی کے لیے درست ہے تو ۱۸۰° - ی کے لیے بھی درست ہے۔

مثال ۸ - ثابت کرو کہ دوربین کو بالعموم دائرہ ا کے شطب کی جانب قائم نہیں کیا جاسکتا سوائے اس صورت کے جبکہ اس دائرہ پر کی قرارت لاتناہی پر کے خیالی دائری نقطوں میں سے ایک یا دوسرے کو ظاہر کرے۔

دفعہ ۱۴۲ مثال ۲ میں ہم بیان کر چکے ہیں کہ دائرہ ا کے شطب کے محدد عہ = لہ - ۹۰° اور ضہ = ۹۰° - طہ سے حاصل ہوتے ہیں اور انہیں مہ = جب طہ جب ضہ - جم طہ جم ضہ جب (لہ - عہ) اور ن = جم ضہ جم (لہ - عہ) میں درج کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مہ = ۰ اور ن = ۰ - ان حالات کے تحت مساواتوں

مہ جب ی + ن جم ی = جم رجم ی

- مہ جم ی + ن جب ی = جب رجم ق + جب ق جم رجب ی

کو پورا کرنے کے لیے جب ی یا جم ی کو لاتناہی ہونا چاہیے۔ اس صورت میں مس ی = ± خ اور ی کو لاتناہی پر کے خیالی دائری نقطوں میں سے ایک نقطہ ہونا چاہیے۔

۱۴۴ - تعمیمی آلہ کے راست اور معکوس مسئلوں کے درمیان مقابلہ

ہم دیکھ چکے ہیں کہ تعمیمی آلہ کے راست مسئلہ میں عہ اور ضہ معلوم کئے جاتے ہیں جبکہ ی اور ی دیے گئے ہوں اور اسکے معکوس مسئلہ میں ی اور ی معلوم کئے جاتے ہیں جبکہ عہ اور ضہ دیے گئے ہوں - اب ہم ان دو مسئلوں کے درمیان ایک بنیادی فرق معلوم کرینگے۔

راست مسئلہ میں ہم ی اور ی کی مشاہدہ کردہ قیمتیں دفعہ ۱۴۲ کی مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) میں داخل کرتے ہیں اور چونکہ

$$-۹۰° \not< ضہ \not> ۹۰°$$

اس لیے عہ اور ضہ ان تین مساواتوں سے بغیر کسی ابہام کے حاصل ہوتے ہیں۔ (۱۴۴)

یہ راست مسئلہ ہے جس کا ہمیشہ ایک اور صرف ایک حل ہوتا ہے۔

لیکن معکوس مسئلہ میں عہ اور ضہ دیے جاتے ہیں اور دفعہ ۱۴۳ کی مساواتوں (۴)، (۵)، (۶) سے ں اور ںَ کو تلاش کرنا ہوتا ہے۔ اس معکوس مسئلہ کے دو حل ہوتے ہیں خواہ وہ حقیقی ہوں یا خیالی یا منطبق۔ اِس لیے اگر تعیمی آلہ کو ایک ستارہ کی جانب ایک طریقہ سے قائم کیا جا سکتا ہے تو بالعموم ایک دوسرا بالکل مختلف طریقہ ہوتا ہے جس سے اسکو اسی ستارہ کی جانب قائم کیا جا سکتا ہے۔ یہ ہوسکتا ہے کہ آلہ کو کسی حقیقی قراءت پر لاکر ستارہ کی جانب قائم کرنا ممکن نہ ہو لیکن اگر وہ قائم ہو جائے تو بالعموم آلہ کے دو محل ایک دوسرے سے بالکل مختلف ایسے ہوں گے کہ ستارہ کا مشاہدہ کیا جا سکیگا۔ پس ں اور ںَ کیلئے قیمتوں کے دو مختلف زوج ہیں جو مساوی طور پر عہ اور ضہ کی قیمتوں کے ایک زوج کے متناظر ہیں۔

دفعہ ۱۴۳ کی مساوات (۴) سے جیب ںَ متعین ہوسکتا ہے اور اگر یہ ≯ ۱ تو یہ مساوات (۴) دو حقیقی زاویوں ںَ۱ اور ۱۸۰° - ںَ۱ میں سے کسی ایک سے پوری ہو سکتی ہے۔ اِن متمم قیمتوں میں سے پہلی کو دفعہ ۱۴۳ کی مساوات (۵) میں داخل کرنے اور اُس کو مساوات (۶) کے ساتھ لینے سے دو خطی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں جن سے جیب ں۱ اور جم ں۱ دونوں متعین ہوتے ہیں اور اِس طرح ں۱ بغیر ابہام کے معلوم ہوتا ہے۔ ں کی اس قیمت کو ہم ں۱ کہینگے۔

جب مساوات (۵) میں دوسری قیمت ۱۸۰° - ںَ۱ کو درج کیا جاتا ہے تو محصلہ مساوات کو مساوات (۶) کے ساتھ لینے سے اُسی طرح ں کی دوسری قیمت حاصل ہوتی ہے جسے ہم ں۲ کہینگے (دفعہ ۱۴۳ مثال ۷)۔ پس عہ، ضہ کی دی ہوئی قیمتوں کے متناظر دو محل ں۱، ںَ۱ اور ں۲، ۱۸۰° - ںَ۱ ہیں۔ اس لیے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر ایک محل موجود ہے تو بالعموم دو مختلف محل ہیں جن میں تعیمی آلہ کو ایک دیے ہوئے ستارہ کی جانب قائم کیا جا سکتا ہے۔ ان میں سے ایک محل کو دایاں محل کہتے ہیں اور دوسرے کو

بایاں۔ اُس عمل کو جس کے ذریعہ تعیمی آلہ کو ایک محل سے دوسرے محل میں منتقل کیا جاتا ہے **الٹانا** کہتے ہیں۔

مثال ۱ ۔ ثابت کرو کہ جملہ

۔جم ق جب ر جم ر + جم ر جب ر جم ر ۔ جب ق جم ر جم ر جب ر

نہیں بدلتا اگر تعیمی آلہ کو اُلٹا کر کے کرۂ سماوی کے اُسی نقطہ کی جانب قائم کیا جائے۔ اِس واقعہ کا ہندسی مفہوم سمجھاؤ۔

صفحہ ۲۹۱ ضابطہ (۲) سے ہم دیکھتے ہیں کہ جملہ بالا

جب ضہ جب طہ ۔ جب (لہ ۔ عہ) جم ضہ جم طہ

کے مساوی ہے۔

(۴۴۵)

مثال ۲ ۔ ثابت کرو کہ جملہ

جم (لہ ۔ عہ) جب ر ۔ جب طہ مس ضہ جم ر + جم طہ جب (لہ ۔ عہ) جم ر کی قیمت وہی ہوگی خواہ تعیمی آلہ دائیں محل میں ہو یا بائیں محل میں جبکہ اُسے ستارہ عہ، ضہ کی جانب قائم کیا جائے۔

مثال ۳ ۔ اگر تعیمی آلہ کے دائرہ ا کے صعودی عقدہ کا طول بلد اور میلان بلحاظ حوالہ کے دائرہ کے علی الترتیب لہ، طہ ہوں تو ثابت کرو کہ

جب $\frac{1}{2}$ (ر۱ + ر۲) [جب طہ جب ضہ ۔ جم طہ جم ضہ جب (لہ ۔ عہ)]

+جم $\frac{1}{2}$ (ر۱ + ر۲) جم ضہ جم (لہ ۔ عہ) = ۰

جہاں دائیں اور بائیں محلوں میں دائرہ ا کی قراتیں ر۱ اور ر۲ ہیں جبکہ آلہ کو کرۂ سماوی کے ایک ہی نقطہ کی جانب قائم کیا گیا ہو۔ اس مساوات میں ق اور ر کی عدم موجودگی کی ہندسی تعبیر کیا ہے۔

مثال ۴ ۔ فرض کرو کہ دائرہ ا کی قراتیں ر۱ اور ر۲ ہیں جبکہ آلہ کو علی الترتیب دائیں اور بائیں دونوں محلوں میں ایک ہی ستارہ کی جانب قائم کیا جاتا ہے، یہ مان لیا گیا ہے کہ اس وقفہ میں ستارہ کے محدد نہیں بدلتے۔

فرض کرو کہ اس کے جواب میں دائرہ ۲ کی قرائتیں رَ۱ اور رَ۲ ہیں۔ حسب ذیل عام ضابطہ ثابت کرو:۔

جم ق جب رجب $\frac{1}{2}$ (ر۱ - ر۲) + جب ق جم رجم $\frac{1}{2}$ (رَ۱ - رَ۲) جب $\frac{1}{2}$ (ر۱ - ر۲)

- جم رجب $\frac{1}{2}$ (رَ۱ - رَ۲) جم $\frac{1}{2}$ (ر۱ - ر۲) = ۰

۱۴۵ — تعمیمی آلہ میں دائرہ ۲ کی مظاہری خطا معلوم کرنا۔

آلہ کا پہلا مستقل جس کو متعین کرنا چاہئے درجہ بندی کی مظاہری خطا کہلاتا ہے۔ یہ خطا، اُس نمائندہ یا خوردبین کے لحاظ سے وقوع پذیر ہوتی ہے جس کے ذریعہ حرکت پذیر دائرہ ۲ کی قراءت کیجاتی ہے۔ مظاہری خطا وہ مستقل مقدار ہے جس کو رَ کی مشاہدہ کردہ قیمت میں جمع کرنا پڑتا ہے تاکہ رَ کی وہ قیمت حاصل ہو جو اُس وقت ملتی جبکہ آلہ ہندسی طور پر کامل ہوتا۔

فرض کرو کہ یہ خطاء، طا ہے اور ہم یہ سمجھیں گے کہ مشاہدہ کردہ قرارت رَ میں جو تصحیح عائد کرنا ہے وہ طا ہے، اس طرح رَ + طا ہندسی قوس ک ط ہے (شکل ۱۴۱)۔ یعنی وہ مقدار جس کو ہم اب تک رَ سمجھتے رہے ہیں۔

فرض کرو کہ دوربین کسی دُور کے نشان کی جانب قائم کی گئی ہے اور فرض کرو کہ دائرہ ۲ کی قرارت رَ۱ ہے تو تصحیح قرارت رَ۱ + طا ہوگی۔ پھر فرض کرو کہ آلہ کو الٹ کر اسی نشان کی جانب لگایا گیا ہے اور نشان اِس اثنا میں غیر متغیر رہتا ہے۔ فرض کرو کہ اب دائرہ ۲ کی قرارت رَ۲ ہے تو چونکہ مشاہدہ کردہ قرارت پر اطلاق پذیر تصحیح ایک ہی آلہ میں ہمیشہ وہی رہتی ہے اس لیے صحیح قراءت رَ۲ + طا ہوگی۔

(۲۴۶) دفعہ ۱۴۴ میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ آلہ کو اُلٹنے سے جب رَ نہیں بدلتا یعنی ایک ہندسی طور پر صحیح آلہ میں رَ کی حاصل شدہ دو قیمتیں متمم ہونگی۔ اِسلئے

رَ۱ + طا + رَ۲ + طا = ۱۸۰°

یعنے طا = ۹۰° - ½ (ٹما + ٹما۲) ....(۱)
اس طرح کسی دور کے جرم پر دائیں اور بائیں قراءتوں کے ایک واحد زوج سے ہم طا کو معلوم کر لیتے ہیں -
اگر یہ دور کا نشان ایک ستارہ ہو تو یہ امر قابل ذکر ہے کہ افلاک کی یومی حرکت بعض صورتوں میں ستارہ کے محددوں کو دوسرے مشاہدہ میں پہلے مشاہد کے محددوں کی نسبت مختلف بنادیتی ہے۔ حسب ذیل عمل اس مشکل کو رفع کرنے کے لیے کافی ہوگا -
ستارہ کے دو مشاہدے "دائیں" محل میں اور اسی ستارہ کا ایک مشاہدہ ٹما "بائیں" محل میں اس آن پر جو ان دو دائیں مشاہدوں کے وسط میں ہو عمل میں لانا ہوگا۔ اول الذکر دو مشاہدوں کا اوسط ٹما کی بجائے لینا ہوگا۔ اسطرح ہم اکثر علی مقاصد میں یومی حرکت کے اثر کو ساقط کر سکتے ہیں -
اس مخصوص آلی مستقل کی تعیین اسقدر سادہ ہے کہ آیندہ ہم ہمیشہ یہ مان لیں گے کہ یہ تصحیح عمل میں آچکی ہے اور ہمارے ضابطوں کا ٹ فی الواقعی شکل ۱۴۸ کی قوس ک ط ہے - دائرہ ا یا لا ما کی مظہاری خطا (شکل ۱۱۳) معلوم نہیں ہو سکتی جب تک کہ بعض دوسرے مستقل جو آلہ سے متعلق ہیں دریافت نہ کر لیے جائیں -

۱۴۶ - ق اور ر کی تعیین آلہ کے دائیں اور بائیں دونوں محلوں میں ستاروں کے مشاہدوں سے -

فرض کرو کہ آلہ کے دائیں اور بائیں محلوں میں جبکہ اسے دور کے ایک ہی نشان کی جانب لگایا گیا ہو دائرہ ا کی قراءتیں ٹما اور ٹما۲ ہیں، یہ مان لیا گیا ہے کہ اگر یہ نشان ایک ستارہ ہو تو کسی ظاہری حرکت کا اثر اس طریقہ سے ساقط کیا جائیگا جو قبل ازیں سمجھایا جا چکا ہے - ہم یہ ثابت کریں گے کہ دائرہ ا کی مظہاری خطا اس طریق عمل سے ق اور ر کے معلوم کرنے پر کوئی اثر نہیں رکھتی اور اس لیے ہم اسکو صفر سمجھ سکتے ہیں، دائرہ ۲ کی خطا حسب

حسب قرار داد مذکورۂ بالا عمل میں آچکی ہے۔ اب ہم دائیں اور بائیں دونوں محلوں کے لیے جب ضہ کا ضابطہ (دفعہ ۲۴۱ ضابطہ ۱) لکھ لینگے۔ چنانچہ دائیں محل کے لیے حاصل ہوتا ہے

جب ضہ = − جم طہ جب ق جب ر (۴۴۷)
− جب طہ جم ق جب ر جم س$_1$
+ جم طہ جم ق جم ر جب سَ
+ جب طہ جم ر جب س$_1$ جم سَ
− جب طہ جب ق جم س$_1$ جب سَ

اور بائیں محل کے لیے

جب ضہ = − جم طہ جب ق جب ر
− جب طہ جم ق جب ر جم س$_2$
+ جم طہ جم ق جم ر جب سَ
− جب طہ جم ر جب س$_2$ جم سَ
− جب طہ جب ق جم ر جم س$_2$ جب سَ

جب ضہ کی ان دو قیمتوں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنے سے معلوم ہوگا کہ وہ رقمیں جنمیں جم طہ شریک رہتا ہے غائب ہو جاتی ہیں اس لیے (جب طہ = ۰ کی صورت کو ترک کر کے) ہم جب طہ سے تقسیم کر سکتے ہیں اور حسب ذیل نتیجہ حاصل کر سکتے ہیں

ا جب $\frac{1}{2}$ (س$_1$ + س$_2$) = ۰

جس میں ا کو

(جم ق جب ر + جب ق جم ر جب سَ) جب $\frac{1}{2}$ (س$_1$ − س$_2$) + جم ر جم سَ جم $\frac{1}{2}$ (س$_1$ − س$_2$)

کی بجائے اختصار کے مدنظر لکھا گیا ہے۔

اسی طرح آلہ کے دائیں محل کے لیے حاصل ہوتا ہے (دفعہ ۲۴۱ ضابطہ ۲)

جم (ل − عہ) جم ضہ = جم ق جب ر جب س$_1$

+ جم ر جم س۱ جم س َ
+ جب ق جم ر جب س۱ جب س َ

اور بائیں محل کے لیے
جم (لہ - عہ) جم ضہ = جم ق جب ر جب س۲
- جم ر جم س۲ جم س َ
+ جب ق جم ر جب س۲ جب س َ

ان جملوں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھنے پر حاصل ہوتا ہے
ا جم ½ (س۱ + س۲) = ۰

لیکن ہم دیکھ چکے ہیں کہ
ا جب ½ (س۱ + س۲) = ۰

اس لیے مربع لینے اور جمع کرنے سے ا = ۰ یا
(جم ق جب ر + جب ق جم ر جب س َ) جب ½ (س۱ - س۲)
+ جم ر جم س َ جم ½ (س۱ - س۲) = ۰ (۴۴۸)

چونکہ س۱ اور س۲ صرف اجتماع س۱ - س۲ میں آتے ہیں اس لیے دائرہ ا کی مظہاری خطا ساقط ہو چکتی ہے - اس طرح ایک ضابطہ حاصل ہوتا ہے جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کس طرح دو اندرونی مستقل ق اور ر مشاہدہ کے ذریعہ معلوم کیے جا سکتے ہیں - چونکہ اس ضابطہ میں عہ اور ضہ غائب ہیں اس لیے یہ ضابطہ ستارہ یا نشان پر منحصر نہیں ہوتا، نیز لہ اور طہ جن سے آلہ کا رُخ متعین ہوتا ہے ضابطہ میں موجود نہیں ہیں -

اگر ہم اختصار کے مدنظر لکھیں
ا = جب ½ (س۱ - س۲)، ب = جب س َ جب ½ (س۱ - س۲)،
ج = جم س َ جم ½ (س۱ - س۲)

تو اوپر کی مساوات کو حسب ذیل شکل میں بیان کیا جا سکتا ہے:
ا جم ق جب ر + ب جب ق جم ر + ج جم ر = ۰

جس میں ا، ب، ج میں صرف دو مقداریں شامل ہوتی ہیں جو مشاہدہ سے معلوم ہوتی ہیں

یہی عمل دوسرے ستارہ یا نشان پر کیا جائے تو مشابہ جملہ حاصل ہوگا:

اَ جم ق جب ر + بَ جب ق جم ر + جَ جم ر = ۰

اسلیے (ب اَ - ا بَ) جب ق = ا جَ - ج اَ

پس جب ق حاصل ہوتا ہے اور اس لیے ق کی ہتم قیمتیں ملتی ہیں جنمیں سے کسی ایک سے مطلوبہ شرطیں پوری ہونگی۔ لیکن چونکہ ہم یہ تصفیہ کر چکے ہیں کہ دائرہ ۲ کا میلان دائرہ ۱ کے ساتھ ۹۰° - ق ہے اور حسب قرارداد (دفعہ ۱۰) کسی میلان کو تعبیر کرنے والا زاویہ ۰° اور ۱۸۰° کے درمیان واقع ہونا چاہئے اس لیے ق کو -۹۰° اور +۹۰° کے درمیان واقع ہونا چاہئے۔ اس لیے ہم ق کی ہتم قیمتوں میں سے وہ قیمت لیتے ہیں جو اِس شرط کو پورا کرتی ہے اور اس طرح ق بغیر ابہام کے معلوم ہو جاتا ہے۔ نیز معلوم ہوتا ہے کہ

(ا جَ - اَ ج) مس ر = (بَ ج - ب جَ) مس ق

اِس سے ر معلوم ہوتا ہے کیونکہ ر اور ر + ۱۸۰° میں سے ہم وہ قیمت منتخب کرتے ہیں جو -۹۰° اور +۹۰° کے درمیان واقع ہے کیونکہ ر کو اِن حدود کے درمیان ہی واقع ہونا چاہئے۔

اِس لیے ق اور ر جو تعیمی آلہ کے دو اندرونی مستقل ہیں متعین ہو سکتے ہیں۔

۱۴۷ - لہ اور طہ معلوم کرنا۔

اِن مقداروں کی تعیین دفعہ ۱۴۳ کے ضابطہ (۴) کے ذریعہ عمل میں آسکتی ہے۔ یہ ضابطہ لکھا جا سکتا ہے

لا جب ضہ + ما جم ضہ جم عہ + ے جم ضہ جب عہ

+ جب ق جب ر - جم ق جم ر جب تہ = ۰ .... (۱)

جہاں لا = جم طہ، ما = جب طہ جب لہ، ے = - جب طہ جم لہ

(۹۴۴) ہم ابھی بتا چکے ہیں کہ ق اور ر کیونکر معلوم ہو سکتے ہیں، اس لیے اگر

ئ کا مشاہدہ کیا جائے اور مظہاری خطا کے لیے اس کی تصحیح کی جائے (دفعہ ۱۴۵) اور اگر ستارہ ایسا ہو جس کے محدد معلوم ہیں، تو مساوات (۱) کے تمام سر معلوم ہو جاتے ہیں ۔ دو دیگر معلومہ ستاروں سے دو اور ایسی مساواتیں ملیں گی اور اس طرح درجہ اول کی تین مساواتیں حاصل ہونگی جن سے لا، ما، ے متعین ہو سکتے ہیں ۔

چونکہ جم طہ اس طریقہ سے معلوم ہو جاتا ہے اور ۰° > طہ > ۱۸۰° اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ طہ کو کس طرح ٹھیک طور پر معلوم کیا جا سکتا ہے۔ نیز چونکہ ما اور ے معلوم ہیں، اس لیے جب لہ اور جم لہ معلوم ہوتے ہیں اور اس لیے لہ بھی معلوم ہوتا ہے۔ بلاشبہ دوسری مماثل صورتوں کی طرح یہاں بھی جب لہ اور جم لہ دونوں کی ضرورت ہے۔ اگر صرف جب لہ معلوم ہوتا تو یہ تصفیہ کرنے کے لئے کہ مطلوبہ زاویہ لہ ہے یا ۱۸۰° ـ لہ کوئی چیز نہ ہوتی ـ اگر صرف جم لہ معلوم ہوتا تو یہ تصفیہ کرنے کے لئے کہ مطلوبہ زاویہ لہ ہے یا ۳۶۰° ـ لہ کوئی چیز نہ ہوتی ۔

مثال ۔ ثابت کرو کہ تین بنیادی مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) (دفعہ ۱۴۲) میں ئ کی جگہ ہم جملہ $۹۰° + \frac{۱}{۲}$ (ئ‌ا۱ ـ ئ‌ا۲) رکھ سکتے ہیں جہاں ئ‌ا۱ اور ئ‌ا۲ دائرہ ۲ کی قراتیں ہیں جبکہ تعیمی آلہ کی دوربین کو ستارہ عہ، ضہ پر علی الترتیب دائیں اور بائیں محلوں میں لگایا گیا ہے ۔

ثابت کرو کہ جب یہ ابدال عمل میں لایا جاتا ہے تو مساواتیں (۱)، (۲)، (۳) درست رہتی ہیں خواہ دائرہ ۲ کی مظہاری خطا کچھ ہی ہو اگرچہ یہ مساواتیں اپنی اصلی شکل میں درست نہیں رہتیں اگر دائرہ ۲ میں کوئی مظہاری خطا موجود ہو ۔

۱۴۸ ۔ دائرہ ۱ کی مظہاری خطا معلوم کرنا ۔

ہم بتا چکے ہیں کہ ق، ر، لہ، طہ اور دائرہ ۲ کی مظہاری خطا کیونکر متعین ہو سکتے ہیں، اس لیے زاویہ ئ جو اب استعمال کیا جائے گا ایک معلومہ زاویہ ہے کیونکہ یہ دائرہ ۲ کی قراءت ہے جس پر مظہاری خطا کی معلومہ تصحیح

عائد کیجا چکی ہے۔ تعیمی آلہ کے نظریہ کی تکمیل کے لیے صرف یہ بتانا باقی ہے کہ دائرہ ا کی مظہاری خطا آلہ کے دائیں اور بائیں دونوں محلوں سے ایک ستارہ عہ ، ضہ کا مشاہدہ کرکے کس طرح متعین کی جاسکتی ہے۔

دفعہ ۱۴۳ کی مثال (۳) کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

جم رجم رَ = مر جب ر + ن جم ر .... (۱)

جہاں مر = جب طہ جب ضہ - جم طہ جم ضہ جب (لہ - عہ)

ن = جم ضہ جم (لہ - عہ)

یہ ضابطہ صرف اُسی وقت درست ہے جبکہ ر کی قیمت ر۱ + ما ہو جہاں ر۱ دائرہ ا پر واقعی مشاہدہ کردہ زاویہ ہے اور ما مظہاری خطا ہے جو اصلی فاصلہ ن ط (شکل ۱۱۶) حاصل کرنے کے لیے ر۱ میں جمع کرنی ہوگی۔ پس

جم رجم رَ = مر جب (ر۱ + ما) + ن جم (ر۱ + ما) .... (۲)

(۴۵۰) اگر آلہ کو الٹا کر اُسی ستارہ عہ ، ضہ پر لگایا جائے تو رَ ، ۱۸۰° - رَ میں تبدیل ہوگا ، قراءت ر۱ بدلکر ر۲ ہوجائے گی اور ما غیر متغیر رہے گا اِس لئے

- جم رجم رَ = مر جب (ر۲ + ما) + ن جم (ر۲ + ما) ..... (۳)

مساواتوں (۲) ، (۳) میں مر اور ن معلوم ہیں کیونکہ ستارہ کا مقام معلوم ہونے کی وجہ سے عہ ، ضہ معلوم ہیں۔ مشاہدوں سے رَ ، ر۱ ، ر۲ حاصل ہوتے ہیں۔ اس لیے جب ما اور جم ما میں دو خطی مساواتیں ملتی ہیں جن کے سر معلومہ مقداریں ہیں۔ اِن مساواتوں سے جب ما اور جم ما متعین ہوتے ہیں اور اسلیے ما بغیر ابہام کے حاصل ہوتا ہے۔

پس ہم یہ بتا چکے کہ تعیمی آلہ کے تمام مستقل کیونکر حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

۱۴۹ - وہ واحد مساوات جس میں رصدگاہ کے بنیادی آلات کا نظریہ شامل ہے۔

فرض کرو کہ ایک ستارہ س۱ کے محدد عہ۱ ، ضہ۱ ہیں اور اُس کے لیے

تعمیمی آلہ کی قراتیں ر۱، رَ۱ ہیں۔ اسی طرح فرض کرو کہ دوسرے ستارہ س۲ کے محدد عہ۲، ضہ۲ اور تعمیمی آلہ کی قراتیں ر۲، رَ۲ ہیں۔ یہ محدد ارتفاع اور السمت، یا صعودِ مستقیم اور میل، یا عرض بلد اور طول بلد، یا کوئی اور نظام کے محدد ہو سکتے ہیں۔ اِن دو ستاروں کے درمیانی فاصلہ کی جیب التمام کے لیے جملہ

جب ضہ۱ جب ضہ۲ + جم ضہ۱ جم ضہ۲ جم (عہ۱ − عہ۲)

ہے اور اِس کو لکھا جا سکتا ہے

جب ضہ۱ جب ضہ۲ + جم ضہ۱ جم ضہ۲ جم {(لہ − عہ۱) − (لہ − عہ۲)}

دفعہ ۲۱۴۲ کے عام ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) سے اس جملہ میں جب ضہ۱، جب (لہ − عہ۱)، جم ضہ۱، جم (لہ − عہ۱) جم ضہ۱ کی بجائے ر۱ اور رَ۱ اور آلہ کے مستقلوں ط، ق، ر کی رقوم میں اِن کے معادل جملے درج کیے جا سکتے ہیں۔ اسی طرح جب ضہ۲، جب (لہ − عہ۲) جم ضہ۲، جم (لہ − عہ۲) جم ضہ۲ کی بجائے اِن کے معادل جملے ر۲ اور رَ۲ اور ط، ق، ر کی رقوم میں درج کئے جا سکتے ہیں۔ اس طرح اِن دو ستاروں کے درمیانی فاصلہ کی جیب التمام کیلیے ایک جملہ ر۱، رَ۱، ر۲، رَ۲ اور آلہ کے مستقلوں کی رقوم میں حاصل ہوتا ہے۔

عمل حساب میں آسانی ہو سکتی ہے اگر ہم یہ دیکھیں کہ نتیجہ میں ط داخل نہیں ہو سکتا کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ ستاروں کا درمیانی زاویہ اُس بنیادی دائرہ کے محل پر منحصر نہیں ہونا چاہئے جس کے لحاظ سے محدد ناپے گئے ہیں۔ اس لیے اِس مخصوص عمل حساب کے لیے اس کی اجازت ہے کہ ط کی کوئی اختیاری قیمت مقرر کی جائے کیونکہ اس سے نتیجہ کی عمومیت پر (۴۵۱)
کوئی اثر نہیں پڑے گا۔ اگر ہم ط = ۹۰° لیں تو مساوات ہو جاتی ہے

جب ضہ۱ جب ضہ۲ + جم ضہ۱ جم ضہ۲ جم (عہ۱ − عہ۲)

= (− جم ق جب ر جم ر۱ + جم ر جب ر۱ جم رَ۱ − جب ق جم ر جم ر۱ جب رَ۱)

× (- جم ق جب رجم ں۱ + جم رجب ں۱ جم ںَ۲ - جب ق جم رجم ں۲ جب ںَ۲)

+ (جم ق جب رجب ں۱ + جم رجم ں۱ جم ںَ۱ + جب ق جم رجب ں۱ جب ںَ۱)

× (جم ق جب رجب ں۲ + جم رجم ں۲ جم ںَ۲ + جب ق جم رجب ں۲ جب ںَ۲)

+ (- جب ق جب ر + جم ق جم رجب ںَ۱) (- جب ق جب ر + جم ق جم رجب ںَ۲)

اِس سے حسب ذیل بنیادی مساوات حاصل ہوتی ہے

جب ضہ۱ جب ضہ۲ + جم ضہ۱ جم ضہ۲ جم (عہ۱ - عہ۲)

= + جب۲ ق جب۲ ر

+ جم۲ ق جب۲ ر جم (ں۱ - ں۲)

+ جم۲ ق جم۲ ر جب ںَ۱ جب ںَ۲

+ جم۲ ر جم ںَ۱ جم ںَ۲ جم (ں۱ - ں۲)

+ جب۲ ق جم۲ رجب ںَ۱ جب ںَ۲ جم (ں۱ - ں۲)

+ جم۲ رجب ق جب (ں۱ - ں۲) جب (ںَ۱ - ںَ۲)

+ جم ق جب رجم رجب (ں۱ - ں۲) (جم ںَ۲ - جم ںَ۱)

+ جب ق جم ق جب رجم ر {جم (ں۱ - ں۲) - ۱} (جب ںَ۱ + جب ںَ۲)

یہ ظاہر ہے کہ دائرہ ا کو اِس کے مستوی میں گھمایا جائے تو اس سے فاصلہ س۱ س۲ پر کوئی اثر نہیں پڑنا چاہیے۔ اس لیے جم س۱ س۲ کے جملہ میں ں۱ اور ں۲ کے صرف فرق ں۱ - ں۲ شریک ہوتے ہیں اور اس لیے اس جملہ میں دائرہ ا کی منظہاری خط شریک نہیں ہوتی۔ مساوات (۱) بنانے میں ضرب دینے سے پیشتر ں۲ = ۰ رکھنے سے کام میں مزید اختصار

پیدا کیا جاسکتا ہے اور ایسا کرنے پر ضرب کے بعد ما_1 کی بجائے ($\text{ما}_1 - \text{ما}_2$) رکھنا ہوگا۔ ہم فرض کرسکتے ہیں کہ دائرہ ۲ کی منظہاری خطا طا ہے اور اس صورت میں مَا_1 اور ما_2 کی بجائے مَا_1 + طا اور ما_2 + طا رکھنا چاہیئے۔ ہم قبل ازیں بہ بتاچکے ہیں کہ ایک ہی جرم کے دائیں اور بائیں مُشاہدوں سے کس طرح طا کو معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اِسے ایک دوسرے طریقہ سے بھی متعین کیا جاسکتا ہے جو ابھی بیان کیا جائے گا۔

ق اور ر کو مناسب قیمتیں دینے سے اوپر کا ضابطہ حسب ذیل ہیئتی آلات پر اطلاق پذیر ہوسکتا ہے:۔ آلہ ارتفاع والسمت، دائرہ نصف النہار آلہ اول السمت، استوائی دوربین، اور المقنطر۔ ہم آیندہ دیکھیں گے کہ دائرہ نصف النہار کے لیے ق اور ر میں سے ہر ایک صفر سے اسقدر قریب ہونا چاہیئے جس قدر ممکن ہو اور المقنطر کے لیے ق عرض بلد ہے اور ر بالکل اختیاری ہے۔ حسب ذیل عام ثبوت سے یہ معلوم ہوگا کہ مذکورہ بالا آلات میں سے ہر ایک کا مکمل نظریہ اِس ضابطہ میں شامل ہونا چاہیئے۔

کسی ایسے آلہ میں صرف اس امر کی ضرورت ہے کہ اِس آلہ کو کسی مخصوص (۴۵۲)
ستارہ پر لگانے سے جو قراتیں ما اور مَا حاصل ہوں اُن سے اِس ستارہ کے محدد عضہ جو آلی خطاؤں سے بری ہوں حاصل ہوسکیں۔

فرض کرو کہ س_1، س_2، س_3 تین معیاری ستارے ہیں جن کے محدد معلوم ہیں اور فرض کرو کہ ان میں سے ہر ستارہ کا مشاہدہ تعیمی آلہ سے کیا گیا ہے اور نتیجے ما_1، مَا_1، ما_2، مَا_2، ما_3، مَا_3 حاصل ہوئے ہیں۔ نمونہ کے ضابطہ (۱) میں تین زوجوں ($\text{س}_1 \text{س}_2$)، ($\text{س}_2 \text{س}_3$)، ($\text{س}_3 \text{س}_1$) میں سے ہر ایک کے لیے اندراج کرنے سے ہمیں تین غیر تابع مساواتیں ملتی ہیں۔ اِن مساواتوں سے ق، ر، اور طا معلوم کیے جاسکتے ہیں۔ حل میں کوئی ابہام نہیں ہوگا کیونکہ ہر صورت میں ہم اِن مقداروں کو تقریباً معلوم فرض کرسکتے ہیں اور اِس لیے ق، ر اور طا کی صحیح قیمتیں حاصل کرنے میں صرف خطی مساواتیں حل کرنی ہونگی۔ پس ہم مساوات (۱) کو ایک ایسی مساوات

سمجھ سکتے ہیں جس سے عہ، ضہ۱، عہ۲، ضہ۲، ر۱، ر‌َ۱، ر۲، ر‌َ۲ اور معلومہ مقداروں کے درمیان ایک رشتہ حاصل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ س وہ ستارہ ہے جس کے محدد عہ، ضہ مطلوب ہیں۔ ہم مساوات (۱) زوج (س، س۱) کے لیے لکھ لیتے ہیں اور عہ۱، ضہ۱، ر۱، ر‌َ۱ کی بجائے ان کی عددی قیمتیں درج کرتے ہیں۔ اس طرح ہمیں ایک مساوات ملتی ہے جو کسی ستارہ کے محدد عہ، ضہ اور ر، ر‌َ اور معلومہ عددی مقداروں میں ایک ربط ہے جہاں ر، ر‌َ اس ستارہ کے لیے تعیمی آلہ کی قراءتیں ہیں۔ جب ہم ر اور ر‌َ کی بجائے ان کی عددی قیمتیں درج کرتے ہیں جو س کے مشاہدہ سے حاصل ہوتی ہیں تو ضابطہ اس مخصوص ستارہ کے محددوں عہ اور ضہ کے درمیان ایک عددی رشتہ میں تحویل ہوتا ہے۔ اسی طرح زوج (س س۲) سے ایک دوسری بالکل غیر تابع عددی مساوات جس میں عہ، ضہ شریک ہوتے ہیں معلوم ہوتی ہے۔ لیکن چونکہ دو مساواتیں عہ، ضہ کو بغیر ابہام کے متعین کرنے کے لیے بالعموم کافی نہیں ہوتیں اس لیے ہم ایک تیسری مساوات (س س۲) سے حاصل کرتے ہیں۔ یہ مساوات دوسری مساواتوں کے غیر تابع نہیں ہوتی لیکن اگر ہم رکھیں لا = جب ضہ، ما = جم ضہ جم عہ، ی = جم ضہ جب عہ تو لا، ما، ی میں تین مساواتیں ملیں گی جن کو حل کرنے سے عہ، ضہ بغیر ابہام کے معلوم ہوں گے۔

تمام معمولی ضابطے جو مذکورۂ بالا مختلف آلات کے سلسلہ میں استعمال ہوتے ہیں عام مساوات (۱) کی مخصوص صورتوں کے طور پر اخذ کئے جا سکتے ہیں۔

مثال — ثابت کرو کہ اگر ق اور ر ایسی چھوٹی مقداریں ہوں کہ ان کی دوسری اور اعلیٰ قوتیں نظر انداز ہو سکتی ہیں تو ضابطہ (۱) لکھا جا سکتا ہے

جب ضہ۱ جب ضہ۲ + جم ضہ۱ جم ضہ۲ جم (عہ۱ − عہ۲)

= جم ر‌َ۱ جم ر‌َ۲ جم (ر۱ − ر۲) + جب ر‌َ۱ جب ر‌َ۲

+ ق جب (ر۱ − ر۲) جب (ر‌َ۱ − ر‌َ۲)

(۴۵۳)

+ رجب (سا-ساہ) (جم سلہ- جم سا)

۱۵۰*ا- تعمیمی آلہ کے نظریہ میں تفرقی ضابطے-

اگر زاویہ لہ میں (دیکھو دفعہ ۱۴۲) ایک چھوٹی مقدار مف لہ کا اضافہ کیا جائے لیکن طہ، ق، ر کو غیر متغیر رکھا جائے تو تعمیمی آلہ کی قراءتیں سا اور سَا جبکہ اُسے ایک ستارہ عہ، ضہ پر لگایا گیا ہو بالعموم بعض تبدیلیوں مف سا اور مف سَا سے متاثر ہوں گی- اسی طرح اگر طہ کو طہ+مف طہ میں تبدیل کیا جاتا اور لہ، ق، ر کو غیر متغیر رکھا جاتا تو بھی سا اور سَا میں بعض چھوٹی تبدیلیاں واقع ہوتیں- مذکورۂ بالا تبدیلیاں عمل میں لانے کی صورت میں شکل (۱۴۱) میں جو ترمیم کرنی پڑتی اُس کو نقطہ دار خطوں سے دکھایا گیا ہے-

اگر لہ اور طہ میں تبدیلیاں ایک ساتھ کیجائیں تو مف سا اور مف سَا میں سے ہر ایک مف لہ اور مف طہ کا ایک خطی تفاعل ہوگا- بلا شبہ یہ بالعموم نہیں ہوگا کہ مف سا یا مف سا میں سے کوئی صفر ہو- لیکن چونکہ مف لہ اور مف طہ دونوں اختیاری ہیں اس لیے صریحاً ان میں میں کوئی نہ کوئی ایسی نسبت ہونی چاہئے کہ وہ مف سَا کی حاصل ہونے والی قیمت کو صفر بنادے- اس صورت میں ہم مف لہ، مف طہ اور مف سا کے درمیان رشتوں کی تلاش کریں گے-

اس کے لیے طہ میں ایک چھوٹی تبدیلی سے محددوں پر جو اثر پڑتا ہے اُسے معلوم کرنا ہوگا- چونکہ بنیادی دائرہ کے لحاظ سے س کا محل نہیں بدلتا اور چونکہ شکل س ک ط اور زاویہ ۹۰- ق، لہ اور طہ کی تبدیلیوں سے نہیں بدلتے (کیونکہ مف سَا=۰) اسلیے ہم دیکھتے ہیں کہ شکل س ک ط ن س کے گرد ذرا سی گردش عا حاصل کرتی ہے اور ن، نَ پر آتا ہے- فرض کرو کہ م ن کا قطب و ہے- تب چونکہ م ن حوالہ کا بنیادی دائرہ ہے اس لیے وہ اس گردش سے غیر متغیر رہے گا اور اس لیے و متغیر نہیں ہوتا-

لیکن س کے گرد گردش، ن ط کو ہٹائے گی اور اس طرح ب جو ن ط کا شطب ہے بَ پر جائیگا جہاں س بَ = س ب اور ب س بَ = عا
ن ط اور ن نَ کا درمیانی زاویہ طہ، ب وِ کے مساوی ہونا چاہئے جو ان کے شطبوں کی درمیانی قوس ہے۔ اس لیے س کے گرد گردش کے بعد طہ کی متغیرہ قیمت وِ بَ حاصل ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ وِ ب پر بَ ق عمود کھینچا گیا ہے تو وِ بَ اور وِ ب کے درمیان فرق ب ق ہے اور اس لیے

مف طہ = ب ق = بَ ب جم بَ ب ق = بَ ب جب س ب ت
= عاجب س ب جب س ب ت = عاجب س ت
جہاں س ت، ن س کا خارج کیا ہوا حصہ ہے کیونکہ وِ ب کا شطب ن ہے، لیکن

عاجب س ت = عاجم ن س = عاجم (لہ - عہ) جم ضہ
اسلیے مف طہ = عاجم (لہ - عہ) جم ضہ

اِس کے بعد مف لہ اور مف ر کو عا کے ذریعہ بیان کرنا ہے۔

(۴۵۴) اگر نَ اُس نقطہ کا نیا محل ہو جو ابتداً ن پر تھا اور نً، م ن پر ن ط کے صعودی عقدہ کا نیا محل ہو تو

زاویہ نَ نً ن = ۱۸۰° - طہ
لیکن نَ نً = ن نَ جب نَ ن نً قم طہ
یا جب طہ مف ر = عاجب س ن جم س ن ل
اسلیے جب طہ مف ر = عاجب (لہ - عہ) جم ضہ
بالآخر اگر نَ نً، م ن پر عمود کھینچا جائے تو
ن نً = ن نً + نً نً
عاجب ن س جب س ن ل = مف لہ + جم طہ مف ر
یا عاجب ضہ = مف لہ + جم طہ مف ر
اس طرح حسب ذیل تین ضابطے حاصل ہوتے ہیں

مف طہ = عا جم (لہ - عہ) جم ضہ
جب طہ مف سا = عا جب (لہ - عہ) جم ضہ ....(۱)
مف لہ + جم طہ مف سا = عا جب ضہ

اب ہم عہ اور ضہ پر وہ اثر دریافت کریں گے جو طہ کو طہ + مف طہ میں بدلنے سے پیدا ہوتا ہے جبکہ یہ فرض کر لیا گیا ہو کہ ل، ق، ر، سا، سَا نہیں بدلتے جبکہ یہ تبدیلی واقع ہوتی ہے - یہ تبدیلی فی الحقیقت شکل ن ط ک س کو ن کے گرد زاویہ مف طہ میں سے گھمانے کے معادل ہے جبکہ اس شکل میں بالذات کوئی تغیر نہ ہو -

ن س نہیں بدلتا اور س، ن س کے عمود وار چھوٹے فاصلہ جب ن س × مف طہ میں حرکت کرتا ہے - شکل سے ظاہر ہے کہ طہ کا یہ اضافہ سَیل کو بقدر

جب ن س جب ن س ل × مف طہ = جب (لہ - عہ) مف طہ

کے گھٹا دیتا ہے -

پس حاصل ہوتا ہے

مف ضہ = - جب (لہ - عہ) مف طہ .... (۲)

نیز مف عہ = - جم (لہ - عہ) قس ضہ مف طہ .... (۳)

۱۵۱* - تفرقی ضابطوں کا اطلاق -

دفعہ ۱۵۰ کے ضابطوں (۱)، (۲)، (۳) سے اب ہم اس قابل ہو جاتے ہیں کہ دفعہ ۱۴۲ کے تعمیمی آلہ کے ضابطہ (۱) سے بقیہ ضابطوں (۲) اور (۳) کو اخذ کر سکیں -

پہلا ضابطہ ہے

جب ضہ = - جم طہ جب ق جب ر
- جب طہ جم ق جب ر جم سا
+ جم طہ جم ق جم ر جب سَا
+ جب طہ جم ر جب سا جم سَا

- جم ر جب طہ جب ق جم سا جب سَا

(۴۵۵) چونکہ اسکو کُلی طور پر صادق ہونا چاہیئے اِس لیے اسے درست ہونا چاہیئے اگر طہ میں مف طہ کا اضافہ اور ضہ میں متناظر تغیر کیا جائے۔ تفرق کی تکمیل کرنے، (۲) سے مف ضہ کی بجائے اندراج کرنے اور مف طہ سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

جب (لہ - عہ) جم ضہ = - جب طہ جب ق جب ر
+ جم طہ جم ق جب ر جم سا
+ جب طہ جم ق جم ر جب سَا
- جم طہ جم ر جب سا جم سَا
+ جم طہ جب ق جم ر جم سا جب سَا

پس ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۱۴۲ کے پہلے بنیادی ضابطہ سے دوسرا ضابطہ کیونکر حاصل ہوتا ہے۔

بالآخر فرض کرو کہ اس محصلہ مساوات پر مف طہ، مف لہ، مف سا کے لحاظ سے حسب دفعہ ۱۵۰ عمل تفرق کیا گیا ہے جبکہ دوسری مقداریں مستقل رہتی ہیں تو حاصل ہوتا ہے

جم (لہ - عہ) جم ضہ مف لہ = جب ضہ مف طہ - (جم ق جب ر جب سا
+ جم ر جم سا جم سَا + جب ق جم ر جب سا جب سَا) جم طہ مف سا

دفعہ ۱۵۰ کی مساوات (۱) کے ذریعہ مف طہ، مف سا، مف لہ کو ساقط کرنے سے ہمیں تعیمی آلہ کی تین بنیادی مساواتوں میں سے تیسری مساوات حاصل ہوتی ہے یعنی

جم (لہ - عہ) جم ضہ = جم ق جب ر جب سا
+ جم ر جم سا جم سَا
+ جب ق جم ر جب سا جب سَا

اس طرح معلوم ہوا کہ تعیمی آلہ کے تین بنیادی ضابطوں میں سے تیسرا بھی کس طرح پہلے ضابطہ سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔

۱۵۲ — تعمیمی دائرہ مرور —

تعمیمی آلہ کی ایک اہم صورت وہ ہے جس میں محور ا خود زمین کا محور ہو۔ اگر خط استواء کو بنیادی مستوی ہ ن (شکل ۱۱۴) کے طور پر لیا جائے تو چونکہ وہ زمین کے محور پر عمود ہے اس لیے طہ = ۰ حاصل ہونا چاہیے اور مبداء کے مناسب انتخاب سے محدد عہ، ضہ صعود مستقیم اور میل ہو جائینگے۔ نمائندہ جو زمین کی یومی حرکت میں اُسکے ساتھ حرکت کریگا دائرہ ا پر (جو اس صورت میں سماوی خط استوا ہوگا) قرارت ر′ دکھائیگا جس میں اور کوکبی وقت تہ میں صرف ایک مستقل کا فرق ہوگا۔ یہ مستقل لہ میں شامل ہو سکتا ہے اور (۴۵۶)
اس طرح بنیادی مساواتیں (دفعہ ۱۴۳) ہو جاتی ہیں

جم ق جم ر جب ر′ = جب ق جب ر + جب ضہ،
جم ر جم ر′ = جم ضہ جم (تہ + لہ − عہ)، ... (۱)
جب ر = − جب ق جب ضہ + جم ق جم ضہ جب (تہ + لہ − عہ)

تعمیمی آلہ کی یہ صورت **تعمیمی دائرہ مُرور** کے طور پر موسوم کیجا سکتی ہے۔

تعمیمی دائرہ مُرور میں دائرہ ۲ کے شطب کے صعود مستقیم عہ اور میل ضہ کے لیے جملے معلوم کرنے میں ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ر′ = ۹۰° ہوتا تو دُوربین ضرور ہمیشہ نقطہ عہ، ضہ کی جانب قائم ہوتی اور اس لیے مساواتوں (۱) میں ر کی بجائے ۹۰° رکھنے سے یہ مساواتیں عہ، ضہ سے پوری ہونی چاہئیں، اس لیے

− جب ق + جب ضہ = ۰، جم ضہ جم (تہ + لہ − عہ) = ۰،
جب ق جب ضہ − جم ق جم ضہ جب (تہ + لہ − عہ) = ۱

پہلی مساوات سے ضہ = ق حاصل ہوتا ہے، حل ۱۸۰° − ق ناقابل قبول ہے کیونکہ −۹۰° > ق > ۹۰°۔ دوسری مساوات سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ تہ + لہ − عہ، ۹۰° یا ۲۷۰° ہونا چاہیے اور ان میں سے اول الذکر

ناقابل قبول ہے کیونکہ وہ تیسری مساوات کو پورا نہیں کریگا۔ پس دائرہ ۲ کے شطب کے محدد حسب ذیل حاصل ہوتے ہیں

عہ‌ب = تہ + لہ - ۰۷۲ ، ضہ‌ب = ق

اور مساواتیں (۱) لکھی جا سکتی ہیں:

جم ضہ‌ب جم ر جب ر‌َ = جب ضہ‌ب جب ر + جب ضہ

جم ر جم ر‌َ = جم ضہ جب (عہ‌ب - عہ) ...(۲)

جب ر = - جب ضہ جب ضہ‌ب - جم ضہ‌ب جم ضہ جم (عہ‌ب - عہ)

جب تعیمی آلہ کی مزید تخصیص عمل میں لائی جاتی ہے تا کہ وہ ہمارے مشاہدوں کیلئے دائرہ نصف النہار بنے تو دوربین محور ۲ کے علی القوائم ہونی چاہئے، اس لیے ر = ۰ اور محور ۲ شرقاً غرباً واقع ہونا چاہئے۔ آلہ کے دو محل ہو سکتے ہیں بموجب اس کے کہ دائرہ ۲ کا شطب افق کے مشرقی نقطہ میں ہو یا مغربی نقطہ میں۔ پہلی صورت میں عہ‌ب = تہ + °۹۰ ، ضہ‌ب = ۰ اور مساواتیں (۲) ہو جاتی ہیں

جب ر‌َ = جب ضہ ، جم ر‌َ = جم ضہ جم (عہ - تہ)،

جم ضہ جب (عہ - تہ) = ۰

اِن سے حسب ذیل دو حل حاصل ہوتے ہیں

عہ = تہ ، ضہ = ر‌َ

اور

عہ = تہ + °۱۸۰ ، ضہ = °۱۸۰ - ر‌َ

پہلا حل اوپر کے تکبُد کے متناظر ہے اور دوسرا نیچے کے۔ (۴۵۷)

اگر دائرہ ۲ کا شطب نقطہ مغرب عہ‌ب = تہ - °۹۰ ، ضہ‌ب = ۰ پر ہو تو مساواتیں (۲) ہو جاتی ہیں

جب ر‌َ = جب ضہ ، جم ر‌َ = - جم ضہ جم (عہ - تہ)، جم ضہ جب (عہ - تہ) = ۰

اور حسب سابق حسب ذیل دو حل حاصل ہوتے ہیں

عہ = تہ ، ضہ = °۱۸۰ - ر‌َ

اور عہ = تہ + ۱۸۰°، ضہ = ت

پہلا حل اوپر کے تکبد سے متناظر ہے اور دوسرا نیچے کے۔

اُس آلہ میں بھی جو آلہ اول السمت کے طور پر مشہور ہے محور ۲ افقی ہوتا ہے لیکن وہ شمالاً اور جنوباً واقع ہوتا ہے۔ نیز ر = ۰ اور دائرہ ۲ کا شطب یا تو نقطہ شمال عہ = تہ + ۱۸۰°، ضہ = ۹۰° - فہ پر یا نقطہ جنوب عہ = تہ، ضہ = فہ - ۹۰° پر منطبق ہوتا ہے اور دونوں صورتوں میں (۲) کی آخری مساوات ہو جاتی ہے

جم (تہ - عہ) مس فہ = مس ضہ

اگر دوربین کو ایک جسم کے ساتھ استوار طور پر نصب کیا جائے جبکہ جسم پارے پر تیر رہا ہو تو محور ۲ انتصابی ہوگا۔ اصلی آلہ میں دائرہ ۲ درجہ دار نہیں ہوتا لیکن پھر بھی ہم ایسے درجے مان سکتے ہیں جن میں قدم (Nadir) شطب ہو اور اس صورت میں عہ = تہ + ۱۸۰°، ضہ = - فہ اور مساواتوں (۲) میں سے آخری مساوات ہو جاتی ہے

جب ر = جب فہ جب ضہ + جم فہ جم ضہ جم (تہ - عہ)

جہاں ۹۰° - ر وہ مستقل زاویہ ہے جو راس اور اُس نقطہ کے درمیان ہے جس پر دوربین کا محور کرہ سماوی سے ملتا ہے۔ یہ آلہ المقنطر کے طور پر مشہور ہے جس کی تجویز اس کے موجد چیانڈلر (Chandler) نے کی تھی۔

اِس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جب تعیمی آلہ کی تخصیص کیجاتی ہے تاکہ وہ دائرہ نصف النہار بن جائے تو ق اور ر دونوں صفر ہوتے ہیں۔ جب اس کی تخصیص آلہ اول السمت کے لیے کیجاتی ہے تو ر صفر ہوتا ہے لیکن ق صفر نہیں ہوتا۔ جب اسکی تخصیص المقنطر کے لیے کیجاتی ہے تو ر صفر نہیں ہوتا اور ق بھی صفر نہیں ہوتا۔ اِن آلات کی خطاؤں پر آئندہ باب میں غور کیا جائیگا۔

—— (۰) ——

(۴۵۸)

بائیسواں باب

رصدگاہ کے اساسی آلات

دفعہ — صفحہ

۱۵۳ — درجہ دار دائرہ کی قراءت ۔

ہئیتی آلات کی ساخت میں جو درجہ دار دائرہ عملاً استعمال ہوتا ہے اُس کے نظریہ پر سب سے اول غور کیا جائیگا ۔

اِس دائرہ کو بالعموم توپ دھات سے بناتے ہیں اور اس کے محیط کے گرد چاندی یا کسی دوسری مناسب دھات کی ایک تپلی پٹی جڑ دیتے ہیں

جس پر قائم لکیریں کندہ ہوتی ہیں، اِن خطوں کو انگریزی میں اکثر (Traits)
کہا جاتا ہے۔ صدر لکیروں پر ۰ سے ۵۹ ۳ تک نمبر لگے ہوئے ہوتے ہیں اور اسطرح
محیط ۳۶۰ مساوی حصوں یا درجوں میں منقسم ہوتا ہے۔ ہر دو متصلہ صدر
لکیروں کے درمیان ذیلی تقسیمات ہوتی ہیں۔ بعض نازک ترین آلات میں
مثلاً پسٹر اور مارٹن کے نصف النہاری دائروں میں ہر درجہ میں ۲۹ ذیلی
لکیریں تک ہوتی ہیں اور اس لیے محیط فی الواقع ۲َ کے وقفوں سے درجہ دار
ہوتا ہے۔ لیکن معمولی آلات میں بالعموم صرف ۵ یا ۱۰َ کے وقفوں سے
ذیلی لکیریں کندہ کرنا کافی سمجھا جاتا ہے۔

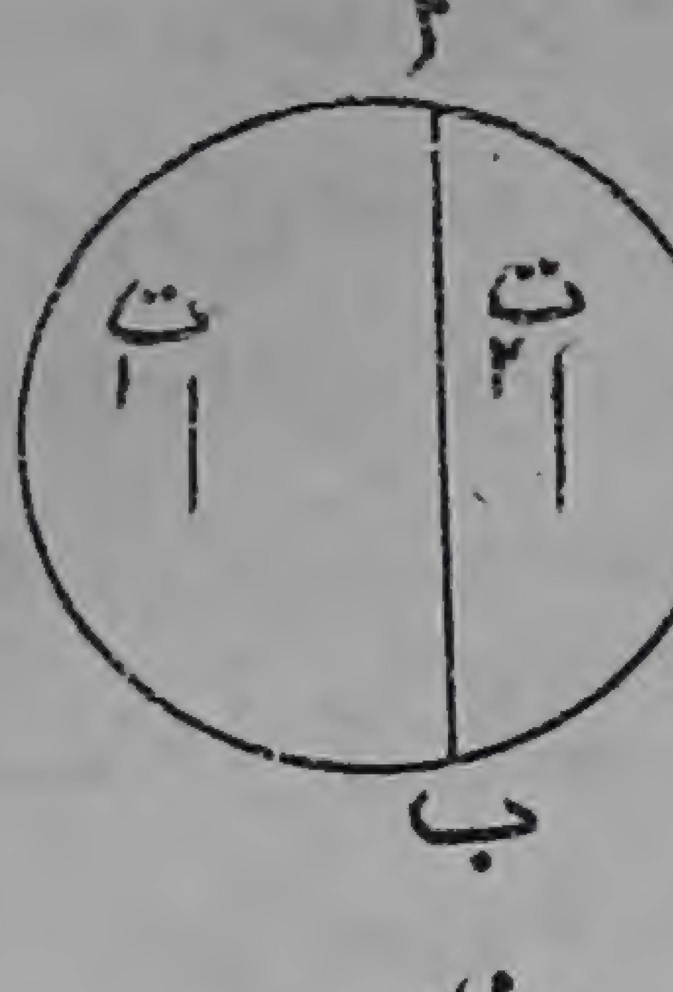
دو متصلہ ذیلی لکیروں کے درمیان محیط کی مزید ذیلی تقسیمات خورد بینوں
کی مدد سے حاصل کیجاتی ہیں اور اس طرح ایک ثانیہ کے دسویں حصے بھی
محسوب کئے جا سکتے ہیں۔ آلات سدس جیسے چھوٹے آلات میں ذیلی لکیروں (۴۵۹)
کے درمیانی حصہ کی تقسیم ورنیر کی مدد سے کیجاتی ہے، یہ ترکیب بالعموم مشہور
ہے کیونکہ اسے بار پیما میں استعمال کیا جاتا ہے۔

اگر ثابت نمائندہ، دائرہ پر کی لکیروں میں سے ایک پر ٹھیک منطبق
ہو تو اِس مخصوص محل کے لیے دائرہ کی قراءت سے درجوں اور دقیقوں
کی وہ تعداد ظاہر ہوگی جو اس لکیر سے مخصوص ہے۔ لیکن بالعموم ایسا ہوگا کہ
نمائندہ کسی لکیر پر منطبق نہیں ہوگا۔ اِن حالات میں دائرہ کی قراءت کے لیے
ایک ایسی تدبیر کی ضرورت ہے جس سے لکیروں کی درمیانی جگہ تقسیم ہو سکے۔
یہ اور دیگر اسباب ہیں کہ تعمیمی آلہ کے نمائندہ کی بجائے دائرہ نصف النہار
میں قراءتی خوردبین کا عنکبوتی خط ہوتا ہے۔

خوردبین ایک ثابت سہارے پر لگائی جاتی ہے اور اسے ایسی
سمت میں قائم کیا جاتا ہے کہ اِس کے میدان نظر میں تقسیم شدہ دائرہ کا ایک چھوٹا حصہ
آجاتا ہے (شکل ۱۱۵)۔ عنکبوتی خط ا ب خوردبین کے ماسکہ میں سے تنا ہوا
ہوتا ہے اور اس لیے دو متصلہ لکیروں ت۱ اور ت۲ کے خیال اور ا ب
دونوں صاف طور پر مشاہد کو دکھائی دیتے ہیں جبکہ وہ انہیں خوردبین کے

چشمہ میں سے دیکھتا ہے۔

پیمائش خط ا ب کے ذریعہ عمل میں آتی ہے جسکو احتیاطاً سے بنائے ہوئے ایک پیچ کے ذریعہ جس کا سر اور جہ دار ہوتا ہے خود اُس کے متوازی اور خوردبین کے محور کے عمود وار متحرک کیا جا سکتا ہے۔ ا ب کا محل ایک پیمانہ سے معلوم کیا جاتا ہے جو یہ دکھاتا ہے کہ خوردبینی پیچ کتنی مکمل گردشیں کرچکا ہے اور درجہ دار سرے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ایک گردش کا کتنا کسری حصہ اِن مکمل گردشوں میں جمع کرنا چاہئے جب پیچ کا محل ایسا ہو کہ اس کی قراءت صفر ہے تو یہ سمجھا جا سکتا ہے کہ خط ا ب نے نمائندہ کی جگہ لی ہے۔



شکل (۱۱۵)

اب ہم ا ب کو اس صفری محل سے حرکت دیتے ہیں اور اسے لاکر ت۱ پر منطبق کرتے ہیں جہاں ت۱ > ت۲۔ تب پیمانہ اور پیچ کے سرے کی قراءت سے وہ فاصلہ حاصل ہوگا جو نمائندہ اور ت کے درمیان ہے جہاں اکائی وہ فاصلہ ہے جو ا ب، پیچ کی ایک واحد گردش میں طے کرتا ہے۔ قوس کے ثانیوں میں اس اکائی کی قیمت کو آلہ کے مستقلات میں سے ایک مستقل کے طور پر خوردہ پیما سے معلومہ زاوئی فاصلوں کی پیمائش سے متعین کیا جاتا ہے۔ پس ت۱ سے نمائندہ تک ثانیوں کی تعداد اور ایک ثانیہ کے کسری حصے معلوم ہوتے ہیں۔ انہیں ت۱ کے درجوں اور دقیقوں میں جمع کرنے سے دائرہ کی قراءت ملتی ہے۔ (۴۶۰)

واحد خط ا ب کی بجائے دو متوازی خطوں کو جو باہم قریب ہوں لینے میں فائدہ ہے۔ اس صورت میں آلہ کی قراءت کے لیے اِن دو خطوں کو اس طرح رکھا جاتا ہے کہ لکیر ت متشاکلاً اِن کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

یہ معلوم ہوگا کہ ایک واحد خط کو لکیر پر منطبق کرنے کی بجائے اس لکیر کو دو متوازی خطوں کے درمیان متشاکلاً لانا زیادہ آسان ہے۔

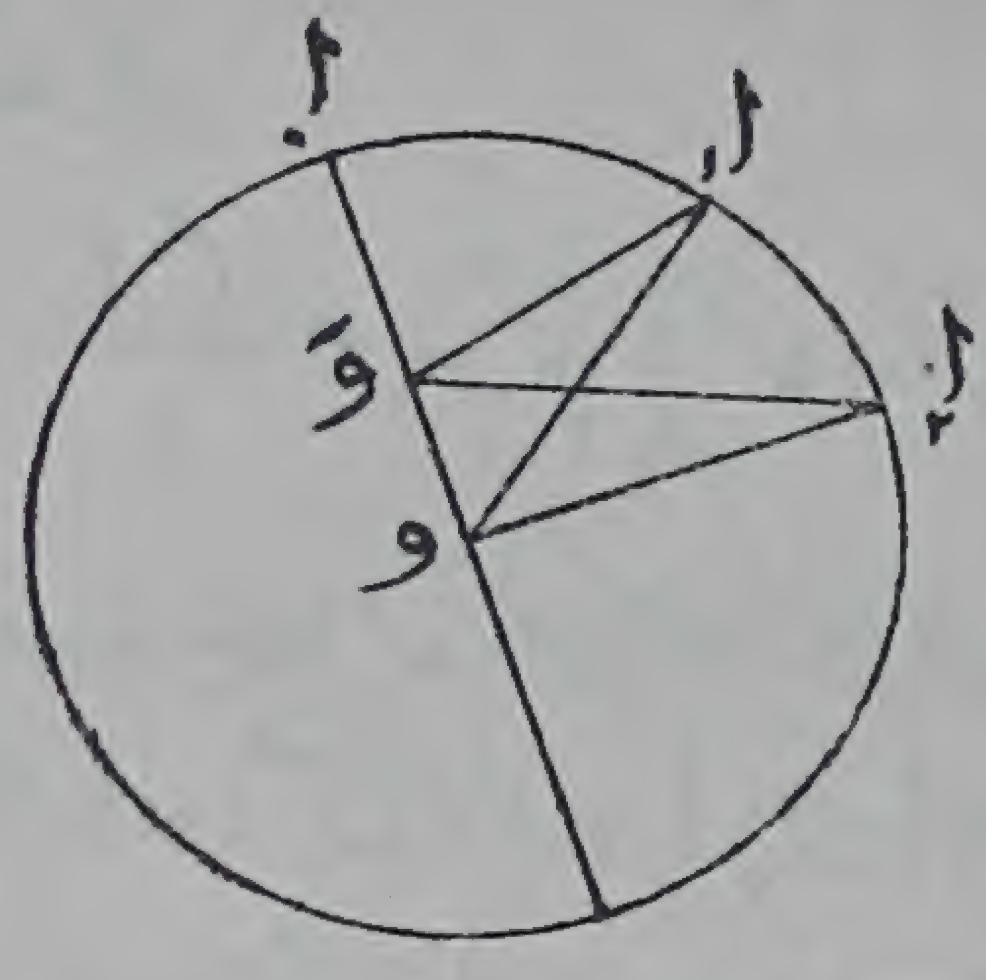
مثال ۱ ـــ ا ب کو ت۱ پر رکھنے سے خوردہ پیما پیچ کی قراءت ن۱ حاصل ہوتی ہے اور ت۲ پر رکھنے سے قراءت ن۲ حاصل ہوتی ہے۔ دائرہ کی قراءت معلوم کرو جبکہ خوردہ پیما پیچ کی قراءت ن ہو۔ یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ دو متصلہ لکیروں کے درمیان وقفہ ۲ = ۱۲۰ً ہے اور یہ کہ پیچ کی قراءت بائیں سے دائیں جانب بڑھتی ہے۔

پیچ کی ایک گردش ثانیوں میں ۱۲۰ً \ (ن۲ - ن۱) کے مماثل ہے اور اسلیے مطلوبہ قراءت ہے

ت۱ + ۱۲۰ً (ن - ن۱) \ (ن۲ - ن۱)

۱۵۴ ـــ درجہ دار دائرہ میں خروج المرکز کی خطا۔

خروج المرکز کی خطا اس طرح پیدا ہوتی ہے کہ مرکز و (شکل ۱۱۶) جس کے گرد دائرہ کو مُقسّم انجن پر (جو درجے کندہ کرنے کا آلہ ہے) رکھ کر گھمایا گیا تھا ٹھیک مرکز وَ پر منطبق نہیں ہوتا جس کے گرد دائرہ فی الواقعی گھومتا ہے جبکہ اُسے ایک دائرہ نصف النہار یا دوسرے ہیئتی آلہ کے جزو کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔



شکل (۱۱۶)

فرض کرو کہ و ا (= ا) دائرہ کا نصف قطر ہے اور و وَ (= م) دائرہ سے ا پر ملتا ہے۔ ہم اس دائرہ پر دو اور نقطے ا۱ اور ا۲ لیتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ ا، ا۱، ا۲ کے متناظر درجے س، س۱، س۲ ہیں۔

فرض کرو کہ اس آلہ کو گردش

دی گئی ہے جس سے وہ خط جو ابتداً وَ ا پر تھا و ا$_۲$ پر آتا ہے تو ا$_۱$ وَ ا$_۲$
وہ زاویہ ہے جس میں سے آلہ فی الواقع گھوم چکا ہے اگرچہ نمائندہ سے
جو قوس دکھائی دیتی ہے وہ

ا$_۱$ ا$_۲$ = ی$_۲$ - ی$_۱$ = زاویہ ا$_۲$ و ا$_۱$

ہے۔ وہ خطا جو خروج المرکز سے پیدا ہوتی ہے اُن زاویوں کا فرق ہے
جو ا$_۱$ ا$_۲$ کے محاذی و اور وَ پر علی الترتیب بنتے ہیں۔ اگر زاویہ ا وَ ا$_۱$ = سا$_۱$ تو
زاویہ وَ ا$_۱$ و = سا$_۱$ - زاویہ ا و ا$_۱$ = سا$_۱$ - ی$_۱$ + ی. اور مثلث
(۴۶۱) و ا$_۱$ وَ سے

ا جب (سا$_۱$ - ی$_۱$ + ی.) = م جب سا$_۱$

لیکن چونکہ م \ ا بہت چھوٹا ہے اِس لیے اس مساوات کو شکل ذیل میں تبدیل
کیا جا سکتا ہے

ا سا$_۱$ = ا (ی$_۱$ - ی.) + م جب (ی$_۱$ - ی.) .... (۱)

اسی طرح اگر زاویہ ا وَ ا$_۲$ = سا$_۲$ تو

ا سا$_۲$ = ا (ی$_۲$ - ی.) + م جب (ی$_۲$ - ی.) .... (۲)

مساوات (۲) میں سے (۱) کو تفریق کریں تو خروج المرکز کی خطا

(∠ا$_۲$ وَ ا$_۱$ - ∠ا$_۲$ و ا$_۱$) = (سا$_۲$ - سا$_۱$ - ی$_۲$ + ی$_۱$)

کے لیے جملہ

$\frac{۲م}{ا}$ جب $\frac{۱}{۲}$ (ی$_۲$ - ی$_۱$) جم $\frac{۱}{۲}$ (ی$_۲$ + ی$_۱$ - ۲ی.)

حاصل ہوتا ہے۔ یہ اُس زاویہ کا دائری ناپ ہے جسے مشاہدہ کردہ زاویہ (ی$_۲$ - ی$_۱$) میں جمع
کرنا ہوگا تاکہ اصلی زاویہ ا$_۲$ وَ ا$_۱$ حاصل ہو۔ خروج المرکز کی تصحیح قوس کے
ثانیوں میں ۲م \ ا جب ۱" سے ہرگز متجاوز نہیں ہو سکتی۔

مثال ۱۔ ہندسی طور پر ثابت کرو کہ وہ زاویہ جس میں سے دائرہ کو گھمایا گیا
ہے قوسوں ا اَ اور ب بَ کا اوسط ہوگا اگر اَ بَ وہ محل ہو جہاں ا ب جو

گردش کے مرکز میں سے گذرتا ہے گردش کے باعث آجاتا ہے۔

مثال ۲۔ خروج المرکز کو چھوٹا تسلیم کر کے ثابت کرو کہ اسکا اثر ان پیمائشوں کے اوسط سے جو دائرہ پر متشاکلاً رکھی ہوئی خوردبینوں کی جفت تعداد سے حاصل ہوں غائب ہو جاتا ہے۔

مثال ۳۔ اگر ایک درجہ دار بڑے دائرہ کا نصف قطر ۰۵۔۴۴ء۴م ہو اور اگر وہ مرکز جس سے درجہ کندہ کئے گئے ہیں اُس مرکز سے جس کے گرد دائرہ گھومتا ہے $\frac{1}{100}$ ملی میٹر کے فاصلہ پر ہو تو ثابت کرو کہ ایک واحد خوردبین کے ذریعہ اُس زاویہ کی حاصل شدہ قراءت جس میں سے دائرہ کو گھمایا جا چکا ہے ۹" تک خطاوار ہو سکتی ہے۔

مثال ۴۔ دائرہ کے کسی محل میں چار خوردبینوں سے جو ایک دوسرے سے علی القوائم رکھی گئی ہیں قراءتیں $ر_1$، $ر_2$، $ر_3$، $ر_4$ حاصل ہوتی ہیں۔ دائرہ کو اب ایک زاویہ طہ میں سے گھمایا گیا ہے جو ۱۸۰° سے بہت قریب ہے اور اب خوردبینوں سے قراءتیں $رَ_1$، $رَ_2$، $رَ_3$، $رَ_4$ حاصل ہوتی ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ نسبت ز جو مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کو نصف قطر سے ہے یعنے نسبت وو\و ا مساوات ذیل سے معلوم ہوتی ہے

$$16\,ز^2 = (ر_1 - رَ_1 - ر_3 + رَ_3)^2 + (ر_2 - رَ_2 - ر_4 + رَ_4)^2$$

مثال ۵۔ قراءتوں کے حسب ذیل زوج ایک دائرہ نصف النہار کی دو خوردبینوں سے لیے گئے ہیں

۲۲° ۱۰' ۹"، ۱۴۰° ۳۹' ۴۴"، ۲۵۰° ۱۴' ۵۱"

۸۲° ۱۴' ۱۳"، ۲۰۱° ۱۰' ۶"، ۳۱۰° ۴۵' ۳"

(۴۶۲) ثابت کرو کہ اگر کور دائری اور صحیح طور پر درجہ دار ہو تو خروج المرکز کی خطا جو ان قراءتوں سے حاصل ہوتی ہے تقریبی طور پر دائرہ کے نصف قطر کی کسر ۰۰۰۱۴۸ء ہے۔

[Math. Trip]

مساوات (۱) کو (۲) میں سے تفریق کرنے پر حاصل ہوتا ہے

$$د(سا_2 - سا_1) = د(ر_2 - ر_1) + م\ جب\ (ر_2 - ب) - م\ جب\ (ر_1 - ب)$$

اگر ہم رکھیں لا = م \ ا قم کا اور ما = م \ ا قط کا تو یہ مساوات لکھی جا سکتی ہے

$$\text{سا}_2 - \text{سا}_1 = \text{کا}_2 - \text{کا}_1 + \text{لا}(\text{جم کا}_1 - \text{جم کا}_2) + \text{ما}(\text{جب کا}_2 - \text{جب کا}_1)$$

جہاں $\text{سا}_1 = \text{اب وَ ا}_1$ اور $\text{سا}_2 = \text{اب وَ ا}_2$ پہلے دو محلوں کے جواب میں ہیں اور

کا_2 اور کا_1 پہلی خوردبین کی قراءتیں ہیں۔ اگر تیسرے محل کے لیے $\text{سا}_3 = \text{اب وَ ا}_3$ تو

$$\text{سا}_3 - \text{سا}_1 = \text{کا}_3 - \text{کا}_1 + \text{لا}(\text{جم کا}_1 - \text{جم کا}_3) + \text{ما}(\text{جب کا}_3 - \text{جب کا}_1)$$

اگر ہم زبر زدہ حروف کَا_1، کَا_2، کَا_3 سے دائرہ کے اِن تین محلوں کیلئے دوسری خوردبین کی قراءتیں تعبیر کریں تو حاصل ہونا چاہئے

$$\text{کا}_2 - \text{کا}_1 + \text{لا}(\text{جم کا}_1 - \text{جم کا}_2) + \text{ما}(\text{جب کا}_2 - \text{جب کا}_1)$$
$$= \text{کَا}_2 - \text{کَا}_1 + \text{لا}(\text{جم کَا}_1 - \text{جم کَا}_2) + \text{ما}(\text{جب کَا}_2 - \text{جب کَا}_1)$$
$$\text{کا}_3 - \text{کا}_1 + \text{لا}(\text{جم کا}_1 - \text{جم کا}_3) + \text{ما}(\text{جب کا}_3 - \text{جب کا}_1)$$
$$= \text{کَا}_3 - \text{کَا}_1 + \text{لا}(\text{جم کَا}_1 - \text{جم کَا}_2) + \text{ما}(\text{جب کَا}_3 - \text{جب کَا}_1)$$

کا_1، کا_2، کا_3، کَا_1، کَا_2، کَا_3 کی بجائے دی ہوئی قراءتیں درج کرنے سے لا اور ما میں دو مساواتیں ملتی ہیں اور مطلوبہ مقدار $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} = \text{م} \backslash \text{ا}$ ہے۔

۱۵۵ — درجہ دار دائرہ میں تقسیم کی خطائیں۔

ہم ابتک یہ تسلیم کرتے آئے ہیں کہ ایک درجہ دار دائرہ پر لکیریں کندہ کرنیکا عمل مطلوبہ مقصد کی تکمیل میں کامیاب ہے یعنے متصلہ لکیروں کے ہر زوج کے درمیان وقفے مساوی ہیں۔ لیکن کامل ترین کاریگری بھی اُس صحت کو نہیں پہنچتی جو مطلوب ہوتی ہے جبکہ علم ہیئت کی زیادہ نازک تحقیقاتیں جاری ہوں۔ متصلہ لکیریں بالکل ٹھیک طور پر متساوی الفصل نہیں ہوتیں اور یہ غور کرنا پڑتا ہے کہ مشاہدوں کی ترکیب کس طرح کرنی چاہئے کہ حتی الامکان "تقسیم کی خطاؤں" کے اثرات زائل ہوں۔ بلا شبہ ایسی خطائیں چھوٹی ہوتی ہیں۔ ہنرمند کاریگر ہر لکیر کی ٹھیک ایسی جگہ مقرر کر سکتا ہے کہ وہ اُس جگہ سے جو لکیر کو اختیار کرنی

چاہیئے ثانیہ کے چند دسویں حصوں سے زیادہ فاصلہ پر نہ ہو لیکن بہترین کام ہیں ایسی خطاؤں کو نظرانداز نہیں کرنا چاہیئے۔

یہ خطائیں دو جماعتوں میں تقسیم ہو سکتی ہیں۔ اول وہ باقاعدہ خطائیں جو کسی نہ کسی قانون کی بموجب ایک لکیر سے دوسری لکیر تک تدریجاً بڑھتی اور گھٹتی ہیں۔ دوم وہ اتفاقی خطائیں جو کسی قانون کی پابندی کرتی نظر نہیں آتیں اور لکیر بہ لکیر بے قاعدہ متغیر ہوتی ہیں۔

(۴۶۳) یہ دوسری جماعت کی خطائیں ایسی ہیں کہ ان کے اثر کو پوری طرح زائل کرنے کا کوئی خاص طریقہ نہیں ہے سوائے اس کے کہ پورے محیط کے گرد الگ الگ ہر لکیر کی خطا عملاً معلوم کیجائے اور اس کے بعد اس خطا کا اطلاق اس لکیر پر جب کبھی وہ استعمال میں آئے التزاماً کیا جائے۔ چونکہ اس میں ہزاروں لکیروں میں سے ہر ایک کے لیے ایک جداگانہ تحقیق کی ضرورت ہے اس لیے یہ کام بہت دشوار ہے اور اس لیے بالعموم اس کی سعی نہیں کیجاتی۔ انفرادی لکیروں کی خطائیں دائرہ کے مختلف حصوں پر آزمائی جاتی ہیں اور اگر وہ چھوٹی معلوم ہوں تو یہ توقع کیجا سکتی ہے کہ متعدد مشاہدوں کے اوسط میں جو مختلف خوردبینوں سے کئے گئے ہوں اتفاقی خطائیں آخری نتیجہ پر قابل قدر اثر نہیں ڈالیں گی۔

دائرہ کی تقسیم میں باقاعدہ خطاؤں کی نسبت یہ کہا جا سکتا ہے کہ آخری نتیجہ سے ان کے اخراج کا یقین زیادہ اطمینان بخش اصول پر مبنی ہے۔ اس جماعت کی خطائیں اس میکانیت سے پیدا ہوتی ہیں جو مُقسِّم انجنوں میں جن سے دائرہ پر لکیریں کندہ کیجاتی ہیں استعمال ہوتی ہے۔ مُقسِّم انجن کے دندانے دار پہیئے بالکل صحیح شکل اور مطلقاً صحیح مرکز کے نہیں ہوتے اور نہ ہو سکتے ہیں۔ لکیروں میں ایسی خطائیں بڑی حد تک دوری سمجھی جا سکتی ہیں کیونکہ جب انجن کے پہیئے گردشوں کی کوئی خاص تعداد کر چکتے ہیں اور کندہ کرنے کا عمل کچھ ختم ہو چکتا ہے تو وہی خطائیں تکرار پاتی ہیں۔ کم از کم یہ ایک خاص سبب ہے جس سے باقاعدہ خطائیں لکیروں کے مقاموں میں پیدا ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ کسی خاص لکیر کی قراءت m ہے اور فرض کرو کہ دائرہ پر اُس نقطہ کی

صحیح قرات جس پر یہ لکیر دراصل واقع ہے را + مف را ہے جہاں مف را ایک چھوٹی مقدار ہے۔ پس مف را اِس لکیر کی خطا ہے۔ ہم مان لیں گے کہ مف را حسب ذیل شکل کے ایک جملہ سے تعبیر ہو سکتا ہے

مف را = ا۰ + ا۱ جم را + ا۲ جم ۲ را + ...
+ ب۱ جب را + ب۲ جب ۲ را + ... (۱)

جہاں ا۰، ا۱، ا۲ ...، ب۱، ب۲، ... مستقلات ہیں جن کی قیمتیں درجہ بندی کی انفرادی خصوصیتوں پر منحصر ہوتی ہیں۔

اِس مفروض کے صحیح ہونیکی وجہ یہ ہے کہ را اور را + ۳۶۰° بلاشبہ صرف ایک ہی قرات کو ظاہر کرتے ہیں اور اس لیے جس وقت مف را کو را کی رقوم میں بیان کیا جائے تو جملہ بالا کو غیر متغیر رہنا چاہئے اگر را کو را + ۳۶۰° میں بدل دیا جائے۔ یہ شرط صریحاً پوری ہوتی ہے اگر مف را کی شکل (۱) جیسی ہو۔

یہ امر قابل غور ہے کہ سلسلہ کی رقموں کی تعداد کی ضروری حد مقرر کرنے میں
(۴۶۴) ہم نے یہ مان لیا ہے کہ پورے محیط کے گرد خطاؤں کے تسلسل میں کوئی بڑا رخنہ نہیں ہے۔ ہم فی الواقع یہ تسلیم کرتے ہیں کہ محیط کے گرد مختلف نقطوں پر کی خطاؤں میں تبدیلیاں بہت بے ڈھنگی واقع نہیں ہوتیں اور بلاشبہ بہت احتیاط سے لکیروں کو کندہ کرنے میں یہ صورت پیدا ہو گی۔ عدم تسلسل ہمارے مفروض سے خارج ہے اور ا۱، ا۲، ...، ب۱، ب۲، ... میں سے ہر ایک محدود ہے اور اِن کی تعداد چھوٹی ہے۔

ہم مندرجہ بالا بیان کی توضیح حسب ذیل کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ مُقَسِّم انجن ۰° ۰′ سے ابتدا کرتا ہے اور محیط کے گرد لکیریں کندہ کرنے میں وہ ہر لکیر کو اِسکے پہلے کی لکیر سے ایک ثانیہ کا سواں حصہ زیادہ دُور بالالتزام کندہ کرتا ہے لیکن کوئی اور خطا نہیں کرتا۔ یہ خطا جمع ہو گی اور لکیر ۳۵۹° ۵۵′ میں ۱۹ء۳″ کی خطا ہو گی لیکن اِسکے بعد کی لکیر یعنی ۰° ۰′ کی خطا صفر ہو گی۔ اِس ایک مقام پر دو متصلہ خطاؤں کا فرق ۱۹ء۳″ ہو گا لیکن باقی سب صورتوں میں یہ فرق صرف

۱۰۱: ہے۔ یہ عدم تسلسل کی ایک صورت ہے۔ خطاؤں کی کسی ایسی ترتیب کو یا کوئی اور ترتیب کو جس میں عدم تسلسل اس سے بھی زیادہ بڑا ہو اُس قسم کے ایک سلسلہ سے بیان کیا جا سکتا ہے جو اوپر درج ہے اگر ہم مف ر کے سلسلہ میں رقموں کی ایک بڑی تعداد لے سکیں لیکن اگر صرف چند رقموں کی قید ہو تو محولہ بالا ترتیب سے مف ر ٹھیک طور پر تعبیر نہ ہو سکے گا۔ آیندہ بیان میں ہم یہ مان لینگے کہ مف ر کے جملہ میں رقموں کی ایک چھوٹی تعداد فی الواقع کسی مخصوص دائرہ کی خطاؤں کو تعبیر کرتی ہے۔

فرض کرو کہ ن خوردبینیں ہیں جو دائرہ کے گرد متساوی فاصلوں پر لگی ہیں اور کسی خاص محل میں دائرہ کی متناظر قرائتیں ر$_۱$، ر$_۲$، ... ر$_ن$ ہیں۔ فرض کرو کہ اب دائرہ کو زاویہ لہ میں سے گھمایا گیا ہے اور فرض کرو کہ قرائتیں اب رَ$_۱$، رَ$_۲$، ... رَ$_ن$ ہیں۔ اگر آلہ نظری طور پر کامل ہوتا تو بلاشبہ حاصل ہوتا

ر$_۱$ - رَ$_۱$ = ر$_۲$ - رَ$_۲$ = ... = ر$_ن$ - رَ$_ن$ = لہ

لیکن چونکہ ایسا نہیں ہے کیونکہ تقسیم کی خطائیں اور دوسری خطائیں (مثلاً خروج المرکز کی خطا جس پر ہم غور کر چکے ہیں) داخل ہوتی ہیں اس لیے یہ مقداریں سب کی سب مساوی نہیں ہونگی اور ہم لہ کی بجائے اُن تمام مختلف مقداروں (ر$_۱$ - رَ$_۱$)، (ر$_۲$ - رَ$_۲$)، ... کا اوسط لیتے ہیں جو ہر خوردبین سے جداگانہ حاصل ہوتی ہیں۔

اگر دو خوردبینوں کے درمیان تقریباً زاویہ طہ ہو تو ن طہ = ۳۶۰°۔ پہلی خوردبین کی قرارت ر$_۱$ جبکہ اِسے مف ر جمع کرنے کے بعد صحیح کر لیا گیا ہو حسب ذیل ہوگی

ر$_۱$ + ا$_۰$ + ا$_۱$ جم ر$_۱$ + ا$_۲$ جم ۲ ر$_۱$ + ...

+ ب$_۱$ جب ر$_۱$ + ب$_۲$ جب ۲ ر$_۱$ + ...

اسی طرح دوسری خوردبین کی تصحیح یافتہ قرارت

ر$_۲$ + ا$_۰$ + ا$_۱$ جم (ر$_۱$ + طہ) + ا$_۲$ جم (۲ ر$_۱$ + ۲ طہ) + ... (۴۶۵)

+ ب۱ جب (ک۱ + ط) + ب۲ جب (۲ ک۱ + ۲ ط) + ...

حاصل ہوگی اور علیٰ ہذا ن ویں خوردبین کی تصحیح یافتہ قراءت

کن + ا۰ + ا۱ جم { ک۱ + (ن - ۱) ط } + ا۲ جم { ۲ ک۱ + ۲ (ن - ۱) ط } ....

+ ب۱ جب { ک۱ + (ن - ۱) ط } + ب۲ جب { ۲ ک۱ + ۲ (ن - ۱) ط } .....

ہوگی - چونکہ خوردبینیں متشاکلاً رکھی گئی ہیں اس لیے انکی ن قراءتوں کا مجموعہ بڑی حد تک مختصر ہو سکتا ہے - اس مجموعہ میں اک کا سر

جم ک ک۱ + جم (ک ک۱ + ک ط) + ... + جم { ک ک۱ + (ن - ۱) ک ط } ... (۱)

ہے جس کو شکل

پ جم (ک ک۱ + ص) .... (۲)

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں پ اور ص، ک۱ پر منحصر نہیں ہیں اور مساواتوں

پ جم ص = ۱ + جم ک ط + جم ۲ ک ط + ... + جم (ن - ۱) ک ط،

پ جب ص = جب ک ط + جب ۲ ک ط + ... + جب (ن - ۱) ک ط

سے حاصل ہوتے ہیں -

لیکن (۱) غیر متغیر رہتا ہے اگر ک۱ کو ک۱ + ط میں تبدیل کیا جائے کیونکہ یہ عمل صرف پہلی رقم کو دوسری رقم میں، دوسری کو تیسری میں، علیٰ ہذا القیاس تبدیل کرتا ہے اور چونکہ ن ط = ۳۶۰° اس لیے آخری رقم بھی پہلی رقم میں تبدیل ہوتی ہے - پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۲) غیر متغیر رہنا چاہیئے اگر ک۱ کو ک۱ + ط میں تبدیل کیا جائے، اس لیے

پ جم (ک ک۱ + ص) = پ جم (ک ک۱ + ص + ک ط)

یہ ک۱ کی سب قیمتوں کے لیے درست ہونا چاہیئے اور اسلیے یہ درست ہے جبکہ

ک ک۱ + ص = ۰

اور اس صورت میں

پ = پ جم ک طہ

یہ مساوات صرف اس وقت پوری ہو سکتی ہے جبکہ پ کو صفر کے مساوی کیا جائے اِلّا آنکہ ک طہ، ۲ π کا صحیح عددی ضعف ہو اور ایسی صورت میں سلسلہ ن جم ک ر۱ میں تحویل ہو گا — یہی استدلال ن تصحیح یافتہ قراتوں کے مجموعہ میں ب کے سر پر اطلاق پذیر ہے۔ پس ن خوردبینوں کی تصحیح یافتہ قراتوں کے اوسط سے تمام رقمیں غائب ہو جاتی ہیں سوائے اُن کے جن میں ک، ن کا ایک صحیح عددی ضعف ہے اور اس لیے صرف ذیل کی رقمیں باقی رہ جاتی ہیں :-

(ر۱ + ر۲ + ... + رن) | ن + ا.

+ ان جم ن ر۱ + ا۲ن جم ۲ ن ر۱ ....

+ بن جب ن ر۱ + ب۲ن جب ۲ ن ر۱ ....

اب فرض کرو کہ دائرہ کو ایک مختلف محل میں گھمایا گیا ہے اور قراتیں (۴۲۶)
رَ۱، رَ۲، رَ۳، .... ہیں۔ زاویہ لہ جس میں سے دائرہ کو گھمایا جا چکا ہے اِن دو محلوں میں ن قراتوں کا اوسط ہے جیسا کہ بیان کیا جا چکا ہے۔ ہم تمثیلاً سب سے زیادہ عام صورت چار خوردبینوں کی لیتے ہیں۔ اس صورت میں اگر ک ≯ ۱۱ تو حاصل ہوتا ہے

لہ = ۱/۴ (ر۱ + ر۲ + ر۳ + ر۴) - ۱/۴ (رَ۱ + رَ۲ + رَ۳ + رَ۴)

+ ا۴ (جم ۴ ر۱ - جم ۴ رَ۱) + ا۸ (جم ۸ ر۱ - جم ۸ رَ۱)

+ ب۴ (جب ۴ ر۱ - جب ۴ رَ۱) + ب۸ (جب ۸ ر۱ - جب ۸ رَ۱)

یہ قابلِ توجہ ہے کہ ا۱، ا۲، ا۳، ب۱، ب۲، ب۳ اس ضابطہ سے غائب ہو چکے ہیں لیکن وہ رقمیں جو اِن مقداروں کے متناظر ہیں مف ر کے جملہ میں اہم ترین ہیں۔ اِن رقموں میں تقسیم کی باقاعدہ خطاؤں کے بہت سے

اثرات اور خروج المرکز کی خطا کے تمام اثرات جیسا کہ ثابت کیا جاچکا ہے شامل ہوں گے۔ اس طرح چار متساوی الفصل خوردبینوں سے قراءتیں لیکر له کی قیمت اس طرح معلوم کیجا سکتی ہے کہ وہ درجہ دار دائرہ کی خاص خطاؤں سے پاک ہو۔

ایک ایسی صورت کا مشاہدہ کرکے جس میں له معلوم ہو ا، ب، اَ، بَ میں ایک خطی مساوات حاصل کیجا سکتی ہے۔ دیگر مشابہ مشاہدوں سے مزید مساواتیں حاصل ہونگی۔ ایسی بہت سی مساواتوں سے ا، ب، اَ، بَ اقل مربعوں کے طریقوں سے معلوم کئے جا سکتے ہیں۔ بالعموم یہ کہا جا سکتا ہے کہ یہ چار مقداریں اس قدر چھوٹی ہیں کہ ان پر توجہ کرنے کی ضرورت نہیں۔ مثلاً وہ زاویہ معلوم کرنے میں جس میں سے دائرہ کو گھمایا گیا ہے ہم صرف حسب ذیل ضابطہ استعمال کرتے ہیں

$$له = \frac{1}{4}(ر_1 + ر_2 + ر_3 + ر_4) - \frac{1}{4}(رَ_1 + رَ_2 + رَ_3 + رَ_4)$$

بالآخر قراءتی خوردبینوں کی ایک جفت تعداد لینے کے لیے جبکہ خوردبینوں کو ایک درجہ دار دائرہ کے گرد متشاکلاً رکھا گیا ہو حسب ذیل وجوہ ہیں:۔

(۱) ایک قطر کے سروں پر اور علیٰ ہذا متعدد قطروں کے سروں پر دو خوردبینوں کی قراءتوں کا اوسط لیکر ہم خروج المرکز کے اثرات ساقط کرتے ہیں۔

(۲) ۹۰° کے فاصلوں پر رکھی ہوئی چار خوردبینوں کی قراءتوں کا اوسط لیکر ہم تقسیم کی خطاؤں کا بڑا حصہ ساقط کرتے ہیں۔

۱۵۶ ــ آلہ مرور اور دائرہ نصف النہار۔

دفعہ ۱۵۲ میں یہ بیان کیا جاچکا ہے کہ تعمیمی آلہ کے نظریہ میں بہت سی دوسری خاص صورتوں میں سے اس آلہ کا نظریہ بھی شامل ہے جو دائرہ نصف النہار یا دائرہ مرور کے طور پر موسوم ہے جس کے ذریعہ راسی فاصلے اور مرور مشاہدہ کئے جا سکتے ہیں۔ دائرہ نصف النہار کی اہمیت اس وجہ سے کہ وہ ہیئتی رصدگاہ کا ایک بنیادی آلہ ہے اسقدر بڑی ہے کہ اس کے نظریہ کی تحقیق ایک دوسرے (۴۶۷)

اور راست طریقہ سے کرنا مفید ہوگا۔

دائرہ نصف النہار کے عام بیان کا خلاصہ اختصاراً حسب ذیل ہے۔

ایک درجہ دار دائرہ کو ایک محور ا پر جو دائرہ کے مرکز میں سے گذرتا ہے اور اس کے مستوی پر عمود ہوتا ہے اُستوار طریقہ سے نصب کیا جاتا ہے۔ ایک دوربین بھی جس کا مناظری محور ا پر عمود ہوتا ہے اور اس لیے درجہ دار دائرہ کے متوازی ہوتا ہے ا کے ساتھ اُستوار طور پر نصب کی جاتی ہے۔ چنانچہ جب ا حرکت کرتا ہے تو درجہ دار دائرہ اور دوربین بھی اس کے ساتھ ایک جسم کے طور پر حرکت کرتے ہیں۔ محور ا افقاً لگایا جاتا ہے اور اس کے سرے ٹیکنوں میں ختم ہوتے ہیں جو سہاروں میں ٹکے ہوئے ہوتے ہیں اور ایک ٹیکن مشرق کی جانب ہوتی ہے اور دوسری مغرب کی جانب۔

اس جماعت کے بعض آلات میں یہ انتظام ہوتا ہے کہ آلہ کو اس کے سہاروں پر سے اٹھا لینے کے بعد اُسے افقی مستوی میں ۱۸۰° میں سے گھمایا جا سکتا ہے اور پھر اُسکو اس طرح رکھا جا سکتا ہے کہ وہ ٹیکن جو ابتداً مشرق کی جانب تھی مغرب میں آجاتی ہے اور اِس کے برعکس۔ اس لیے ایسے آلات میں درجہ دار دائرہ کا شطب مشرق کی جانب یا مغرب کی جانب ٹیکنوں کے محلوں کی بموجب پھیرا جا سکتا ہے۔

یہ ذہن نشین رہے کہ آلہ خواہ اُس محل میں ہو جس میں شطب شرقاً ہو یا اُس محل میں جس میں وہ غرباً ہو ہر صورت میں درجہ دار دائرہ اور دوربین کا مناظری محور دونوں نصف النہار کے مستوی کے متوازی ہوں گے اگر آلہ کی ساخت اور اس کے اجزاء کی تنصیب بالکل درست ہو۔

دوربین کے دہانہ کے ماسکہ کے مستوی میں دو عنکبوتی[۱] خطوط دوربین کے علی القوائم ہوتے ہیں۔ اِن میں سے ایک اُس محور کے متوازی ہوتا ہے جسکے

---

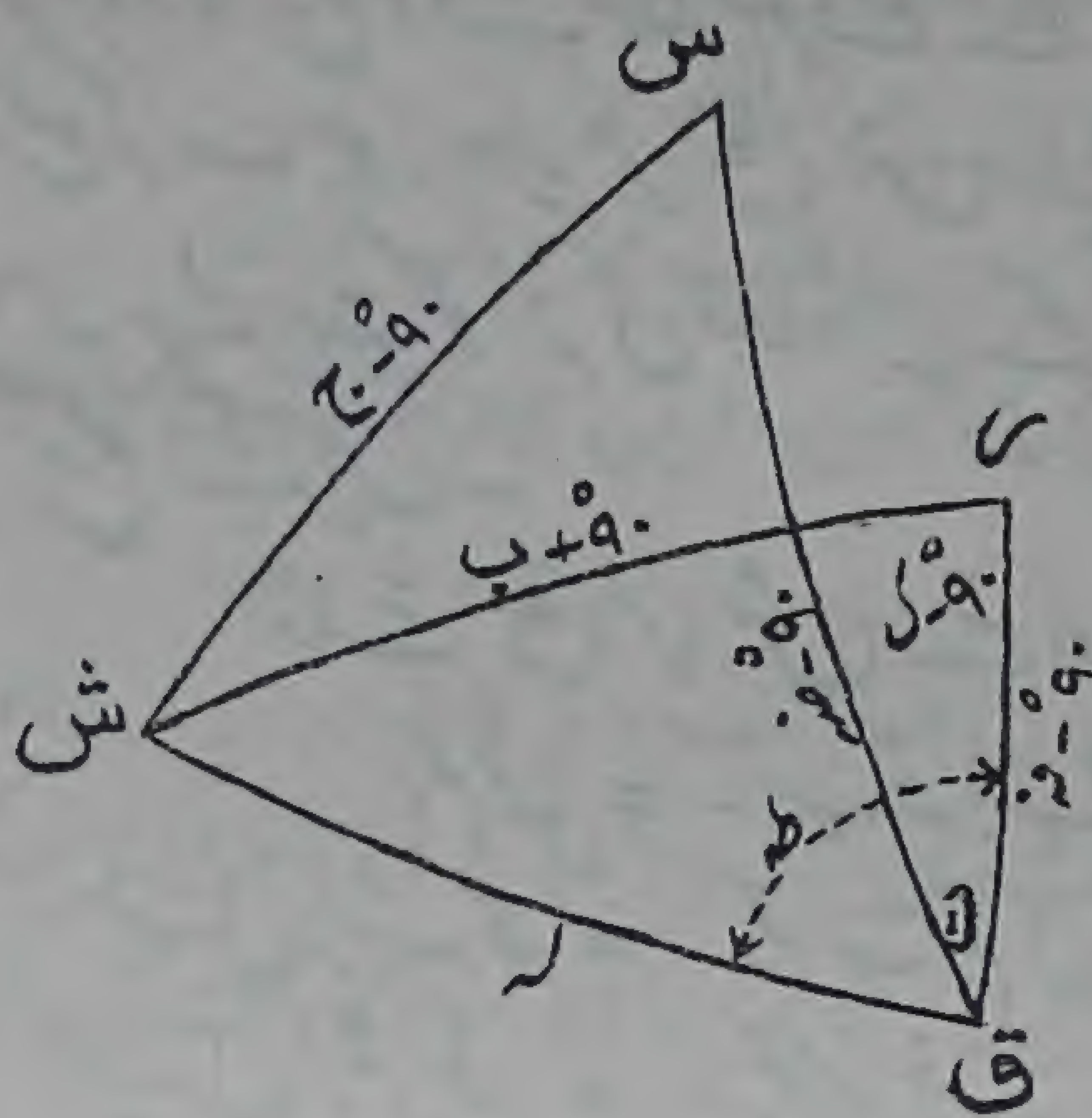
[۱] اصلی دائرہ نصف النہار میں عام طور پر متعدد ثابت نصف النہاری تار ہوتے ہیں اور واحد افقی تار کی بجائے دو متوازی تار باہم قریب ہوتے ہیں۔

گرد دوربین گھومتی ہے، اِسے افقی تار کہتے ہیں۔ دوسرا اِس افقی تار کے عمود وار ہوتا ہے، اِسے نصف النہاری تار کہتے ہیں۔ جب کسی ستارہ کا خیال نصف النہاری تار پر ہو تو وہ مرور کی حالت میں ہوتا ہے۔ اِن تاروں کے نقطہ تقاطع سے دہانہ کے مرکز تک جو خط کھینچا جائے وہ آلہ کا مناظری محور ہے۔ جب یہ کہا جائے کہ دوربین ایک ستارہ پر لگائی گئی ہے تو اس کا یہ مطلب ہوگا کہ ستارہ کا خیال اِن تاروں کے نقطہ تقاطع پر منطبق ہے، یہ کہنا ایسا ہی ہے کہ دوربین کے مناظری محور کو ستارہ کی جانب قائم کیا گیا ہے۔ (۴۶۸)

دائرہ نصف النہار سے مشاہدہ کرنے کا مقصد یہ ہوتا ہے کہ کسی ستارہ یا دوسرے جرم فلکی کا صعود مستقیم اور میل دونوں معلوم ہوں۔ صعود مستقیم کو کبھی گھڑی میں وہ وقت دیکھنے سے حاصل ہوتا ہے جبکہ ستارہ نصف النہار کو عبور کرتا ہے۔ اگر گھڑی صحیح ہے تو یہ وقت ستارہ کا صعود مستقیم ہے۔ جہاں تک اِس عنصر کی تعیین کا تعلق ہے دائرہ نصف النہار آلہ مرور کا کام کرتا ہے اور درجہ دار دائرہ سے کوئی واسطہ نہیں رہتا۔ ستارہ کا میل اس کے راسی فاصلہ سے حاصل ہوتا ہے جو درجہ دار دائرہ کے ذریعہ مرور کے لمحہ پر مشاہدہ کیا جاتا ہے۔

دائرہ نصف النہار کی وہ شرطیں جو یہاں بیان کی گئی ہیں اصلی آلات میں بلاشبہ صرف تقریبی طور پر پوری ہوتی ہیں۔ چنانچہ سب سے پہلے محور ابالکل افقی نہیں ہوگا اور ہم مان لیں گے کہ کرہ سماوی پر کا وہ نقطہ جو درجہ دار دائرہ کے شطب سے ظاہر ہوتا ہے مشرقی السمت 90°-ک اور فاصلہ راس 90°+ب رکھتا ہے جہاں ب اور ک دونوں چھوٹی مقداریں ہیں۔ دوربین کا محور بلاشبہ صرف تقریبی طور پر محور ا کے علی القوائم ہوتا ہے۔ ہم فرض کرینگے کہ وہ کرہ سماوی کے اُس نقطہ کی جانب ہے جو دائرہ کے شطب سے 90°-ج فاصلہ پر ہے۔ چھوٹی مقداروں ک، ب، ج کو علی الترتیب السمت کی، ہمواری کی، اور توازی گری کی خطائیں کہتے ہیں۔ اگر آلہ اور اس کی تنصیب کامل صحیح ہوتی تو یہ سب مقداریں صفر ہوتیں لیکن عملاً وہ صفر نہیں ہوتیں اور ایک دن سے دوسرے دن تک مستقل بھی نہیں رہتیں۔ جب کبھی آلہ استعمال کیا جاتا ہے تو

اُن کو معلوم کرنا پڑتا ہے۔ اِس لیے اُن کی تعیین کے طریقے آگے چلکر بیان کئے جائیں گے۔ جب ک، ب، ج معلوم ہوں تو ہم مرور کے مشاہدہ کردہ وقت کی تصحیح کرسکتے ہیں اور اِس طرح یہ معلوم کرسکتے ہیں کہ اصلی نصف النہار پر دراصل کس وقت مرور واقع ہوا۔



شکل (۱۱۷)

شکل ۱۱۷ میں شمالی قطب سماوی ق ہے، راس ر ہے، اور درجہ دار دائرہ کا شطب ش ہے۔ ب اور ک کی تعریفوں کی بموجب جو اوپر دی جا چکی ہیں ش ر = ۹۰° + ب، ق ر = ۹۰° - فہ، اور زاویہ ق ر ش = ۹۰° - ک، اِس لیے جب ق اور ر معلوم ہوں تو مقداروں ب اور ک سے شطب کے محل کی تشخیص ہوگی۔ (۴۶۶)

فرض کرو کہ میل ضہ کا ستارہ س ہے تو ق س = ۹۰° - ضہ اور جس وقت س دوربین کے بیلیائی تاروں پر ہو یعنی مشاہدہ کے لمحہ پر تو ش س = ۹۰° - ج۔

قاعدہ ش ق ثابت ہے اور طول ش س اور ق س دونو دیے گئے ہیں، اس لیے س کے دو ممکن محل ہو سکتے ہیں۔ یہ محل علی الترتیب ستارہ کے اوپر کے اور نیچے کے تکبدُ کے متناظر ہیں (دفعہ ۲۹)۔ موجودہ صورت میں ہم صرف اوپر کے تکبدُ سے بحث کریں گے اور چونکہ مشاہد کو شمالی نیم کرہ ارض میں فرض کیا گیا ہے نقطہ س حسب شکل (۱۱۷) ر کی جانب ہوگا۔

اگر ب = ج = ک = ۰ تو س، ر اور ق میں سے گذرنیوالے بڑے دائرہ پر واقع ہوگا یعنی نصف النہار پر۔ لیکن اگر ب، ج، ک صفر سے مختلف ہوں تو زاویہ س ق ر بالعموم صفر نہیں ہوگا اور اِس لیے اُس

لمحہ پر جبکہ آلہ میں ستارہ نصف النہار پر نظر آتا ہے فی الحقیقت وہ ابھی مشرقی ساعتی زاویہ ر ق س پر ہوتا ہے۔ پس اگر مشاہد اپنی گھڑی سے وہ وقت دیکھتا ہے جبکہ ستارہ اس کی دوربین میں چلیپائی تاروں پر ہے تو اُسے چاہئے کہ مرور کا صحیح وقت معلوم کرنے کے لیے مشاہدہ کردہ وقت میں مقدار ت جمع کرے جو زاویہ ر ق س ہے جس کو وقت میں تبدیل کیا گیا ہے۔ اس لیے ت کو آلہ کی خطاؤں کے لیے مرور کے مشاہدہ کردہ وقت کی تصحیح کہتے ہیں۔

مثلث ق ر ش سے اور ق ش = ل رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

جم ل = ۔جب فہ جب ب + جم فہ جم ب جب ک،

جب ل جب طہ = جم ب جم ک،

جب ل جم طہ = ۔جم فہ جب ب ۔ جب فہ جم ب جب ک

اور مثلث ق س ش سے

جب ج = جم ل جب ضہ + جب ل جم ضہ جم (طہ ۔ ت)...... (۱)

ل اور طہ کو ساقط کرنے سے ت کے لیے بنیادی مساوات ملتی ہے

جب ج + جب فہ جب ب جب ضہ ۔ جم فہ جم ب جب ک جب ضہ

۔ جم ب جم ک جم ضہ جب ت + (جم فہ جب ب

+ جب فہ جم ب جب ک) جم ضہ جم ت = ۰

اِس عام مساوات کا اطلاق دائرہ نصف النہار پر کرنے کے لیے جبکہ اُسے اوپر کے تکبُد پر ایک ستارہ کے مشاہدہ کے لیے استعمال کیا گیا ہو ہم ت، ب، ک، ج کو اسقدر چھوٹا بناتے ہیں کہ اُن کے مربع اور حاصل ضرب نظر انداز ہو سکیں اور اس لیے مساوات بالا لکھی جا سکتی ہے

ت جم ضہ = ج + ب جم (فہ ۔ ضہ) + ک جب (فہ ۔ ضہ)

اس لیے

ت = ب جم (فہ ۔ ضہ) قط ضہ + ک جب (فہ ۔ ضہ) قط ضہ + ج قط ضہ

(۲)..........

(۴۷۰) یہ ضابطہ نصف النہار کے مشاہدوں کو تحویل کرنیکے لیے بنیادی ضابطہ ہے۔ مقدار ت وہ تصحیح ہے جو مرور کے مشاہدہ کردہ کو کبی وقت میں اصلی کو کبی وقت حاصل کرنے کے لیے جمع کرنی ہوگی ۔ ت کے اِس جملہ کو بالعموم "میئر کا ضابطہ" کہتے ہیں۔ اس کا استحالہ مختلف طریقوں سے ہو سکتا ہے ۔ مثلاً بیسل نے دو نئی مقداریں م اور ن داخل کی ہیں جو مساواتوں

م = ب جم فہ + ک جب فہ، ن = ب جب فہ - ک جم فہ

سے متعین ہوتی ہیں اور اس طرح اُس نے حسب ذیل سہولت بخش ضابطہ حاصل کیا ہے

ت = م + ن مس ضہ + ج قط ضہ . . . . (۳)

مقداریں م اور ن، ہمواری کی، السمت کی، اور ارتفاع کی خطاؤں کے تفاعل ہیں اور وہ ستارہ پر منحصر نہیں ہیں۔ ہم آسانی سے دیکھتے ہیں کہ م = ط - ۹۰° اور ن = ل - ۹۰°۔ (دیکھو شکل ۱۱۷)

ایک دوسری مثال "ہیانسن" کا ضابطہ ہے - یہ ضابطہ اوپر کے ضابطہ میں م کی بجائے اس کی قیمت ب قط فہ - ن مس فہ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے چنانچہ اس تبدیلی سے ضابطہ (۳) ہو جاتا ہے

ت = ب قط فہ + ن (مس ضہ - مس فہ) + ج قط ضہ . . . . . . (۴)

اِن میں سے کسی ضابطہ سے ہم وہ تصحیح حاصل کر سکتے ہیں جو مرور کے مشاہدہ کردہ وقت پر عائد کرنی ہوگی تاکہ اصلی نصف النہار پر مرور کا وقت حاصل ہو۔

۱۵۷ — خطائے توازی گری کی تعیین ۔

مقدار ج جو دائرہ نصف النہار میں یا آلہ مرور کی کسی شکل میں خطائے توازی گری کے طور پر معروف ہے اُن دوربینوں کی مدد سے متعین ہو سکتی ہے جو توازی گر دوربینیں کہلاتی ہیں۔ اِن کے استعمال کا طریقہ اب ہم بیان کریں گے ۔

دائرہ نصف النہار کی دوربین کے ماسکہ میں ایک فریم ہوتا ہے جس میں ایک خط (تار کی شکل میں) لگا ہوا ہوتا ہے۔ یہ خط ثابت نصف النہاری خط پر منطبق ہوتا ہے لیکن اُس کو نصف النہاری خط کے متوازی اُس مستوی میں متحرک کیا جا سکتا ہے جو دوربین کے مناظری محور پر عمود ہے۔ یہ حرکت ایک خوردہ پیما پیچ کے ذریعہ جس کا سر درجہ دار ہوتا ہے عمل میں لائی جاتی ہے اور اس طرح گردشوں کی تعداد اور ایک گردش کے کسری حصے شمار کرکے وہ فاصلہ ٹھیک ٹھیک معلوم کرلیا جاتا ہے جس میں سے حرکت پذیر تار ثابت تار سے ہٹ چکا ہے۔ ہم پہلے یہ دکھائیں گے کہ اِس ترکیب سے کس طرح خطائے توازی گری متعین ہوسکتی ہے اگر ہم سماوات پر دو متقاطر نقطے مشاہدہ کرسکیں۔

اگر کرہ سماوی پر کے ایک نقطہ کا ساعتی زاویہ اور میل ت اور (۴۷۱)
ضہ ہوں تو ضابطہ (۱) سے حاصل ہوتا ہے

جب ج = جم ل جب ضہ + جب ل جم ضہ جم (طہ - ت)

چونکہ ج، ل، طہ، آلہ سے متعلق مستقل مقداریں ہیں اس لیے یہ ظاہر ہے کہ یہ مساوات قیمتوں ت، ضہ کے ایک دیے ہوئے زوج سے بالعموم پوری نہیں ہوگی۔ اس کا مطلب اس صریح واقعہ سے زیادہ نہیں ہے کہ چونکہ دائرہ نصف النہار آزادی کا صرف ایک درجہ رکھتا ہے یعنی وہ صرف ایک واحد محور کے گرد گردش کرسکتا ہے اس لیے اس کی دوربین کو کرہ سماوی کے کسی نقطہ کی جانب نہیں لگایا جا سکتا سوائے اُن نقطوں کے جو ایک خاص دائرہ ج پر واقع ہیں۔ لیکن اگر ہم آلہ کو آزادی کا ایک دوسرا درجہ دیں تو دوربین کو بعض حدود کے اندر جو ہمارے مقصد کے لیے بالکل تنگ حدود ہیں ج کے محیط کے قریب کسی نقطہ کی جانب لگایا جا سکتا ہے۔

آزادی کا یہ دوسرا درجہ اُس حرکت پذیر تار سے حاصل ہوتا ہے جو ہم نے ابھی بیان کیا ہے۔ اِس تار کو ثابت تار سے فاصلہ لا تک

متحرک کرنے سے اور یہ تار اپنے نئے محل میں افقی تار کو جہاں قطع کرتا ہے اُسے دُوربین کا خط توازی گری سمجھنے سے خطائے توازی گری ج + لا۱ حاصل ہوتی ہے اور اسلیے مساوات (۱) ہو جاتی ہے

جب (ج + لا۱) = جم ل جب ضہ + جب ل جم ضہ جم (طہ - ت)

مقدار لا۱ اِس طرح متعین ہوتی ہے کہ حرکت پذیر تار کو پیچ کے ذریعہ اتنی حرکت دیجائے کہ دوربین کا محور نقطہ پ کی جانب جس کے محدد ت، ضہ ہیں قائم کیا جا سکے۔

اب فرض کرو کہ دوربین کو سماوی نقطہ پَ کی جانب لگایا گیا ہے جس کے محدد (ت + ۱۸۰°)، ضہ ہیں یعنے یہ نقطہ پ سے ۱۸۰° کے فاصلہ پر ہے۔ پھر فرض کرو کہ حرکت پذیر تار کو فاصلہ لا۲ پر لایا گیا ہے اور اس طرح پَ حرکت پذیر تار اور ثابت افقی تار کے تقاطع پر واقع ہے تو حاصل ہوگا

جب (ج + لا۲) = - جم ل جب ضہ - جب ل جم ضہ جم (طہ - ت)

یا جب (ج + لا۱) + جب (ج + لا۲) = ۰

لیکن چونکہ مقداریں ج، لا۱، لا۲ سب کی سب چھوٹی ہیں اس لیے

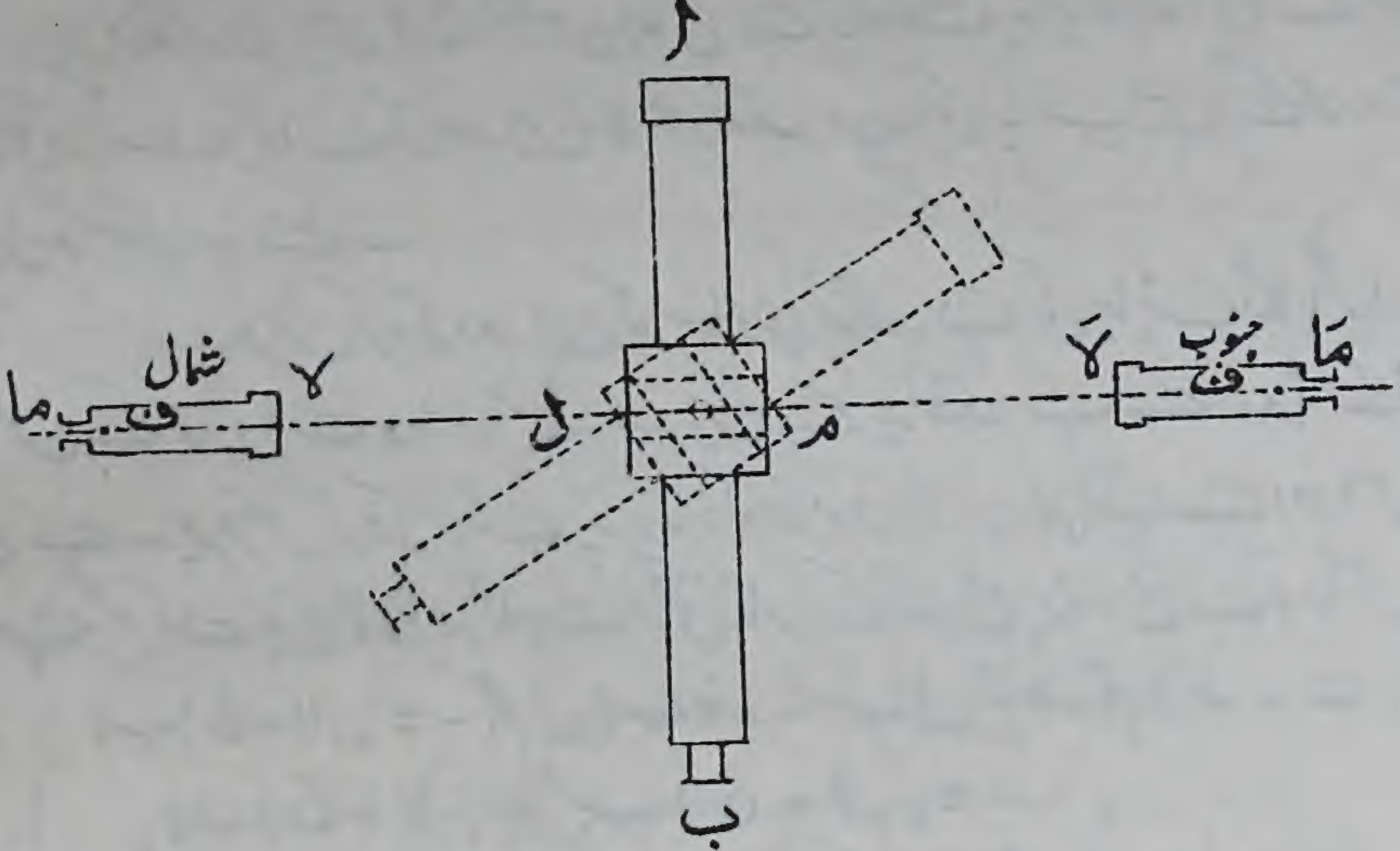
ج + لا۱ + ج + لا۲ = ۰

یا ج = - ۱/۲ (لا۱ + لا۲)

پس ج، مشاہدہ کردہ مقداروں لا۱ اور لا۲ کی رقوم میں معلوم ہو گیا

اِس عمل کے اطلاق میں ہم توازی گرد دوربینوں کے ذریعہ متقاطر نقطوں کا ایک زوج حاصل کرتے ہیں۔ وہ اصول جو اس عمل میں شامل ہے ہیئتی آلات کے نظریہ میں بڑی اہمیت رکھتا ہے۔ اس اصول کی توضیح (۴۷۲)
شکل ذیل میں کی گئی ہے۔ آلہ مرور یا دائرہ نصف النہار کی دُوربین اب ہے جس کے مرکزی مکعب میں ایک اسطوانی سوراخ ل م ہے جس کا محور لا لا ہے جبکہ دوربین انتصابی محل اب میں ہوتی ہے۔ وہ محور جس کے گرد آلہ مرور خود گردش کرتا ہے کاغذ کے مستوی پر عمود ہے اور مغربی سرے پر کا ٹیکن شکل میں دکھایا گیا ہے اور آلہ اپنی گردش میں جن محلوں کو اختیار کر سکتا ہے

اُن میں سے ایک کو نقطہ دار لکیروں کے ذریعہ بتایا گیا ہے۔ دو توازی گر آلات لا ما اور لاَ ماَ دائرہ نصف النہار کے شمال اور جنوب افقی طور پر ثابت کئے گئے ہیں اور ان ذیلی آلات میں سے ہر ایک کے ماسکوں ف اور فَ پر چلیپائی تار رکھے گئے ہیں جیسے کہ خود بڑے آلہ کے ماسکہ میں ہوتے ہیں۔



شکل (۱۱۸)

اگر شمالی توازی گر کے دہانہ ما سے روشنی داخل کی جائے تو ماسکی چلیپائی تاروں ف سے شعاعیں نکلیں گی اور دہانہ لا پر پڑینگی جہاں سے وہ ایک متوازی کرن کے طور پر خارج ہونگی اور سوراخ ل م میں سے گذرنے کے بعد (کیونکہ وہ گذر سکتی ہیں جبکہ بڑی دوربین کا محور انتصابی ہو) دوسرے توازی گر کے دہانہ لاَ پر پڑینگی۔ چونکہ اِن شعاعوں کو متوازی رکھا گیا ہے اس لیے چلیپائی تاروں ف کا خیال فَ پر بنیگا۔ اس لیے جب مشاہد جنوبی توازی گر کے دہانہ ماَ سے اندر دیکھیگا تو تار فَ اور ف پر کے تاروں کا خیال دونوں اُسے ایکساتھ نظر آئیں گے۔ اُس فریم کی حرکت سے جس میں تار فَ لگے ہوئے ہیں وہ تار (۲۷۳)
فَ اور ف پر کے تاروں کے خیال کو منطبق کر سکیگا اور جب یہ انتظام ہو جائے تو اِن دو توازی گر دوربینوں کے محور ٹھیک متوازی ہوں گے اور اس لیے

جب ان دو توازی گروں کے محوروں کو کرۂ سماوی کی جانب خارج کیا جاتا ہے تو کرۂ سماوی پر دو نقطے ایک دوسرے سے ۱۸۰° کے فاصلہ پر حاصل ہوتے ہیں۔ اِس آلہ کو خطائے توازی گری کی تعیین میں استعمال کرنے کے لیے دائرہ نصف النہار کو خود اُس کے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے یہاں تک کہ دوربین شمالی توازی گر کی جانب قائم ہو جائے اور اُس وقت ف پر کے دوربین کے تاروں کے خیال اُسی میدان میں نظر آئیں گے جس میں دوربین کے ماسکہ پر کے تار ہیں۔ اب حرکت پذیر تار کو ف پر کے تقاطع کے خیال پر احتیاط کے ساتھ لانا پڑتا ہے اور لا، کی قرارت کرنی پڑتی ہے جیسا کہ سمجھایا جا چکا ہے۔ اِس کے بعد دائرہ نصف النہار کو ۱۸۰° میں سے گھما کر اُسے جنوبی توازی گر کی جانب قائم کیا جاتا ہے اور اسی طرح لا۲ حاصل کیا جاتا ہے۔ اس طرح ج جو $\frac{1}{2}$ (لا۱ + لا۲) کے مساوی ہے معلوم ہوتا ہے۔

۱۵۸۔ ہمواری کی خطا معلوم کرنا۔

جب خطائے توازی گری اُس طریقہ سے جو ابھی بیان کیا جا چکا ہے معلوم ہو جائے تو ہمواری کی خطا ب کا معلوم کرنا آسان ہے اگر دوربین کو ایک نقطہ س کی جانب جس کا میل اور ساعتی زاویہ معلومہ مقداریں ضہ اور ت ہوں قائم کرنے کے ذرائع موجود ہوں۔ کیونکہ ج میں جو معلوم ہو چکا ہے پیمایش کردہ مقدار جً کا اضافہ کرنے سے دوربین کا محور نقطہ س کی جانب قائم کیا جا سکتا ہے اور اس لیے حسب ذیل مساوات ملتی ہے (دفعہ ۱۵۶)

جیب (ج + جً) + جیب فہ جیب ب جیب ضہ

- جم فہ جم ب جیب ک جیب ضہ - جم ب جم ک جم ضہ جیب ت

+ (جم فہ جیب ب + جیب فہ جم ب جیب ک) جم ضہ جم ت = ۰

. . . . (۱)

نقطہ س کی بجائے راس لینا بلاشبہ بہت سہولت بخش ہے لیکن ہمارے پاس

یہ معلوم کرنے کے کوئی ذرائع نہیں ہیں کہ دوربین کس وقت راس کی جانب قائم ہوتی ہے۔ لیکن یہ معلوم کرنے کا ایک عمدہ طریقہ ہے کہ دوربین کس وقت قدم کی جانب قائم ہوتی ہے۔ اگر پارہ کا ایک ظرف دائرہ نصف النہار کے مرکز کے نیچے اس طرح رکھا جائے کہ دوربین انتصاباً نیچے وار اس کی جانب قائم ہوسکے تو پھر ہم چشمہ ہیں سے دیکھ کر دوربین کے چلیپائی تاروں کا مقابلہ اِن کے خیالوں کے ساتھ جو پارہ سے منعکس ہوتے ہیں کرسکتے ہیں۔ کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ شعاعوں کا ایک ستون دوربین کے ماسکہ سے کھُل کر اُس کے دہانہ سے ایک متوازی ستون کے طور پر نکلیگا اور پارہ کی سطح سے منعکس ہوکر ایک متوازی ستون کے طور پر دہانہ پر واپس ہوگا اور پھر دہانہ میں سے ماسکہ پر مقابل سمت سے منتقل ہوگا اور اس لیے ماسکہ پر کے چلیپائی تاروں کا ایک خیال خود تاروں کے بازو بنائے گا۔ اب صرف حرکت پذیر تار کو ایسے پیمائش کردہ فاصلہ جَ میں سے ہٹانا ہوگا تاکہ چلیپائی تاروں کا نقطہ تقاطع اس کے منعکس شدہ خیال پر منطبق ہو۔ پس ایسی صورت میں ہم جانتے ہیں کہ دوربین کا محور پارہ کی سطح پر عمود وار رہونا چاہئے اور اسلیے اس کی سمت قدم کی جانب ہونی چاہیے۔ قدم کا میل - فہ ہے اور اسکا ساعتی زاویہ ۱۸۰° ہے۔ اِن اندراجوں سے مساوات (۱) حسب ذیل شکل میں تحویل ہوتی ہے　(۴۷ھ)

جب (ج + جً) = جب ب

اور اس لیے ب = ج + جً کیونکہ سب مقداریں چھوٹی ہیں اور حل ۱۸۰° - ب = ج + جً ناقابل قبول ہے۔ پس ب معلوم ہوتا ہے کیونکہ یہ فرض کرلیا گیا ہے کہ خطائے تواری گری پہلے سے معلوم کیجا چکی ہے اور جً وہ مقدار ہے جو ابھی پیمائش کے ذریعہ معلوم کرلی گئی ہے۔

۱۵۹ — السمت اور گھڑی کی خطائیں معلوم کرنا۔

ہم یہ تسلیم کرلیں گے کہ توازی گری اور ہمواری کی خطائیں ج

اور ب دونوں مذکورۂ بالا طریقوں سے معلوم کرلی گئی ہیں۔ اب فرض کرو کہ ایک ستارہ عہ، ضہ کے مرور کا کوکبی وقت گھڑی میں ت ہے اور گھڑی کی خطاء مف ت ہے اور السمت کی خطاء ک ہے۔ ب اور ج کے لیے جو تصیحات معلوم کی گئی ہیں انہیں ت پر عائد کرو اور میئر کے ضابطہ (۳) دفعہ ۱۵۶ کو دو معلومہ ستاروں (عہ$_1$، ضہ$_1$) اور (عہ$_2$، ضہ$_2$) پر لگاؤ جنکا مشاہدہ وقت کے ایک چھوٹے وقفہ میں کیا گیا ہو جس میں مف ت کے متعلق یہ فرض کیا جا سکے کہ وہ متغیر نہیں ہوتا۔ اس طرح حاصل ہوگا

عہ$_1$ = ت$_1$ + مف ت + ک جب (فہ - ضہ$_1$) قط ضہ$_1$،

عہ$_2$ = ت$_2$ + مف ت + ک جب (فہ - ضہ$_2$) قط ضہ$_2$

پس دو مساواتیں دو مجہول مقداروں مف ت اور ک میں حاصل ہوتی ہیں اور ان مساواتوں کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

مف ت = { (عہ$_1$ - ت$_1$) جم ضہ$_1$ جب (ضہ$_2$ - فہ) - (عہ$_2$ - ت$_2$) جم ضہ$_2$ ×

جب (ضہ$_1$ - فہ) } × قط فہ قم (ضہ$_2$ - ضہ$_1$)،

ک = { (عہ$_1$ - عہ$_2$) - (ت$_1$ - ت$_2$) } جم ضہ$_1$ جم ضہ$_2$ قط فہ قم (ضہ$_2$ - ضہ$_1$)

مطلوبہ مقداروں کی ان قیمتوں میں ہم دیکھتے ہیں کہ مشاہدہ کی خطائیں ت$_1$ اور ت$_2$ کو متاثر کرتی ہیں اور یہ لازمی ہے کہ مشاہدے اس طرح ترتیب دیے جائیں کہ ت$_1$ اور ت$_2$ کے ضارب حتی الامکان چھوٹے ہوں اسلیے قم (ضہ$_2$ - ضہ$_1$) حتی الامکان چھوٹا ہونا چاہیے۔ اس لیے یہ ضروری ہے کہ (۴۷۵)
ان دو میلوں میں سے ایک صفر سے قریب ہو اور دوسرا ۹۰° سے قریب
اس طرح یہ اہم عملی قاعدہ حاصل ہوتا ہے کہ گھڑی کی خطاء اور السمت کی خطاء معلوم کرنے کے لیے منتخبہ ستاروں میں سے ایک قطب سے نزدیک ہونا چاہیے اور دوسرا استوار سے نزدیک۔

یہ غور طلب ہے کہ ب اور ج تو اجرام سماوی کے مشاہدہ کے بغیر

معلوم کیے جا سکتے ہیں لیکن مف ت اور ک معلوم نہیں کیے جا سکتے۔

۱۶۰ — دائرہ نصف النہار کے ذریعہ ایک ستارہ کا مَیل معلوم کرنا۔

دائرہ نصف النہار کا فائدہ یہ ہے کہ مُشاہد اس سے ایک جرم سماوی کا صعود مستقیم اور مَیل دونوں کو ایک ہی مرور پر معلوم کر سکتا ہے۔ ہم قبل ازیں یہ بتا چکے ہیں کہ صعود مستقیم کس طرح معلوم کیا جاتا ہے اور اب ہم یہ معلوم کریں گے کہ مَیل کی پیمائش کس طرح کیجاتی ہے۔

اُس لمحہ کے حتی الامکان قریب جس پر تکبد واقع ہوتا ہے مُشاہد دُوربین کو اس طرح متحرک کرتا ہے کہ ستارہ اُس اُفقی تار پر دوڑتا نظر آتا ہے جو دُوربین کے ماسکہ میں سے گذرتا ہوا تنایا گیا ہے۔ اب دائرہ کی قرارت خوردبینوں سے حسب طریقہ مندرجہ دفعہ ۱۵۳ کیجاتی ہے۔ یہ لازمی ہے کہ کم از کم دو خوردبینیں جو ایک قطر کے مقابل کے سروں پر رکھی گئی ہوں استعمال کیجائیں لیکن چار خوردبینیں جو محیط کے گرد متشاکلاً رکھی گئی ہوں بہترین آلات میں مطلوب ہوتی ہیں اور بعض اوقات چار سے زیادہ خوردبینیں استعمال کی جاتی ہیں۔ اِن خوردبینوں کی قراتوں کا اوسط س اس مخصوص مُشاہدہ کے لیے قرارت کے طور پر اختیار کیا جاتا ہے (دیکھو دفعہ ۱۵۵)۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ توازی گری کی تعیین دائرہ نصف النہار کے نیچے پارہ کے ایک ظرف سے انعکاس کے ذریعہ کس طرح کیجاتی ہے۔ اب ہم آلہ کو اس کے محور کے گرد متحرک کر کے ایسی جگہ قائم کرتے ہیں کہ صدر ماسکہ میں سے گذرنے والا ثابت افقی تار اپنے خیال پر منطبق ہو جس کا انعکاس پارہ سے ہوتا ہے جبکہ اُسے ایک مُشاہد چشمہ میں سے انتصاباً نیچے وار دیکھے۔ اس عمل سے دُوربین قدم کی جانب قائم ہوتی ہے اور چار خوردبینوں کی قرارت کر کے اوسط س۱ معلوم کیا جاتا ہے۔ اب ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ آلہ کی قرارت ۱۸۰° + س۱ ہو گی جبکہ اُسے راس کی جانب قائم کیا جائے اور اسلیے تکبد کے

لمحہ پر ستارہ کا ظاہری فاصلۂ راس سے ۱۸۰° - ر۰ + ر ہے - اس کی تصحیح
انعطاف کے لیے ہونی چاہیئے (دیکھو چھٹا باب) اور اس کے بعد اصلی (۴۷۶)
راسی فاصلہ ی معلوم ہوتا ہے - یہ مانکر کہ عرض بلد فہ معلوم ہے مَیل مساوات
ضہ = فہ - ی سے حاصل ہوتا ہے -

اُن ستاروں سے جن کا مَیل پہلے سے معلوم ہو استفادہ کیا جائے تو قدم کو مشاہدہ کرنے کی ضرورت نہیں رہتی - اگر کسی ایسے ستارہ کا مشاہدہ کیا جائے اور قراءت ر۱ حاصل ہو تو اُس کے ظاہری راسی فاصلہ کے لیے جملہ ۱۸۰° + ر۰ - ر۱ حاصل ہوتا ہے اور انعطاف کے لیے اس کی تصحیح کرکے اصلی راسی فاصلہ معلوم کیا جاتا ہے - لیکن یہ فہ - ضہ۱ ہے جہاں ضہ۱ ستارہ کا مَیل ہے، اس لیے اگر ع انعطاف کو تعبیر کرے تو

۱۸۰° + ر۰ - ر۱ + ع = فہ - ضہ۱

اس مساوات سے ر۰ معلوم کیا جا سکتا ہے - پس ہم ر۰ کی قیمت قدم کا راست مشاہدہ کئے بغیر معلوم کر سکتے ہیں -

مثال ۱ - ایک معلومہ ستارہ کا (جس کا میل ۳۰° ہے) مرور کا مشاہدہ کردہ وقت صحیح ہے یعنے وہ ستارہ کے صعود مستقیم کے مطابق ہے لیکن اُن ستاروں کے مشاہدہ کردہ اوقات میں جن کے مَیل ۱۵° اور ۶۰° ہیں علی الترتیب - ۴ر۲۷ث اور + ۵ر۳۱ث کی خطائیں ہیں - ثابت کرو کہ ۴۵° میل والے ایک ستارہ کی صورت میں تقریباً ۱۱ث کی خطا کی توقع ہو سکتی ہے -
[Math. Trip. I]

بیسل کا ضابطہ (۴) دفعہ ۱۵۶ استعمال کرکے ہم حسب ذیل چار مساواتیں حاصل کرتے ہیں جن سے م، ن، ج ساقط کئے جا سکتے ہیں اور پھر لا میں جو مساوات حاصل ہوتی ہے اُس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہو سکتا ہے

م + ن مس ۳۰° + ج قط ۳۰° = ۰ ،
م + ن مس ۱۵° + ج قط ۱۵° = - ۴ر۲۷ ،
م + ن مس ۶۰° + ج قط ۶۰° = + ۵ر۳۱ ،
م + ن مس ۴۵° + ج قط ۴۵° = لا

مثال ۲ — ماسکی طول ۱۰ فٹ کے ایک آلہ مُرور میں (جس میں خطائے توازی گری کے علاوہ اور کوئی خطا نہیں پائی جاتی) میل ۶۰° کا ایک ستارہ صحیح وقت سے ۲ ثانیہ قبل نصف النہار کو عبور کرتا ہوا نظر آتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس آلہ کو ٹھیک بنانے کے لیے چلیپائی تاروں کو فاصلہ ۰٫۰۰۸۷ انچ میں متحرک کرنا چاہئے۔ کس سمت میں یہ تار متحرک کئے جانے چاہئیں؟

[Math Trip. 1. 1900]

توازی گری کے لیے تصحیح ج قط ضہ = ۲ ث = ۳۰″ ہے اسلئے ج = ۱۵″۔ اس زاویہ کا دائری ناپ × ۱۰ فٹ = ۰٫۰۰۸۷ انچ۔ ہم جانتے ہیں کہ کسی ہیئتی دوربین میں خیال کے دائیں اور بائیں حصے ایک دوسرے میں الٹ جاتے ہیں، اس لیے یہ ظاہر ہے کہ تاروں کو مشرق کی طرف متحرک کرنا چاہئے۔

مثال ۳ — ثابت کرو کہ ایک آلہ مُرور کو اس طرح قائم کرنا ممکن ہے کہ وہ سب ستارے جو راس کے جنوب کی جانب گذر رہے ہوں نصف النہار کو عبور کرنے میں مستقل وقت ک کی دیر کرتے ہوئے نظر آئیں۔

(۴۷۷) **مثال ۴ —** اگر مختلف میل ضہ$_1$ اور ضہ$_2$ کے دو ستارے معلوم کئے جاسکیں جنکے لیے آلہ کی تنصیب کی تین خطائیں مُرور کے وقت میں کوئی خطا پیدا نہیں کرتیں تو ثابت کرو کہ میل ضہ کے ایک ستارہ کے مُرور کے مشاہدہ کردہ وقت میں جو تصحیح جمع کرنی ہوگی وہ حسب ذیل ہے:

۲ج جب $\frac{1}{2}$ (ضہ - ضہ$_1$) جب $\frac{1}{2}$ (ضہ - ضہ$_2$) قط ضہ قط $\frac{1}{2}$ (ضہ$_1$ - ضہ$_2$)

جہاں ج خطائے توازی گری ہے۔

[Math. Trip.]

بیسل کے ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے

م + ن مس ضہ$_1$ + ج قط ضہ$_1$ = ۰

م + ن مس ضہ$_2$ + ج قط ضہ$_2$ = ۰

اس لیے

م = - ج جم $\frac{1}{2}$ (ضہ$_2$ + ضہ$_1$) قط $\frac{1}{2}$ (ضہ$_2$ - ضہ$_1$)،

اور ن = - ج جب $\frac{1}{2}$ (ضہ$_1$ + ضہ$_2$) قط $\frac{1}{2}$ (ضہ$_2$ - ضہ$_1$)

اس لیے م + ن مس ضہ + ج قط ضہ حاصل ہوتا ہے ۔

مثال ۵ — ایک آلہ مرور میں ہمواری کی خطاء ب ما السمت کی خطاء ک اور توازی گری کی خطا ج ہے۔ثابت کرو کہ آلہ کی ان تین خطاؤں کی وجہ سے ایک ستارہ کے مرور کے وقت میں خطاء اقل ہو گی جبکہ ستارہ کا میل

جب$^{-1}$ {(ک جم فہ ۔ ب جب فہ) \ ج }

ہو بشرطیکہ یہ زاویہ حقیقی ہو ۔ فہ رصدگاہ کا عرض بلد ہے۔
[Coll. Exam.]

مثال ۶ — قطب سے قریب ایک حائط قطبی ستارہ کا مشاہدہ السمت کی خطاء کے لیے کیا گیا ہے لیکن ہمواری کی مفروضہ خطاء میں بقدر مقدار لا کے خطاء ہے ۔ ثابت کرو کہ انحراف کی خطاء میں بقدر مقدار لا مس فہ کے خطاء ہو گی اور اس لیے سب ستاروں کے مرور کے وقت میں لا قط فہ کی تصحیح کرنی ہو گی جہاں فہ مشاہدہ کے مقام کا عرض بلد ہے اور یہ مان لیا گیا ہے کہ کوئی خطائے توازی گری نہیں ہے ۔
[Math. Trip. 1901]

ایک معلومہ ستارہ کے مشاہدہ سے

ب جم (فہ ـ ضہ) قط ضہ + ک جب (فہ ـ ضہ) قط ضہ

کی قیمت معلوم ہو گی، لا میں ب اور ما میں ک ایک ساتھ جمع کرنے سے یہ جملہ نہیں بدلیگا بشرطیکہ

لا جم (فہ ـ ضہ) + ما جب (فہ ـ ضہ) = ۰

یا ما = لا حم (ضہ ـ فہ)

لیکن چونکہ ستارہ قطب سے قریب ہے اس لیے ہم لے سکتے ہیں

ضہ = ۹۰° یا ما = لا مس فہ

اس لیے کسی ستارہ کے لیے مرور کے وقت میں

لا {جم (فہ ـ ضہ) + مس فہ جب (فہ ـ ضہ)} قط ضہ = لا قط فہ

کی تصحیح ہونی چاہئے ۔

مثال ۷ — ثابت کرو کہ دائرہ نصف النہار سے مشاہدے کرنے میں مشاہدوں کی تصحیح کیلئے بیسل کا جو ضابطہ ہے اُسے تعمیمی آلہ (دفعہ ۱۴۲) کی مساواتوں سے راست طور پر کس طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۸ — ثابت کرو کہ دائرہ نصف النہار کی خطاؤں کی مقداریں خواہ کچھ ہی ہوں ایک ستارہ کے بالائی اور زیریں تکبدوں پر ساعتی زاویوں ت$_{1}$ اور ت$_{2}$ کا حسابی اوسط آلہ کی توازی گری پر منحصر نہیں ہوتا۔

دفعہ ۱۵۶ کی مساوات (۲) شکل (۴۷۸)

ا جب ت + ب جم ت + ج = ۰

میں لکھی جا سکتی ہے۔ اگر ت کی دو مختلف قیمتیں ت$_{1}$ اور ت$_{2}$ ہوں جو اس مساوات کو پورا کرتی ہیں تو

ا جب ت$_{1}$ + ب جم ت$_{1}$ + ج = ۰

ا جب ت$_{2}$ + ب جم ت$_{2}$ + ج = ۰

اس لیے تفریق کرنے اور جب $\frac{1}{2}$ (ت$_{1}$ – ت$_{2}$) سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے

مس $\frac{1}{2}$ (ت$_{1}$ + ت$_{2}$) = ا \ ب

اس میں ج شامل نہیں ہے اور صرف ج میں توازی گری داخل ہوتی ہے۔ اس لیے مسئلہ ثابت ہے۔

مثال ۹ — ایک آلہ مرور کو معلومہ عرض بلد فہ کے ایک مقام پر ایک انتصابی مستوی میں جو نصف النہار نہیں ہے نصب کیا گیا ہے۔ آلہ کے السمت ا کو مشاہدہ کردہ وقت طہ کی رقوم میں معلوم کرنے کے لیے ایک مساوات معلوم کرو جہاں طہ میل ضہ کے ایک حائط قطبی ستارہ کے دو متواتر مروروں کے درمیان مشاہدہ کردہ وقفہ ہے۔

ثابت کرو کہ ساعتی زاویوں کے مشاہدہ کردہ فرق طہ میں ایک چھوٹی خطا مف طہ کا یہ اثر ہوگا کہ السمت میں مقدار

$\frac{1}{2}$ جب^{2} ا سب ا جم^{2} فہ مس^{2} ضہ مس $\frac{1}{2}$ طہ قط^{2} $\frac{1}{2}$ طہ مف طہ

[Math. Trip. 1905]

کی خطا پیدا ہوگی۔

دفعہ ۱۵۶ کے عام ضابطہ میں ج = ۰، ب = ۰، ک = ا رکھو تو

وہ

جم فہ جب ا جب ضہ - جم ا جم ضہ جب ت + جب فہ جب ا جم ضہ جم ت = ۰

ہو جاتا ہے جس کو شکل ذیل میں لکھا جا سکتا ہے:

جب فہ مس ا جم ت - جب ت = جم فہ مس ا مس ضہ

یہ درست ہونا چاہئے اگر ت کی بجائے ت - طہ رکھا جائے اور ت - $\frac{1}{2}$ طہ = پ

اور $\frac{1}{2}$ طہ = ق رکھنے سے حسب ذیل ضابطے حاصل ہوتے ہیں

جب فہ مس ا جم (پ + ق) - جب (پ + ق) = جم فہ مس ا مس ضہ ... (۱)

جب فہ مس ا جم (پ - ق) - جب (پ - ق) = جم فہ مس ا مس ضہ ... (۲)

(۱) کو (۲) میں سے تفریق کرنے اور جب ق سے تقسیم کرنے پر حاصل ہوتا ہے

جب فہ مس ا جب پ + جم پ = ۰ .... (۳)

(۱) کو جب (پ - ق) سے اور (۲) کو جب (پ + ق) سے ضرب دیکر تفریق کرنے پر

جب فہ مس ا جب ۲ق = ۲ جم فہ مس ا مس ضہ جم پ جب ق

اس لیے جب ق سے تقسیم کرنے پر

جب فہ جم ق = جم فہ مس ضہ جم پ

اس لیے (۳) سے

جم ق مم ا = - جم فہ مس ضہ جب پ

اور اسلیے (جب^2 فہ + مم^2 ا) جم^2 ق = جم^2 فہ مس^2 ضہ

ق کو اس کی قیمت $\frac{1}{2}$ طہ دینے سے

جم^2 فہ جب^2 ا = جم^2 $\frac{1}{2}$ طہ \ (جم^2 $\frac{1}{2}$ طہ + مس^2 ضہ)

جو ا اور طہ میں مطلوبہ مساوات ہے۔

سوال کا دوسرا حصہ اُ کو طہ کے لحاظ سے تفرق کرنے پر حاصل ہوگا۔

مثال ۱۰ ۔ ثابت کروکہ مرور پر ایک سیّارہ کے کنارہ اور مرکز کے صعود مستقیموں کا فرق ۱/۱۵ غہ ر/ا \ رجم ضہ ہے جہاں غہ سیارہ کا نیم قطر قوس کے ثانیوں میں ہے جبکہ سورج اپنے اوسط فاصلہ ر/ا پر ہو، سیارہ کا اصلی فاصلہ ر ہے اس کا میل ضہ ہے اور سیّارہ کی حرکت نظر انداز کی گئی ہے۔ (۴۷۹)

مثال ۱۱ ۔ شعریٰ (Sirius) کا مُرور بمقام گرینوچ بتاریخ ۱۳ فروری ۱۸۵۱ء چار تاروں میں سے ہر تار پر بہ اوقات

۶ گ ۳۷ م ۴۳٫۷ ش ، ۶ گ ۳۷ م ۵۸٫۲ ش ، ۶ گ ۳۸ م ۱۲٫۶ ش ، ۶ گ ۳۸ م ۲۶٫۹ ش

مشاہدہ کیا گیا ہے۔

مشاہدہ کردہ تاروں کے لیے اُستوائی وقفوں کا مجموعہ -۸۲٫۹۰۵ ش ہے اور ستارہ کے میل کی جیب التمام ۰٫۹۵۸۷۱ ہے۔ ستارہ کے مُرور کا وقت معلوم کرو۔

[Coll. Exam.]

فرض کروکہ مستعملہ تاروں کے اُستوائی وقفے د۱، د۲، د۳، د۴ ہیں جو وقت ہیں ۱۵ اً = ۱ ش کی شرح سے بیان کئے گئے ہیں۔ تب دیے ہوئے مشاہدوں سے نصف النہار کو عبور کرنے کے حسب ذیل اوقات حاصل ہوتے ہیں

۶ گ ۳۷ م ۴۳٫۷ ش + د۱ قط ضہ ، ۶ گ ۳۸ م ۱۲٫۶ ش + د۳ قط ضہ ،

۶ گ ۳۷ م ۵۸٫۲ ش + د۲ قط ضہ ، ۶ گ ۳۸ م ۲۶٫۹ ش + د۴ قط ضہ

اِن کا اوسط

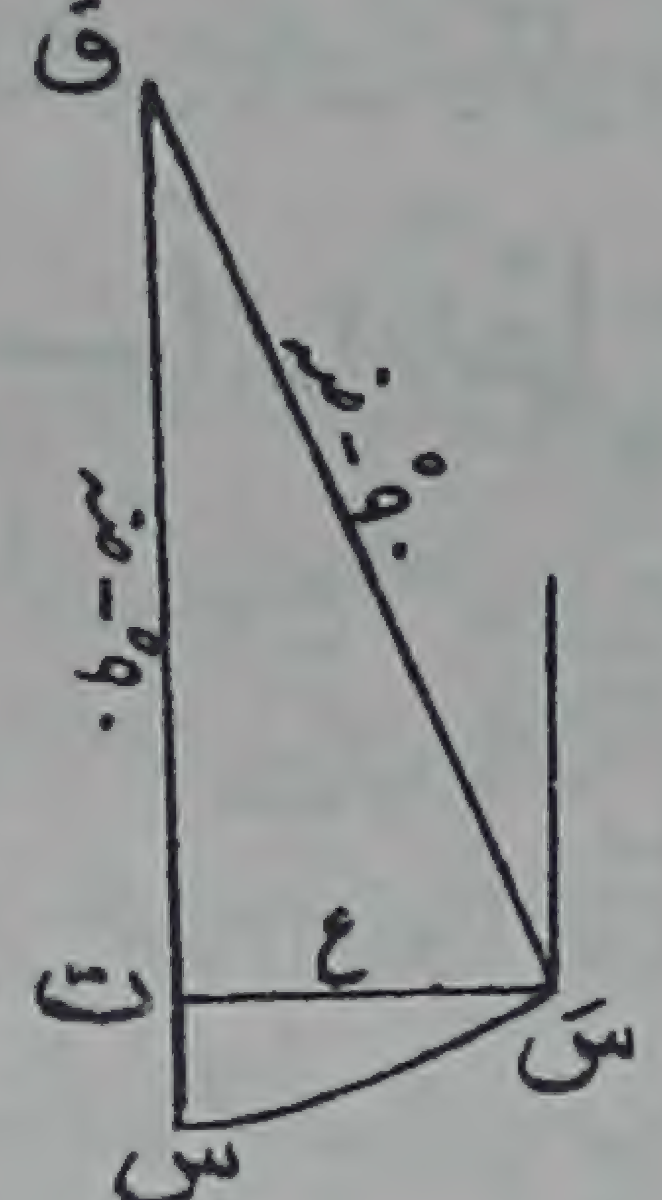
۶ گ ۳۸ م ۵٫۳ ش + ۱/۴ (د۱ + د۲ + د۳ + د۴) قط ضہ

ہے لیکن د۱ + د۲ + د۳ + د۴ = -۸۲٫۹۰۵ ش اور قط ضہ = ۱٫۰۴۳ ۔ اسلیے نصف النہار پر تحویل -۲۱٫۶ ش ہے اور مرور کا مطلوبہ وقت ۶ گ ۳۷ م ۴۳٫۷ ش ہے۔

مثال ۱۲ ــ دو تار جو ایک دوسرے سے ۴۵° کے زاویہ پر مائل ہیں ایک آلہ مرور کے ماسکہ میں اس طور پر رکھے گئے ہیں کہ تاروں کے تقاطع کا میل ۳۰° ہے۔ ایک ستارہ جس کا میل تقریباً ۳۰° ہے ایک تار سے دوسرے تار تک ۱م ۴۵ث میں حرکت کرتا ہے۔ ستارہ کا میل معلوم کرو۔

[Coll. Exam.]

مثال ۱۳ ــ ایک ستارہ کے خیال سَ (شکل ۱۱۹) کی تنصیف ایک آلہ مرور کے افقی تار ت س پر ہوتی ہے جبکہ ستارہ ایک انتصابی تار کو جس کا فاصلہ نصف النہار ق س سے ع ہے عبور کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ مشاہدہ کردہ میل پر جو تصحیح ستارہ کے راستہ کے انحناء کے لیے عائد کرنی ہوگی ½ ع² جب ۲ ضہ ہے۔



شکل (۱۱۹)

فرض کرو کہ قطب ق ہے تو

ق س = ق سَ = ۹۰° ـ ضہ

اور سَ ت، ق س پر عمود ہے۔ مطلوبہ تصحیح س ت ہے۔

مثال ۱۴ ــ ثابت کرو کہ انحناء کی تصحیح (دیکھو گذشتہ مثال) قوس کے ثانیوں میں اس طرح بیان کی جاسکتی ہے

[۶٫۴۳۵۶۹] × جب ۲ ش ق ف × ت²

جہاں ستارہ کا شمال قطبی فاصلہ ش ق ف ہے اور ت وقت کے ثانیوں میں وہ وقفہ ہے جو نصف النہار کو عبور کرنے کے وقت اور مرور کے وقت کے درمیان ہے۔ خطوط وحدانی کے اندر جو عدد لکھا گیا ہے وہ ایک لوگارتم ہے۔

[*Greenwich Obs. 1898. p. xivii*]

(۴۸۰) **مثال ۱۵ —** اگر میل ضہ کے ایک ستارہ کے راسی فاصلہ ی کا مشاہدہ کیا جائے جبکہ وہ ساعتی زاویہ ت پر نصف النہار سے بہت قریب ہو اور اگر عرض بلد فہ ہو تو ثابت کرو کہ اصلی نصف النہاری فاصلہ راس حاصل کرنیکے لئے ی میں سے مقدار

$$\frac{\text{۲ جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ت جم فہ جم ضہ}}{\text{جب اً جب ی}} - \frac{\text{۲ مم ی}}{\text{جب اً}}\left(\frac{\text{جب}^{۲}\,\tfrac{۱}{۲}\,\text{ت جم فہ جم ضہ}}{\text{جب ی}}\right)^{۲}$$

جو ثانیوں میں بیان کی گئی ہے تفریق کرنی ہو گی ۔

۱۶۱ — آلہ ارتفاع السمت اور اُستوائی دوربین ۔

آلہ ارتفاع السمت جیساکہ اُس کے نام سے ظاہر ہے کسی جرم سماوی کے ارتفاع اور السمت کو پیمائش کرنے کا آلہ ہے ۔ یہ آلہ تعمیمی آلہ کی وہ مخصوص صورت ہے جس میں محور ۱ انتصابی ہوتا ہے اور محور ۲ افقی ۔ آلہ ارتفاع السمت اپنی مشہور شکل تھیوڈولائٹ میں سروینگ (پیمائش) میں بڑا کام آتا ہے ۔ ہیئتی رصدگاہ میں بھی اس کے متعدد استعمال ہیں لیکن سماوی مشاہدوں کے لیے بہت زیادہ اہم آلہ وہ ہے جو اُستوائی دوربین کے طور پر مشہور ہے ۔ اُسے بھی تعمیمی آلہ (دیکھو دفعہ ۱۴۲) کی ایک مخصوص صورت سمجھا جا سکتا ہے ۔ اُستوائی دوربین میں محور ۱ زمین کے محور کے متوازی ہوتا ہے اور محور ۲ خط اُستوا کے مُستوی کے متوازی، لیکن اِن کے علاوہ اس پر کوئی قید نہیں ہوتی ۔

تعمیمی آلہ کی مساواتوں کو اُستوائی دوربین پر استعمال کرنے میں ہم خط اُستوا کو بنیادی مُستوی کے طور پر لیتے ہیں اور چونکہ ہم ابتدءً اِس آلہ کو کامل تسلیم کریں گے اِس لیے ہم رکھتے ہیں طہ = ۰، ق = ۰، ر = ۰ اور اس لیے دفعہ ۱۴۲ کی مساواتیں (۱)، (۲)، (۳) حسب ذیل ہو جاتی ہیں

جیب ضہ = جب کاَ، جیب (لہ − عہ) جم ضہ = − جب کا جم کاَ،

جم (لہ − عہ) جم ضہ = جم کا جم کاَ . . . . (۱)

اگر عہ اور بہ دبے گئے ہوں تو مساواتوں کے اِس جٹ کے بالعموم

دو حل ہوتے ہیں چنانچہ یہ ہو سکتا ہے کہ

سَ = ضه ، س = عه - له

یا یہ ہو سکتا ہے کہ

سَ = ۱۸۰° - ضه ، س = ۱۸۰° - له + عه

اس کا مطلب جیسا کہ قبل ازیں سمجھایا جا چکا ہے یہ ہے کہ کسی دیے ہوئے نقطہ عه ، ضه کی جانب اس آلہ کو قائم کرنے کے دو طریقے ہیں اور ان میں سے ایک طریقہ میں ضه مقدار س کی قرارت ہے اور دوسرے میں ضه مقدار سَ کا تکملہ ہے ۔

اگر س = ۰ تو عه = له جس سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ مقدار له ، دائرہ ا پر درجہ بندی سے مبداء کا صعود مستقیم ہے ۔ اگر یہ انتظام کیا جائے کہ یہ نقطہ (درجہ بندی کا مبداء) دائرہ ا کا جنوبی نقطہ ہو تو سہولت بخش ہوگا ۔ اس
صورت میں له = ته اور له - عه ، ستارہ عه ، ضه کا ساعتی زاویہ (مغرب) ہے ۔ (۴۸۱)
اس لیے جب آلہ کامل ہو اور اُسے ایک ستارہ کی جانب قائم کیا جائے تو دائرہ ا کی قرارت س سے اس ستارہ کا ساعتی زاویہ (مشرق) حاصل ہوتا ہے ۔

دوربین کو اس طرح نصب کرتے ہیں کہ وہ ایک اُستوائی دوربین ہو جائے جو سہولت ہے اس کا انحصار زیادہ تر اس واقعہ پر ہے کہ جب دوربین ایک ستارہ کی جانب لگائی جاتی ہے تو محور ا کے گرد اس آلہ کی گردش سے زمین کی یومی حرکت کا اثر دفع ہو جاتا ہے ، اُستوائی دوربین میں محور ا کو بالعموم اس کا قطبی محور کہتے ہیں ۔ ایک آلہ جسے اُستوائی گھڑی کہتے ہیں اُستوائی دوربین میں لگایا جاتا ہے جس سے دوربین اپنے قطبی محور کے گرد ایک ایسی رفتار سے گھومتی ہے جو زمین کے محور کے گرد اس کی گردشی رفتار کے مساوی اور مخالف ہوتی ہے ۔ جب ہر چیز مکمل ہو اور اُستوائی گھڑی ٹھیک وقت بتائے تو ستارہ میدان نظر میں ثابت نظر آتا ہے ۔

ہم نے اُستوائی دوربین میں یہ فرض کیا ہے کہ محور ا ٹھیک قطب کی نشاندہی کرتا ہے اور یہ کہ محور ۲ ، محور ا کے علی القوائم ہے ۔ بلاشبہ یہ شرطیں

ایک حقیقی آلہ میں کامل طور پر پوری نہیں ہوتیں اور اب ہم حسب ذیل مسئلہ[1] ثابت کریں گے جو اُستوائی دوربین کی تنصیب میں عملی اہمیت رکھتا ہے۔

فرض کرو کہ اُستوائی دُوربین کا محور ایک ایسے نقطہ کی جانب قائم ہے جو اصلی قطب سے ایک چھوٹے فاصلہ ل پر اور ساعتی زاویہ س پر ہے اور دُوربین اِس طور پر لگی ہوئی ہے کہ ایک ستارہ کا خیال جس کا میل ضہ اور ساعتی زاویہ س۱ (وقت کے ثانیوں میں) ہے دو تاروں کے نقطہ تقاطع پر منطبق ہوتا ہے جہاں تار اُستوائی دُوربین کے قطب میں سے گذرنے والے ایک بڑے دائرہ کے علی الترتیب متوازی اور علی القوائم ہیں۔ اگر اُستوائی گھڑی ن ثانیے فی یوم تیز ہو تو اُس وقت تک کہ ستارہ کا ساعتی زاویہ بڑھ کر س۲ ہو جائے اِن دو تاروں کے متوازی ستارہ کے خیال کے ہٹاؤ علی الترتیب

−۲ل جب ½ (س۲ − س۱) جم {س − ½ (س۱ + س۲)} جب ضہ

+ ن (س۲ − س۱) جم ضہ / (۲۴ × ۶۰ × ۶۰)

اور ۲ل جب ½ (س۲ − س۱) جب {س − ½ (س۱ + س۲)}

ہوں گے بشرطیکہ انعطاف نظر انداز کر دیا گیا ہو۔

فرض کرو کہ اصلی قطب **ا** (شکل ۱۲۰) ہے اور نصف النہار **ا** ے ہے۔ فرض کرو کہ اَ وہ نقطہ ہے جس کی جانب دوربین کا محور قائم ہے۔ تب

ا اَ = ل اور اَ ا ے = س

فرض کرو کہ ستارہ کا محل ج ہے جس کی جانب دوربین لگائی گئی ہے۔

(۴۸۲) تو جب ستارہ ج سے ب تک حرکت کرتا ہے اور اِس لئے اب = اج تو دوربین جَ سے بَ تک حرکت کرتی ہے اور اَبَ = اَجَ۔

---

[1] ڈاکٹر ریمبو (Dr. Rambaut.) نے یہ مسئلہ ارسال کیا تھا۔

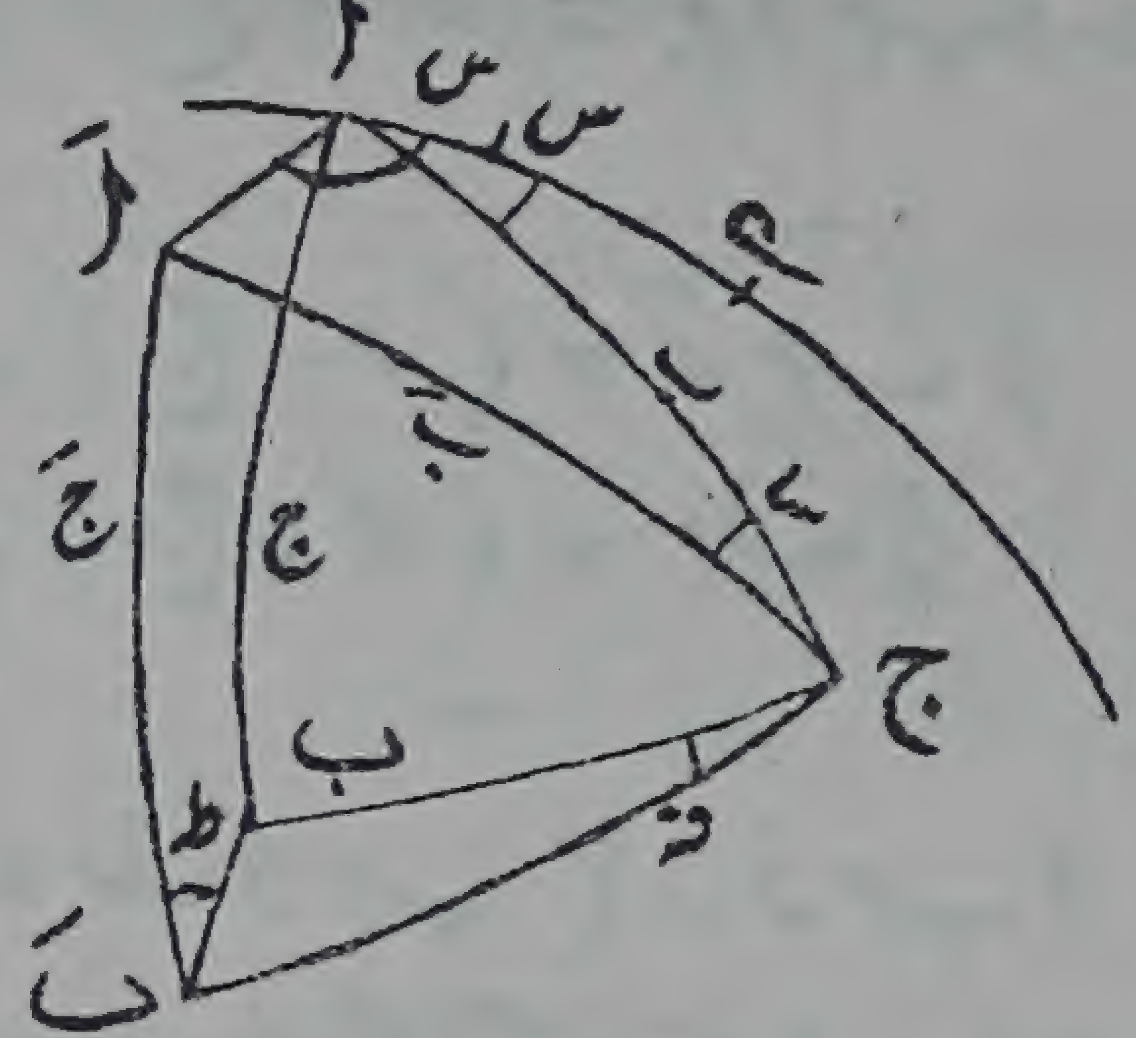
زاویہ ج ا سے = س۱۔ فرض کرو کہ زاویے اَ ب بَ ب ج بَ اَ ج ا اور قوس ب بَ علی الترتیب طہ، ف، س۱ اور غہ سے تعبیر ہوتے ہیں۔

اِس طرح دو متساوی الساقین مثلث ا ب ج اور اَ ب ج حاصل ہوتے ہیں جنکے ضلعوں اور زاویوں میں رتبہ ل کی چھوٹی مقداروں کا فرق ہے۔

چونکہ ب = ج، زاویہ ا ب ج = زاویہ ب ج ا، بَ = جَ

اور زاویہ اَ بَ ج = زاویہ اَ ج بَ اس لیے

مف ب = مف ج، مف بَ = مف جَ



شکل (۱۲۰)

دفعہ ۴ کے تفرقی ضابطوں کی رو سے عام صورت میں

مف ا = جم ج × مف ب + جم ب × مف ج + جب ب جب ج × مف ا

مف ج = جم ب × مف ا + جم ا × مف ب + جب ب جب ا × مف ج

یا اِس صورت میں

مف ا = ۲ جم ج × مف ب + جب ب جب ج × مف ا

اور مف ج = ۲ (جب^2 $\frac{1}{2}$ ا - جم^2 ج) قم ب قم ا × مف ب - جب ج جم ج قم ا × مف ا

مثلث ا ج اَ میں

جب ل جب (س-س،) = جب بَ جب سا'

جب ل جم (س-س،) = جب ب جم بَ - جم ب جب بَ جم سا

یا چھوٹی مقداروں کے پہلے رتبہ تک

سا = ل جب (س-س،) \ جب ب'

مف ب = - ل جم (س-س،)

نیز ج - سا = جَ - فہ' فہ = مف ج + سا

(۴۸۳) مثلث ب بَ ج میں چونکہ زاویہ بَ = زاویہ جَ = زاویہ اَ ج بَ

اس لیے

جب غہ جب (جَ - طہ) = جب اِ جب فہ'

جب غہ جم (جَ - طہ) = جم ا جب اَ - جب ا جم اَ جم فہ

یا تقریبی طور پر

غہ جب (ج - طہ) = فہ جب ا

غہ جم (ج - طہ) = مف ا

اس لیے

غہ جب طہ = مف ا جب ج - فہ جب ا جم ج

غہ جم طہ = مف ا جم ج + فہ جب ا جب ج

یا غہ جب طہ = جب ج × مف ا - جب ا جم ج × مف ج - جب ا جم ج × سا'

غہ جم طہ = جم ج × مف ا + جب ا جب ج × مف ج + جب ا جب ج × سا

ان میں سے پہلی مساوات میں مف ا اور مف ج کی محصلہ قیمتیں درج کرکے ذرا مختصر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

غہ جب طہ = ۲{جب ج جم ج - جب² ½ (مم ج + جم² ج مم ج} مف ب

+ جب ب × مف ا - جب ا جب ج مم ج × سا

= {۲ جم² ½ ا × مف ب - جب ا جب ج × سا} مم ج + جب ب × مف ا

لیکن مم ج = مس ½ ا جم ب اور جب ا جب ج = جب ب جب ا، اسلیے

غہ جب طہ = ۲ جب ½ ا جم ½ ا جم ب × مف ب

− ۲ جب² ½ ا جم ب جب ب × سا + جب ب × مف ا

اِس میں مف ب اور سا کی محصلہ قیمتیں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

غہ جب طہ = −۲ل جب ½ ا جم (س − س۱ − ½ ا) جم ب + جب ب × مف ا

اسی طرح

غہ جم طہ = ۲ جب² ½ ا × مف ب + جب ب جب ا × سا

= −۲ل جب² ا جم (س − س۱) + ۲ل جب ½ ا جم ½ ا جب (س − س۱)

= ۲ل جب ½ ا جب (س − س۱ − ½ ا)

لیکن غہ جب طہ اور غہ جم طہ توازی میں اور اس کے علی القوائم ہٹاؤ ہیں، جس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

آخری مثالیں

مثال ۱ — ایک اُستوائی دُوربین کی تنصیب کاملاً درست فرض کی گئی ہے سوائے اس کے کہ قطبی محور میں میلان کی خطا، طہ ہے اگرچہ وہ نصف النہار میں ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اُستوائی گھڑی کامل طور پر صحیح چل رہی ہو تو بھی ایک حائط قطبی ستارہ کا ظاہری مقام میدان نظر کے مرکز میں دائمًا ہونے کی بجائے ایک قطع ناقص مرتسم کرتا ہے جس کے صدر نیم محور طہ اور طہ جیب ضہ ہیں۔ [Math. Trip. 1905]

فرض کرو کہ اصلی قطب ق ہے اور اُستوائی دُوربین کا حقیقی قطب قَ ہے (۴۸۴)
(شکل ۱۲۱) تو س کا اصلی ساعتی زاویہ اور میل س، ضہ ہیں اور ظاہری قیمتیں س + مف س، ضہ + مف ضہ ہیں۔
فرض کرو کہ سَ ت، نصف النہار پر عمود ہے تو

جب ق ت مس سَ = مس س ت

لوکارثمی تفرقے لینے سے

طہ مم ق ت + قطاس قم س × مف س = ۰

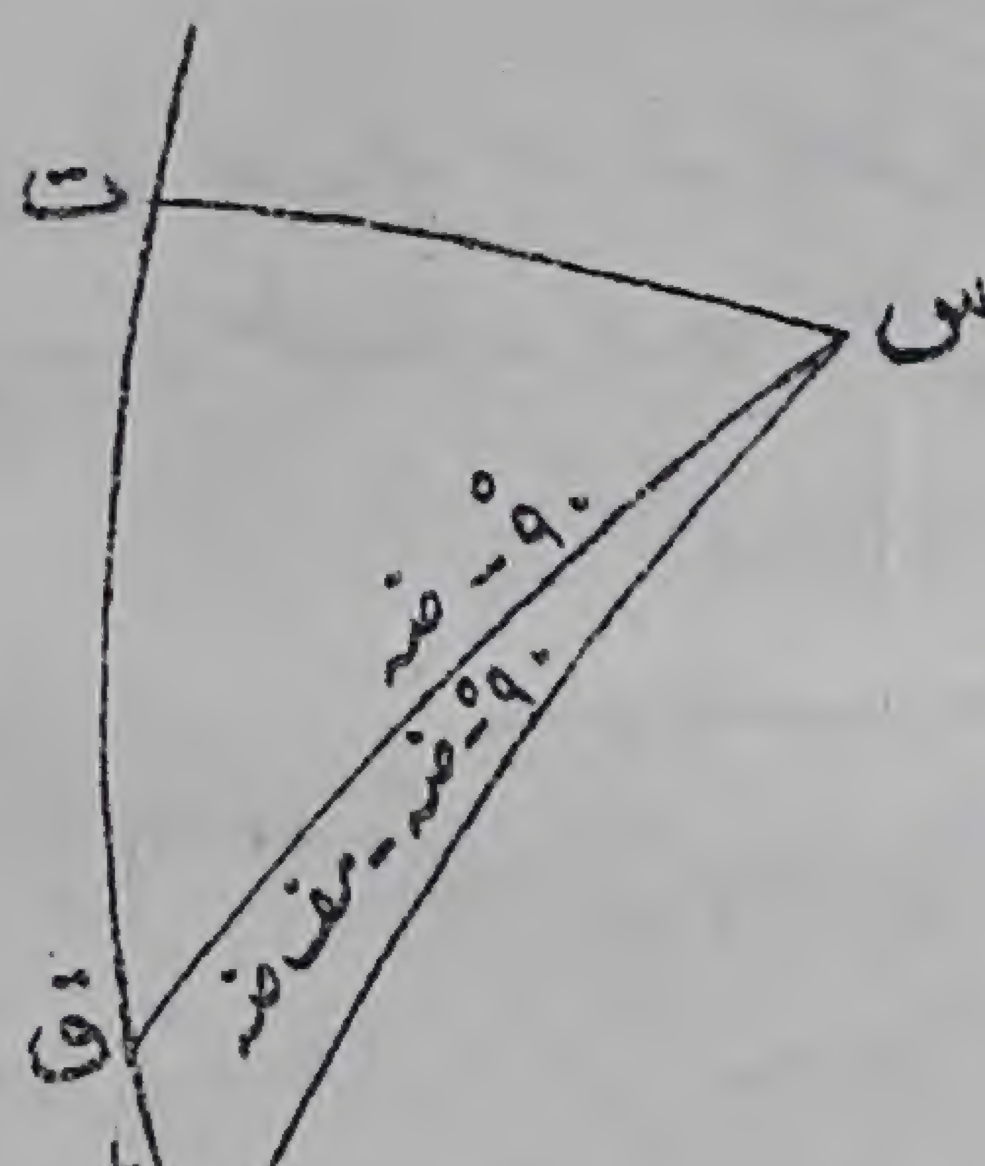
لیکن مم ق ت = مس ضہ قطاس

اسلیے مف س = - طہ مس ضہ جب س

اور مف ضہ = - طہ جم س

اس طرح ستارہ بقدر مقداروں

لا = - طہ جم س، ما = - طہ مس ضہ جب س × جم ضہ



شکل (۱۲۱)

کے ہٹا ہوا نظر آتا ہے، اِس لیے

$$\frac{لا^2}{طہ^2} + \frac{ما^2}{طہ^2 جب^2 ضہ} = 1$$

مثال ۲ — ایک اُستوائی دوربین کا قطبی محور خفیف طور پر ہٹا ہوا ہے، اس لیے ساعتی زاویوں س، اور س۲ میں اس کا مَیل کا دائرہ جس کا صفر صحیح مقام پر ہے صحیح قراءت سے بقدر م۱ اور م۲ کے زیادہ قراءت کرتا ہے۔ دو خطوط ق س اور ق ت، م۱ اور م۲ کے متناسب کھینچو جن کے درمیان زاویہ س۲ - س۱ ہو۔ ایک دائرہ ق س ت میں سے کھینچو۔ ثابت کرو کہ دوربین کے قطب کا محل قَ سے تعبیر ہوتا ہے جہاں ق قَ، دائرہ ق س ت کا ایک قطر ہے۔ ارتفاع اور السمت میں تنصیب کی خطائیں بھی معلوم کرو۔

اگر کوئی ستارہ س ہو جس کا قطبی فاصلہ اور ساعتی زاویہ ق اور س، ہیں اور اگر قَ دوربین کا قطب ہو جس کا محل قطبی فاصلہ لہ اور ساعتی زاویہ س سے اسی طرح متعین ہوتا ہے تو مثلث س ق قَ میں

جم قَ = جم ق جم لہ + جب ق جب لہ جم (س - س۱)

نیز یہ دیا گیا ہے کہ قَ = ق - م۱، اِس لیے

جم (ق - م۱) = جم ق جم لہ + جب ق جب لہ جم (س - س۱)

یا چھوٹی مقداروں لہ اور م۱ کے مربع اور اعلیٰ قوتیں نظر انداز کرنے سے

م۱ = لہ جم (س - س۱)

اسی طرح م۲ = لہ جم (س - س۲)

اِس لیے سوال میں مندرجہ عمل درست ہے اور ہم دیکھتے ہیں کہ دائرہ کا قطر لہ کے مساوی ہے۔

مثال ۳ — ایک اُستوائی دوربین کا مَیل کا محور، قطبی محور کے ساتھ زاویہ ۹۰° + لا بناتا ہے اور دوربین مَیل کے محور کے ساتھ زاویہ ۹۰° + ما بناتی ہے۔ دوربین ایک ستارہ کی جانب جو نصف النہار میں اور خط اُستوا پر ہے لگائی گئی ہے اور خوردہ پیماسٹ کا تمکینی تار اس طرح بٹھایا گیا ہے کہ ستارہ اُس پر

دوڑتا نظر آتا ہے جبکہ دوربین اُستوائی گھڑی کے ذریعہ نہ چلتی ہو۔ پھر دوربین کو میل ضہ پر کے ایک ستارہ کی جانب جو خود بھی نصف النہار میں یا اس کے قریب ہے لگایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ ستارہ تمکینی تار سے زاویہ ـ لا (قط ضہ ـ ۱) + ماس ضہ پر میدان کو عبور کرے گا۔
[Sheepshanks Exhibition, 1900]

فرض کرو کہ سماوات کا قطب ق ہے، (وہ نقطہ جس کی جانب میل کا محور ہے) اور س ایک ستارہ ہے جس کا میل ضہ ہے۔ تب (۴۸۵)

ا ق = ۹۰° + لاَ، ا س = ۹۰° + ما اور ق س = ۹۰° ـ ضہ

اگر زاویہ ا س ق، ق سے تعبیر ہو تو

جم ق = (ـ جب لا + جب ما جب ضہ) / (جم ما جم ضہ)

یا تقریباً ۹۰° ـ ق = ـ لا قط ضہ + ماس ضہ

ستارہ میدان کو نصف النہار کے عمود وار سمت میں عبور کرے گا۔ اِس لیے ۹۰° ـ ق وہ زاویہ ہے جو اُس کا راستہ ا س کے ساتھ بناتا نظر آئے گا جہاں ا س آلہ میں ثابت ہے۔

خط اُستوا پر حاصل ہو گا

۹۰° ـ ق. = ـ لا

اِس لیے ق. ـ ق = ـ لا (قط ضہ ـ ۱) + ماس ضہ

مثال ۴ ــ ایک اُستوائی دوربین جس کا محور ظاہری قطب کی جانب قائم کیا گیا ہے ایک ستارہ کی جانب لگائی گئی ہے جو نصف النہار سے بہت قریب ہے۔ اگر دوربین ستارہ کا تعاقب صحیح طور پر کرے تو ثابت کرو کہ اُستوائی گھڑی کی شرح نسبت

۱ ـ ک م لہ س ی : ۱

میں گھٹی ہوئی ہونی چاہئے جہاں لہ مشاہدہ کے مقام کا عرض بلد ہے۔
[Math. Trip.]

فرض کرو کہ اصلی قطب ق ہے، راس سمـا اور کسی ساعتی زاویہ س میں

ایک ستارہ کا محل س ہے۔ فرض کرو انعطاف سے متاثر قطب اور ستارہ کے محل قَ اور سَ ہیں۔ تب ق قَ = ک مم لہ اور س سَ = ک مس ی جہاں ی ستارہ کا فاصلہ راس ہے۔

اگر سَ، زاویہ ر قَ سَ ہو یعنی سَ کا ظاہری ساعتی زاویہ تو مثلث ر ق س پر دفعہ (۴) کے تفرقی ضابطے لگانے سے

مف س = سَ ۔ س = مف لہ جب س مس ضہ + مف ی $\frac{\text{جب س جم لہ}}{\text{جب ی جم ضہ}}$

یا سَ ۔ س = ک $\left\{ \text{مم لہ مس ضہ} - \frac{\text{جم لہ}}{\text{جم ی جم ضہ}} \right\}$ جب س

اس لیے

$\frac{\text{فرسَ}}{\text{فرت}} - \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{ک} \left\{ \text{مم لہ مس ضہ} - \frac{\text{جم لہ}}{\text{جم ی جم ضہ}} \right\}$ جم س $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$

۔ک $\frac{\text{جم لہ جم ی}}{\text{جم}^2 \text{ی جم ضہ}}$ جب س $\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}$

نصف النہار پر س = ۰ اور ضہ = لہ ۔ ی اس لیے اس صورت میں

$\frac{\text{فرسَ}}{\text{فرت}} - \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{ک مم لہ} \left\{ \text{مس ضہ} - \frac{\text{جب لہ}}{\text{جم ی جم ضہ}} \right\} \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$

= ک مم لہ $\frac{\text{جب (لہ ۔ ی) جم ی ۔ جب لہ}}{\text{جم ی جم (لہ ۔ ی)}}$ $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$

= ۔ک مم لہ مس ی $\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$

اس لیے $\frac{\text{فرسَ}}{\text{فرت}} = \left\{ \text{۱ ۔ ک مم لہ مس ی} \right\} \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}$

مثال ۵ — ایک دوربین کو ایک استادہ پر اس طرح چڑھایا گیا ہے (۴۸۶) کہ وہ ارتفاع اور السمت میں آزادانہ حرکت کر سکتی ہے۔ ثابت کرو کہ اُسے استوائی

طور پر متحرک کیا جا سکتا ہے اگر ایک تار کا ایک سرا دوربین کے سرے پر باندھ دیا جائے اور دوسرا سرا ایک خاص ثابت نقطے سے بندھا ہو۔

[Sheepshanks Exhibition.]

مثال ۶ — ایک عکاسی تختی جو ماسکی طول ف کی ایک استوائی دوربین پر لگی ہوئی ہے قطب پر ایک گھنٹے تک کھلی رکھی گئی ہے اور اس اثنا میں استوائی گھڑی برابر چل رہی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر قطبی محور میں تنصیب کی خطا د ا ہو تو تختی پر ستاروں کے خیال کی ترسیمیں مساوی دائروں کی قوسیں ہونگی اور ان قوسیوں کے طول ۲π ا ف \ ۱۲ ہونگے۔

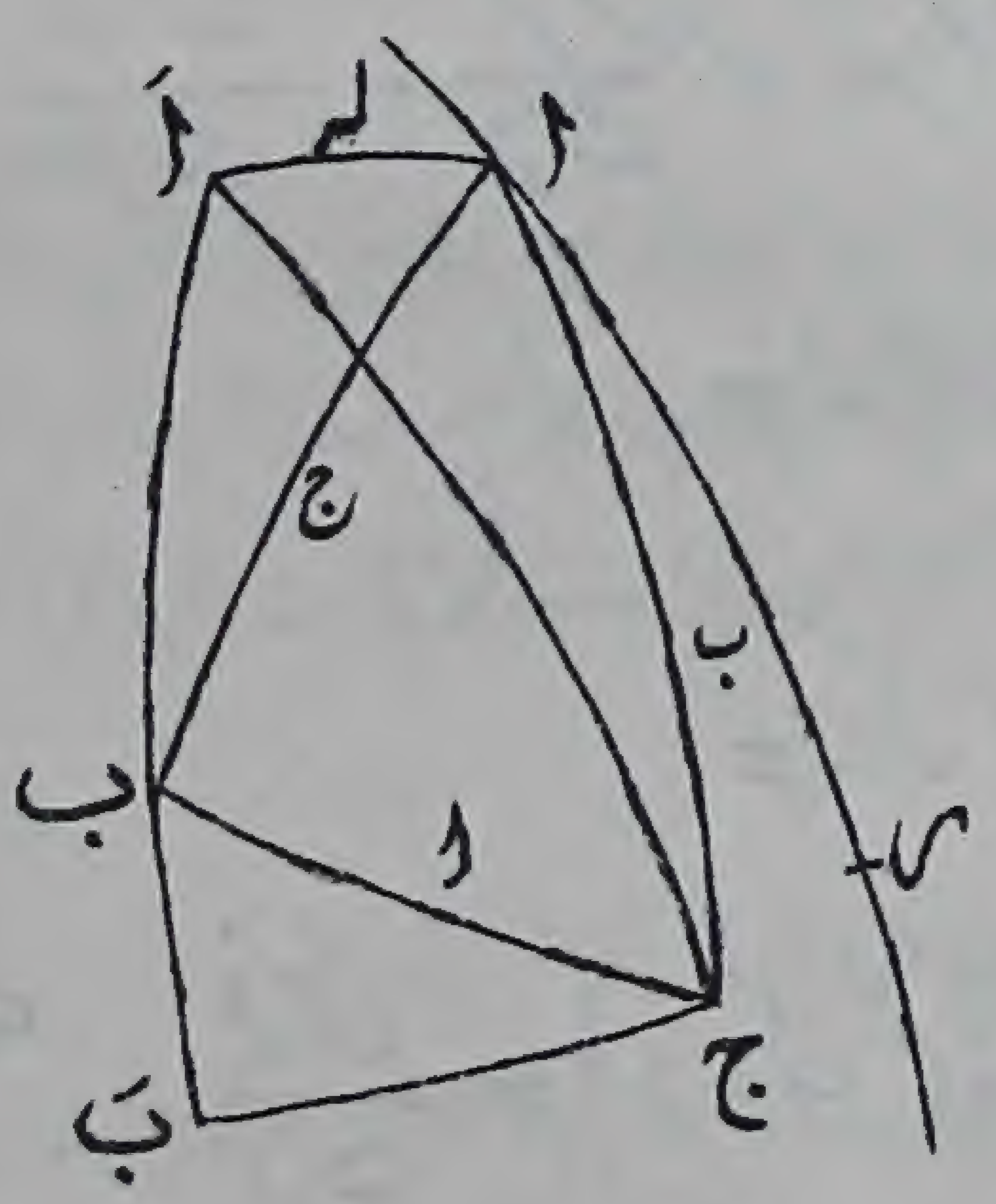
[Math. Trip.]

مثال ۷ — بتاؤ کہ ایک استوائی دوربین کے محور کی تنصیب میں جو چھوٹی خطائیں وقوع پذیر ہوتی ہیں انہیں ستاروں کے دو زوجوں کے میل کے ظاہری فرق کی پیمائشوں سے کس طرح متعین کیا جا سکتا ہے جبکہ میل کے اصلی فرق دیے گئے ہوں۔ نیز یہ بتاؤ کہ ہر زوج کے ستارے ساعتی زاویے میں کس طرح واقع ہونے چاہئیں کہ سب سے زیادہ قابل اعتماد نتیجے حاصل ہوں۔

[Dr. Rambaut.]

فرض کرو کہ ا م نصف النہار ہے، ا قطب اور اَ وہ نقطہ جسکی جانب محور قائم ہے۔

فرض کرو کہ ا اَ = لہ اور اَ ا م = س



شکل (۱۲۲)

فرض کرو کہ ستاروں کا ایک زوج ب اور ج ہے اور دوربین ج کی جانب لگائی گئی ہے، اس لیے اسکا خیال چلیپائی تاروں کے تقاطع پر پڑتا ہے، ان تاروں میں سے ایک بڑے دائرہ اَ ج میں واقع ہے اور دوسرا اُس کے علی القوائم ہے۔

فرض کرو کہ دوربین کو ساعتی

زاویہ میں اِس طرح گھمایا گیا ہے کہ شمال جنوبی تار ستارہ ب میں سے گذرتا ہے۔ اگر اَ ب کو بَ تک اِس طرح خارج کیا جائے کہ اَ بَ = اَ ج تو بَ پلیپائی تاروں کا محل ہوگا اور فاصلہ ب بَ (= ما) میل کا پیمائش کردہ فرق ہوگا۔ اِس لیے

ما = ب بَ = اَ ج ـ اَ ب

یا اگر مثلث اَ ب ج کے ضلعوں اور زاویوں کو حروف اَ، بَ، جَ، اَ، بَ، جَ سے تعبیر کیا جائے تو

ما = بَ ـ جَ .... (۱)

مثلث اَ ب ج کے ضلعوں اور زاویوں اور مثلث ا ب ج کے ضلعوں اور زاویوں کے درمیان جو فرق ہیں وہ صرف رتبہ لہ کی مقداریں ہیں اور چونکہ ب ج دونوں مثلثوں میں مشترک ہے اِس لیے فرا = ۰ ـ نیز

فرب = ـ لہ جم اَ ا ج

اور		فرج = ـ اَ ج ا = ـ لہ جب اَ ا ج | جب ب

اگر ہم زاویہ اَ ا ر کو س سے، ج ا ر کو س۲ سے، اور ب ا ر کو س۱ سے تعبیر کریں تو

فرا = ۰،

فرب = ـ لہ جم (س ـ س۲)،

فرج = ـ لہ جب (س ـ س۲) | جب ب

نیز عام صورت میں (دیکھو دفعہ ۴) (۴۸۷)

فرج = جم ب فرا + جم ا فرب + ھ جب ا جب ب فرج

اس میں فرا، فرب، فرج کی محصلہ قیمتیں درج کرنے سے

فرج = ـ لہ جم ا جم (س ـ س۲) ـ لہ جب ا جب (س ـ س۲)

(۱) سے حاصل ہوتا ہے

ما = ب ـ ج + فرب ـ فرج

اسلیے		ما = ب ـ ج + لہ جب ا جب (س ـ س۲) ـ لہ (۱ ـ جم ا) جم (س۱ ـ س۲)

= ب - ج + ۲ لہ جب ½ ا جب {س - ½ (س۱ + س۲)}

اگر ب اور ج کے مَیل علی الترتیب ضہ۱ اور ضہ۲ ہوں تو

ب - ج = ضہ۱ - ضہ۲

اور اس لیے

ما = ضہ۱ - ضہ۲ + ۲ لہ جب ½ (س۱ - س۲) جب {س - ½ (س۱ + س۲)}

اگر ہم لکھیں لا = لہ جب س اور ما = لہ جم س تو نصف النہار سے ا کا فاصلہ لا ہے اور راس کی جانب لہ کا ظل نصف النہار پر ما ہے - پس

۲ جب ½ (س۱ - س۲) جم ½ (س۱ + س۲) لا - ۲ جب ½ (س۱ - س۲) جب ½ (س۱ + س۲) ما = ما - (ضہ۱ - ضہ۲) ......(۲)

اِسے لکھا جا سکتا ہے

(جب س۱ - جب س۲) لا + (جم س۱ - جم س۲) ما = ما - (ضہ۱ - ضہ۲) ....(۳)

ستاروں کے دوسرے زوج پر مشابہ مشاہدوں سے اسی شکل کی ایک دوسری مساوات ملے گی اور اِن دو مساواتوں سے لا اور ما معلوم ہو سکیں گے -

لا کی بہترین قیمت حاصل ہوگی اگر ہم (۲) یا (۳) میں اس کے سر کو حتی الامکان بڑا بنائیں - یہ ظاہر ہے کہ لا کا سر اعظم ہوگا جبکہ ساعتی زاوئے ۹۰° اور ۲۷۰° ہوں یعنی دونوں ستارے شش ساعت دائرے پر واقع ہونے چاہئیں - اس صورت میں

۲ لا = ما - (ضہ۱ - ضہ۲)

ما معلوم کرنے کے لیے موافق ترین حالات پیدا ہوں گے اگر ہم ساعتی زاویوں کو ۰° اور ۱۸۰° بنائیں چنانچہ ایسی صورت میں

۲ ما = ما - (ضہ۱ - ضہ۲)

اِس صورت میں دونوں ستارے نصف النہار پر ہونے چاہئیں۔

مثال ۸ — شمالی عرض بلد لہ میں موقوعہ ایک اُستوائی دوربین اُستوائی گھڑی کے ذریعہ صحیح کوکبی شرح پر چل رہی ہے، اس کا قطبی محور ٹھیک ارتفاع پر ہے لیکن ایک انتصابی مُستوی میں نصف النہار کے مُستوی کے ساتھ ایک چھوٹا زاویہ عہ بناتا ہے۔ اس دوربین کو جنوبی میل ضہ کے ایک ستارے کی جانب لگایا گیا ہے۔ یہ ستارہ میدان نظر کے وسط میں ہوتا ہے جبکہ وہ نصف النہار کو عبور کر رہا ہو۔ انعطاف کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ ستارہ میدان نظر میں اسوقت تک رہے گا جب تک کہ وہ افق کے اوپر ہو بشرطیکہ میدان کا زاوئی نصف قطر

ا قط ضہ { جم² لہ ـ جب² ضہ جب² (لہ + ضہ) }^½

[Math. Trip. 1.]

سے بڑا ہو۔

مثال ۹ — اگر دائرہ نصف النہار میں میل کا تار ٹھیک افقی ہونے کی (۴۸۸)
بجائے افق سے زاویہ ۹۰° ـ ع بنائے اور اگر اصلی میل ضہ کے ایک ستارہ کا مشاہدہ کردہ میل ضَہ ہو اور یہ ستارہ نصف النہار سے قریب ساعتی زاویہ تت میں ہو تو ثابت کرو کہ

مس ضہ = مس ضَہ جم تت + قط ضَہ جب تت مس ع

مثال ۱۰ — پچھلی مثال کے نتیجہ سے ثابت کرو کہ اگر قطب تارہ جس کا اصلی میل ضہ ہے میل ضَہ اور ساعتی زاویہ تتَ میں نظر آئے جبکہ وہ نصف النہار کی ایک جانب تقریباً ایک گھنٹہ کے فاصلہ پر ہو اور میل ضہٗ اور ساعتی زاویہ تتٗ میں نظر آئے جبکہ وہ نصف النہار کی دوسری جانب تقریباً ایک گھنٹہ کے فاصلہ پر ہو تو چھوٹا میلان ع مساوات ذیل سے معلوم کیا جا سکتا ہے:-

مس ع = (مس ضہٗ جم تتٗ ـ مس ضَہ جم تتَ) / (قط ضَہ جب تتٗ + قط ضہٗ جب تتَ)

مثال ۱۱ — اگر دائرہ نصف النہار سے ایک ستارہ کا راسی فاصلہ مشاہدہ کیا جائے تو ثابت کرو کہ السمت کی خطاء کا اثر اس راسی فاصلہ پر حسب ذیل ہوگا

$\frac{1}{2}$ ا ^{2} جم فہ جب ی قط (فہ - ی) جب ا ^{2}

جہاں السمت کی خطاء ا، عرض بلد فہ، اور راسی فاصلہ ی ہے۔

[Coll. Exam 1903]

فرض کرو کہ آلہ کے السمت سے متغیر شدہ ظاہری راسی فاصلہ ی + لا ہے

تو

جب (فہ - ی) = جم (ی + لا) جب فہ - جب (ی + لا) جم فہ جم ا

اِس لیے

لا جم (فہ - ی) = $\frac{1}{2}$ ا ^{2} جب ی جم فہ جب ا ^{2}

مثال ۱۲ — چاند کے چمکدار کنارہ کے صعود مستقیم کو دائرہ مرور سے مشاہدہ کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اِس مشاہدہ کی تحویل میں صعود مستقیم میں چاند کی حرکت کا اور نیم قطر میں اُس کے اضافہ کا جو اثر مشاہدہ کردہ تاروں کے اوسط سے مرکزی تار پر تحویل کرنے میں پڑتا ہے وہ مرکز پر کی معمولی تحویل کو حسب ذیل جزو ضربی سے ضرب دیکر بیان ہو سکتا ہے:

$$\frac{۳۶۰۰ + ع}{۳۶۰۰} \times \frac{\text{جب (چاند کا ارض مرکزی فاصلہ راس)}}{\text{جب (چاند کا ظاہری فاصلہ راس)}} \times \text{قط (چاند کا ارض مرکزی میل)}$$

جہاں مشاہدہ کے لمحہ کے لیے چاند کے ص - م کے اضافہ کی شرح فی گھنٹہ وقت کے ثانیوں میں ع ہے۔

مثال ۱۳ — ثابت کرو کہ آلہ مرور، راس کو اور افق کے جنوبی نقطہ کو صحیح طور پر دکھا سکتا ہے لیکن اِن کے درمیان وہ غلط ہو سکتا ہے۔ اگر ایسی کسی دوربین کی خطائے توازی گری ج ہو تو راسی فاصلہ ۵ ہ کے ایک ستارہ کے مرور کے وقت میں خطاء ۰٫۲۷۶ ج قم (۵ ہ + فہ) ثانئے (وقت کے) ہے جہاں مشاہدہ کے مقام کا عرض بلد فہ ہے۔ کیا اِس خطاء کو مشاہدہ کردہ وقت میں جمع کرنا چاہیے یا اِس میں سے تفریق کرنا چاہیے؟

[Coll. Exam 1898]

حسب دفعہ ۱۵۶ حاصل ہوتا ہے

جب ج = (جب فہ جب ب - جم فہ جم ب جب ک) جب ضہ - جم ب جم ک جب ت جم ضہ

+ (جم فہ جب ب + جب فہ جم ب جب ک) جم ضہ جم ت = ۰

نصف النہار کے لیے ب، ج، ک اور اس لیے ت چھوٹی مقداریں ہیں (۴۸۹

اِس لیے ہم لکھ سکتے ہیں

ج + (ب جب فہ - ک جم فہ) جب ضہ + (ب جم فہ + ک جب فہ) جم ضہ - ت جم ضہ = ۰

لیکن سوال کی شرطوں کی رو سے ت = ۰ جبکہ ضہ = فہ (یعنی راس پر کے ایک نقطہ کے لیے)

اس لیے ج + ب = ۰، نیز ت = ۰ جبکہ ضہ = فہ - ۹۰° (یعنی جنوبی نقطہ کے لیے)

اِس لیے ج + ک = ۰

اِس لیے کسی اور نقطہ کے لیے

ت جم ضہ = ج {۱ - (جب فہ - جم فہ) جب ضہ - (جم فہ + جب فہ) جم ضہ}

= ج {۱ - √۲ جم (فہ - ضہ - ۴۵°)}

اگر مُور پر ایک ستارہ کا راسی فاصلہ ۴۵° ہو تو ضہ = فہ - ۴۵° اور اِسلیے

جب (۴۵° + فہ) × ت = - ج (√۲ - ۱) -

اگر ج کو قوس کے ثانیوں میں اور ت کو وقت کے ثانیوں میں بیان کیا جائے تو

۱۵ ت = - ء۴۱۴۲ ج قم (۴۵° + فہ)

چونکہ ت منفی ہے اس لیے ستارہ کا ساعتی زاویہ مشرقی ہے جبکہ وہ آلہ کے نصف النہار پر ہو اور اِس لیے تصحیح

+ ء۰۲۷۶ ج قم (۴۵° + فہ)

ہے۔

مثال ۱۴۱ — ثابت کرو کہ اگر طہ، ق، ر اِس قدر چھوٹے ہوں کہ پہلی قوت سے اعلیٰ ترقوتیں نظر انداز ہو سکتی ہیں تو تعیمی آلہ (دفعہ ۱۴۲) کی مساواتیں (۱)، (۲)، (۳) شکل ذیل اختیار کرتی ہیں

جب ضہ = جب کاَ + طہ جب کا جم کاَ،
جب (لہ - عہ) جم ضہ = جب کا جم کاَ + طہ جب کاَ + جم کا (ر + ق جب کاَ)،
جم (لہ - عہ) جم ضہ = جم کا جم کاَ + جب کا (ر + ق جب کاَ)

ثابت کرو کہ ان مساواتوں کے حل حسب ذیل ہیں

پہلا حل

کا = عہ - لہ + رقط ضہ + ق مس ضہ + طہ جم (عہ - لہ) مس ضہ،
کاَ = ضہ - طہ جب (عہ - لہ)

دوسرا حل

کا = ۱۸۰° + عہ - لہ - رقط ضہ - ق مس ضہ + طہ جم (عہ - لہ) مس ضہ،
کاَ = ۱۸۰° - ضہ + طہ جب (عہ - لہ)

نیز اس کی تشریح کرو کہ یہ ضابطے آلہ ارتفاع السمت، استوائی دوربین یا دائرہ نصف النہار پر کس طرح اطلاق پذیر ہیں۔

(۴۹۰)

جدولوں (۱) اور (۲) کی تشریح

جدول (۱) میں مولف نے نیوکمب اور ہِل "The Astronomical Papers for the American Ephemeris" کا اتباع کیا ہے۔ نیم محاور اعظم اُن لوگارتمی قیمتوں کے متناظر طبعی اعداد ہیں جو نیوکمب اور ہِل نے دیے ہیں اور انہیں میلوں میں بیان کرنے میں مولف نے اس کتاب میں اختیار کردہ اکائیوں کے لحاظ سے ۸٫۸۰″ کو شمسی اختلاف منظر اور کلارک کی قیمت ۳٬۹٦۳٫۳ میل کو زمین کا استوائی نیم قطر تسلیم کیا ہے۔

جدول (۲) میں حسب ذیل چیزیں ملیں گی: عناصر کا ایک باہمی صحیح جٹ جو زاوئی نیم قطر پر منحصر ہیں (یہ زاوئی نیم قطر وہ ہیں جو آج کل بحری جنتری میں استعمال کئے جاتے ہیں)، نیوکمب اور ہِل کی قیمتیں، کلارک کا ارضی نیم قطر (۳٬۹٦۳٫۳ میل)، شمسی اختلاف منظر ۸٫۸۰″، اور زمین کی اوسط کثافت ۵٫۵٦ جس کو کارنو اور بیل نے معلوم کیا ہے۔

جدول (۱)

نظام شمسی کے عناصر ـ سنہ ۱۹۰۹ء

سیارہ کا نام	علامت	مدار کا نیم محور اعظم ⊖ = اکائی	نیم محور اعظم کروڑ میلوں میں	کوکبی دور: اوسط شمسی یوم	کوکبی دور: جولی سال	اوسط یومی حرکت	حضیض کا طول بلد	صعودی عقدہ کا طول بلد	مدار کا میلان	خروج المرکز
عطارد	☿	۰٫۳۸۷۰۹۸۶	۳٫۶۰	۸۷٫۹۶۹۲۶	۰٫۲۴	۴° ۵′ ۳۲٫۴۳″	۷۵° ۵۳′ ۵۹″	۴۷° ۸′ ۴۵″	۷° ۰′ ۱۰″	۰٫۲۰۵۶۱۴
زہرا	♀	۰٫۷۲۳۳۳۱۵	۶٫۷۲	۲۲۴٫۷۰۰۸	۰٫۶۲	۱ ۳۶ ۷٫۷	۱۳۰ ۹ ۵۰	۷۵ ۴۶ ۴۷	۳ ۲۳ ۳۷	۰٫۰۰۶۸۲۱
زمین	⊖	۱٫۰۰۰۰۰۰۰	۹٫۲۹	۳۶۵٫۲۵۶۴	۱٫۰۰	۵۹ ۸٫۲	۱۰۱ ۱۳ ۱۵	۰ ۰ ۰	۰ ۰ ۰	۰٫۰۱۶۷۵۱
مریخ	♂	۱٫۵۲۳۶۸۸	۱۴٫۱۶	۶۸۶٫۹۷۹۷	۱٫۸۸	۳۱ ۲۶٫۵	۳۳۴ ۱۳ ۷	۴۸ ۴۷ ۹	۱ ۵۱ ۱	۰٫۰۹۳۳۰۹
ستارہ نما										
مشتری	♃	۵٫۲۰۲۸۰۳	۴۸٫۳۳	۴۳۳۲٫۵۸۸	۱۱٫۸۶	۴ ۵۹٫۱	۱۲ ۳۶ ۲۰	۹۹ ۲۶ ۴۲	۱ ۱۸ ۴۲	۰٫۰۴۸۲۵۴
زحل	♄	۹٫۵۳۸۸۴۴	۸۸٫۶۲	۱۰۷۵۹٫۲۰	۲۹٫۴۶	۲ ۰٫۵	۹۰ ۴۸ ۳۲	۱۱۲ ۴۷ ۱۲	۲ ۲۹ ۳۹	۰٫۰۵۶۰۶۱
یورینس	♅	۱۹٫۱۹۰۹۸	۱۷۸٫۲۸	۳۰۵۸۶٫۲۹	۸۳٫۷۴	۴۲٫۲	۱۶۹ ۲ ۵۶	۷۳ ۲۹ ۲۵	۰ ۴۶ ۲۲	۰٫۰۴۷۰۴۴
نیپچون	♆	۳۰٫۰۷۰۶۷	۲۷۹٫۳۵	۶۰۱۸۷٫۶۵	۱۶۴٫۷۸	۲۱٫۵	۴۳ ۴۵ ۲۰	۱۳۰ ۴۰ ۴۴	۱ ۴۶ ۴۵	۰٫۰۰۸۵۳۳

جدول (۲)

نظام شمسی کے عناصر

سیارہ کا نام	علامت	محوری گردش	استوائی نیم قطر: زاویائی[۱]	استوائی نیم قطر: میل	استوائی نیم قطر: ⊕ = ۱	کمیت: ☉ = ۱	کمیت: ⊕ = ۱	اوسط کثافت: ⊕ = ۱	اوسط کثافت: پانی = ۱	سطح پر قوت جاذبہ ⊕ = ۱	ناقصیت	استوا کا میلان مدار کے ساتھ[۲]
سورج	☉	۲۵،۳۸ یوم	۱۶َ ۱،۱۸ً	۴۳۲۸۹۰	۱۰۹،۲	۱\۱	۳۲۹۳۹۰	۰،۲۵	۱،۴۰	۲۷،۶۱	؟	۷° ۱۵َ
عطارد	☿	؟	۳،۳۴ً	۱۵۰۴	۰،۳۸۰	۱\۶۰۰۰۰۰۰ ؟	۰،۰۵۵ ؟	۱،۰۰ ؟	۵،۵۶ ؟	۰،۳۸ ؟	؟	؟
زہرا	♀	؟	۸،۴۰	۳۷۸۳	۰،۹۵۵	۱\۴۰۸۰۰۰	۰،۸۰۷	۰،۹۳	۵،۱۴	۰،۸۹	؟	؟
زمین	⊕	۲۳ گ ۵۶ م ۴،۰۹ ث	۸،۸۰	۳۹۶۳	۱،۰۰	۱\۳۲۹۳۹۰	۱،۰۰	۱،۰۰	۵،۵۶	۱،۰۰	۱\۲۹۳،۴۶۵	۲۳° ۲۷َ ۸ً
مریخ	♂	۲۴ گ ۳۷ م ۲۳،۴۴ ث	۴،۶۸	۲۱۰۸	۰،۵۳۲	۱\۳۰۹۳۵۰۰	۰،۱۰۶	۰،۷۱	۳،۹۲	۰،۳۸	؟	۲۴ ۵۲
مشتری	♃	۹ گ ۵۶ م ±	۱ ۳۷،۳۶	۴۳۸۵۰	۱۱،۰۶	۱\۱۰۴۷،۳۵	۳۱۴،۵	۰،۲۵	۱،۳۷	۲،۵۷	۱\۱۷	۳ ۵
زحل	♄	۱۰ ۱۵ ±	۱ ۲۴،۷۵	۳۸۱۷۰	۹،۶۳	۱\۳۵۰۱،۶	۹۴،۰۷	۰،۱۲	۰،۶۴	۱،۰۱	۱\۹	۲۶ ۴۹
یورینس	♅	؟	۳۴،۲۸	۱۵۴۴۰	۳،۹۰	۱\۲۲۸۶۹	۱۴،۴۰	۰،۲۴	۱،۳۵	۰،۹۵	۱\۹۵ ؟	؟
نیپچون	♆	؟	۳۶،۵۶	۱۶۴۷۰	۴،۱۵	۱\۱۹۷۰۰	۱۶،۷۲	۰،۲۳	۱،۲۹	۰،۹۷	؟	؟

[۱] اس خانہ میں جو زاویائی نیم قطر دیا گیا ہے وہ زاویہ ہے جو نیم قطر کے محاذی سورج سے زمین کے اوسط فاصلہ کے مساوی فاصلہ پر بنتا ہے۔
[۲] یہ طریق الشمس کے ساتھ سورج کے خط استوا کے مستوی کا میلان ہے۔

تمت

بالخیر

اشاریہ

علم ہیئت کروی

حصۂ دوم

نوٹ : اعداد سے صفحات کا حوالہ دیا گیا ہے۔

اِصطلاحاتِ علم ہیئت

A

Aberration	ضلالت
Achernar	آخرالنہر
Acrab	عقرب
Adara	عذرا
Alcor	الخوار
Alcyone	السیونی
Aldebaran	الدبران
Alderamin	الذراع الیمین
Algeiba	الجبا
Algenib	الجنب الفرس
Algol	الغول
Algorab	الغراب
Alioth	الیاتہ
Alkaid	القائد
Alkalurops	الکلوروپس
Alkes	الکاس
Almak	العناق

Almucantar	المقنطر
Alpharad	الفرد
Alphecca	الفکہ
Alpheratz	الفرس
Alphirk	الفرق
Alrai	الراعی
Alruccabah	الرکبہ
Alshain	الشاہین
Altair	الطائر
Altazimuth	آلہ ارتفاع و السمت
Altitude	ارتفاع
Analogy	تمثیل
Andromadæ	مراۃ المسلسلہ
Angle of position	زاویہ محل
Annual Aberration	سالانہ ضلالت
Annual parallax	سالانہ اختلاف منظر
Anomaly	بے قاعدگی
Antartic circle	دائرہ قطب جنوبی
Antares	انٹاریس
Antila	ہواپمپ
Antinole	ضد قطب
Antipodal	تحت قدمی
Apex	راس
Aphelion	اوج
Apogee	بعید ارضی

Apparent motion	ظاہری حرکت
Apse	اوج
Apus	طائر فردوس
Aquilae	عقاب
Aretic circle	دائرہ قطب شمالی
Arcturus	سماک رامح
Argo	السفینہ
Aries	حمل
Art of Interpolation	بینی ادراج کا فن
Ascending node	صعودی عقدہ
Ascension (right)	صعودِ مستقیم
Asteroids	نجیمہ
Asterope	اسٹروپی
Astrograph	فلک نگار، نجم نگار
Astronomy	علم ہیئت
Astronomical	ہیئتی
Atlas	اٹلس
Atmosphere	کرۂ ہوائی
Atmospheric refraction	انعطاف کرۂ ہوائی
Auriga	ممسک الاعنہ
Autumn	خریف
Autumnal Equinox	اعتدال خریف
Axis	محور
Azimech	السماک
Azimuth	السمت

B

Barometer	بارپیما
Baten Kaitos	بطن القیطوس
Bellatrix	بیلاٹرکس
Benetnasch	بنات النعش
Betelgeusc	ابط الجوزا
Brightness	چمک
Bull's horn	قرن الثور

C

Camelopardus	زراف
Cancer	سرطان
Canes Venatice	کلاب الصید
Canopus	سہیل
Canis-magoria	کلب اکبر
Cape of Good Hope	راس امید
Capella	عیوق
Capericornus	جدی
Caph	کف
Cardinal points	اساسی نقطے
Cassiopeia	ذات الکرسی
Castor	کیسٹر
Celestial	سماوی
Celestial Horizon	افق سماوی
Celestial Sphere	کرہ سماوی
Celestial Latitude	عرض بلد سماوی

Celestial Longitude	طول بلد سماوی
Centauri	قنطورس
Cephii	قیقاوس
Ceti	قیطوس
Cetus	قیطس
Chamacleon	حِربا
Chronometer	وقت پیما
Circinus	پرکار
Ciecuit	دورہ دَور
Circular parts	دائری اجزاء
Circumpolar	حائط قطبی
Civil year	کاروباری سال
Clock star	گھڑی تارہ
Co-latitude	عرض التمام
Collimation	توازی گری
Collimating telescope	توازی گردوربین
Columba	حمامہ
Colure	دائرہ
Coma-berenices	شعر برنیس
Comet	دُمدار تارہ
Conformal	ہم شکل
Conformal Correspondence	ہم شکل تناظر
Conformal Representation	ہم شکل تعبیر
Constant of Aberration	ضلالت کا مستقل
Constellations	برج

Contact	تماس
Convolutions	لفیفے
Co-ordinates	محدد
Corpuscular Theory	جسیمیہ نظریہ
Cor Caroli	قلب چارلس
Cor Hydræ	قلب الحسیہ
Cor Leonis	قلب اسد
Cor Scorpinnis	قلب عقرب
Cor Serpentis	قلب شجاع
Corona Australis	اکلیل جنوبی
Corona Borealis	اکلیل شمالی
Corvus	غراب
Crater	فم البرکان
Cross wire	چلیپائی تار
Crux	صلیب
Culmination	تکبد
Current co-ordinates	رواں محدد
Curvature	انحناء
Cusp	قرن
Cycle	دور
Cygni	دجاجہ

D

Date Line	تاریخ خط
Day number	یومی اعداد
Declination	میل

Declination axis	میلی محور
Defective Limb	تاریک کنارہ
Deimos	دیموس
Delphinus	دلفین
Denebola	ذنب الاسد
Depression	پستی
Descending node	نزولی عقدہ
Desperation	انتشار
Differential Formulæ	تفرقی ضابطے
Diphada	ضفدع
Diurnal motion	یومی حرکت
Dorado	تیغ ماہی
Draco	فرس اصغر
Dubhe	دبہ

E

Earth	زمین
Eccentricity	خروج المرکز
Eclipse	گرہن
Ecliptic	طریق الشمس
Ecliptic Limits	گرہن کے حدود
Electra	الکٹرا
Elements	عناصر
Elliptic motion	ناقصی حرکت
Ellipticity	ناقصیت
Elongation	ابتعاد

Enceladus	انقلادوس
Enif	إنف
Ephemeris	ایفیمرس
Ep och	قرن، زماں
Equation of Time	وقت کی مساوات
Equation of the centre	مرکز کی مساوات
Equater	خط استوا
Equatorial Telescope	استوائی دوربین
Equatorial Sundial	استوائی دھوپ گھڑی
Equinilius	فرس اصغر
Equinoctial colure	دائرہ اعتدالین
Equinoctial points	اعتدالی نقطے
Equinox	اعتدال
Equinus	فرس اصغر
Eridanus	النہر
Eros	ایراس
Errai	الراعی
Error	خطا
Error of collimation	خطائے توازی گری
Etamin	التنین
Evening star	شام کا تارہ
Excentric	خارج المرکز
Expose	عریاں کرنا
Extrapolation	درائی اوراج
Eye piece	چشمہ

F

Field of view	میدان نظر
First point of arics	راس الحمل
First quarter	پہلا ربع
Flora	فلورا
Focal circle	ماسکی دائرہ
Focal distance	ماسکی فاصلہ
Focult's pendulum	فوکو کا رقاص
Fom	فم
Fomalhaut	فم الحوت
Foranx (the furnance)	فرنیکس
Fundamental instruments	اساسی آلات
Fundamental Formulæ	اساسی ضابطے

G

Geariag	گیرائی
Gemini (the twins)	توامین
Geminorum	جوزا
Generalized Instrument	تعمیمی آلہ
Geocentric	ارض مرکزی
Geodesy	ارضیات
Giedi	جسدی
Gomeisa	غمیصا
Graduated great circle	درجہ دار دائرہ
Great circle	بڑا دائرہ

Grus	حسمالہ
Gun-metal	توپ دہات
H	
Hamal	حمل
Hebe	ہیب
Heliocentric	شمس مرکزی
Heliograph	شمس نگار
Heliometer	شمس پیما
Hercules	ہرقلس
Homam	ہمام
Horary motions	ساعت واری حرکتیں
Horizon	افق
Horizontal parallax	افقی اختلاف منظر
Hour angle	ساعتی زاویہ
Hour circle	ساعتی دائرے
Hyades	ہیاڈیس
I	
Iapetus	آئپٹیس
Ideal	تصوری، کامل
Iklil	اکلیل
Inclination	میلان
Independent Day Numbers	غیر تابع یومی اعداد
Index Error	اظہاری خطا
Indus	انڈس
Inferior planets	سفلی سیارے
Integration by parts	تکمل بالحصص

Internal contact	اندرونی تماس
Interplotion	بینی ادراج
Invariant	غیر متغیرہ
Inverses	مقلوبات
Inversion	انقلاب
Invert	مقلوب کرنا
Iris	ایرس
Izar	ازار
J	
Juno	جونو
Jupiter	مشتری
K	
Kaffaljidhma	کف الجذما
Kaitain	غیطین
Kaus Australis	قوس جنوبی
Kaus Borealis	قوس شمالی
Kelb al Rai	کلب الراعی
Kocab	کوکب
L	
Lacerta (the lizard)	لاکرٹا
Latitude	عرض بلد
Latus rectum	وتر خاص
Leap year	سال کبیسہ
Leo (the lion)	اسد
Leonids	اسدی

Leo minor	اسد اصغر
Leporis	الخسل
Lepus (the hare)	ارنب
Level	ہمواری
Libra	میزان
Light Equation	نوری مساوات
Light year	نوری سال
Limb (of the sun)	کنارہ (سورج کا)
Longitude	طول بلد
Loxodrome	مساوی المیلان
Lunation	قمریہ
Lunisolar-precession	قمر شمسی استقبال
Lupus (the woff)	سبع (بھیڑیا)
Lynse	فہد (سیاہ گوش)
Lyra (the lyre)	سلیاق

M

Maia	مایا، میہ
Major circle	بڑا دائرہ
Malus	مالوس
Markab	مرکب
Mars	مریخ
Mebsuta	مبسوطہ
Mechanism	میکانیت
Megrez	مغرز
Menkalinan	منکالینن

Menkar	منخر
Mensa	میزہ
Merak	مراق
Mercator's projection	مرکیٹری ظِل
Mercury	عطارد
Meridian	نصف النہار
Meridian circle	دائرہ نصف النہار
Merope	میروپی
Mesarthim	مثارثم (زبرانی)
Micrometer	خوردہ پیما
Microscopium	خوردبینہ
Milkyway	کہکشاں
Mimas	میماس
Minor circle	صغیر دائرہ
Mintaka	منطقہ
Mira	میرا
Mirac	مراق
Mirfak	مرفق
Mirzam	مرزم
Mizar	مزر
Monoceros	گینڈا
Moon	چاند
Muphrid	مفرد
Musca (the fly)	مکھی

N

Nadir	قدم
Nautical Almanac	بحری جنتری
Nebula	سحاب
Nekkar	نقار
Nole	شطب
Node	عقدہ
Norms	نارمہ
North Polar distance	شمالی قطبی فاصلہ
Nutation	کپو

O

Oberon	اوبی رالن
Object glass	دہانہ
Obliquity	میلان
Observatory	رصدگاہ
Occultation	احتجاب
Octans	مثمنہ
Okda	عقدہ
Opposition	تقابل
Optical	مناظری
Orbit	مدار
Ordinate	مُعیّن
Orionis	جبار
Osculating curve	لثمی منحنی

P

Parallactic angle	اختلاف منظری زاویہ
Parallax	اختلاف منظر
Parallel circles	متوازی دائرے
Pavo	طاوس
Pegasus	پردار گھوڑا، فرس
Penumbra	ظِل مشوب
Perigee	قریب ارضی
Perihelion	حضیض
Periodic time	مدت دوران
Persei, perscus	پرسیاوش
Psrspective projecticn	منظری تظلیل
Phakt	فاختہ
Phases	ہیئتیں
Phecda	فخذ
Phobos	فوبوس
Phoenix	فینیکس
Photograpeic plate	عکسی تختی
Photography	عکاسی
Photometric	ضیا پیمائی
Phurud	الفرد
Pictor	مصور
Picses	حوت
Pisces Australis	حوت جنوبی
Pleiades	ثریا

Pleione	پلئونی
Polaris	قطب تارہ
Poles	قطب
Pollux	راس التوام
Position angle	زاویہ محل
Præsepe	خان النور
Precession	استقبال
Prima Giedi	راس الجدی
Prime vertical	اول السمت
Procyon	شعرالشامیہ
Projection	ظل
Progression	تقدم
Proper motion	ذاتی حرکت
Pullus	پالس
Pupis	سُکان دیوسہ
Pypxsi	کمپاس

Q

Quadrantal triangle	ربعی مثلث
Quadrature	تربیع
Quarii	دلو
Quarter	ربع

R

Range	سعت
Rasalsad	راس الاسد
Ras Algethi	راس الجاشی

Ras Alhague	راس الحاوی
Rastaban	راس الثعبان
Reading microscope	قاری خوردبین
Reapearance	بازنمودگی
Reduction	تحویل
Refraction	انعطاف
Rigel	رجل
Regression	رجعت
Regulus	قلب اسد
Residuals	ثقلیات
Reticulum	شبکہ
Retrograde	رجعی
Retrogression	رجعت
Rhumb Line	مساوی المیلان
Right ascension	صعود مستقیم
Rising of a heavenly body	طلوع جرم سماوی کا
Rotanev	روتاینو
Rotation	گردش
Round number	بے کسر عدد

S

Sadachbia	سعد الاخبیہ
Sadalmelik	سعد الملک
Sadal Suud	سعد السعود
Sagitta	سہم
Sagitarius	قوس تیر انداز

Sapho	سیفو
Saros	قرن
Satellites	تابع، قمر
Saturn	زحل
Scheat	شیتہ
Schedar	صدر
Sculptor	بت گر
Season	موسم
Serpens	اعیہ
Setting	عددی قراءت
Sextans	مسدسہ
Sheliak	شلیاق
Shretan	شرطان
Sidereal day	کوکبی یوم
Sidereal time	کوکبی وقت
Sidereal year	کوکبی سال
Sirius	شعری
Sirrah	سِرہ
Seides	تختیاں
Solar day	شمسی یوم
Solar eclipse	سورج گرہن
Solar system	نظام شمسی
Solstices	انقلاب
Solsticial colure	دائرہ انقلابین
Spherical triagnle	کروی مثلث

Spheroid	کرہ نما
Spica	سُنبلا
Spider lines	خطوط عنکبوت
Spring	بہار
Stand	ایستادہ
Stars	ستارے
Stationary points	مقیم نقطے
Stereographic projection	تسطیحی اظلال
Style	میل
Sualocin	سوالوسن
Subsolar point	زیر شمسی نقطہ
Substyle	زیر میل
Sulaphat	سلحفاتہ
Summer	گرما
Sun	سُورج
Sundial	دُھوپ گھڑی
Synodic period	اقترانی مدت

T

Tarazed	طائر الصید
Taygeta	ٹیجیٹا
Telescopium	دوربینہ
Terrestrial date Line	ارضی تاریخ خط
The first point of Aries	راس الحمل
The first point of Libra	راس المیزان
Thuban	ثعبان

Titan	طیطان
Total eclipse	کامل گرہن، پورا گرہن
Tovcanus	ٹوکانہ
Traits	لکیریں
Transcendental Equation	علوی مساوات
Transformation	استحالہ
Transit	مُرور
Transit circle	دائرہ مرور
Transit Instrument	آلہ مرور
Trigonometry	علم مثلث
Triangulum	مثلثہ
Triangulum Australe	مثلثہ جنوبی
Tropical year	
Twilight	شفق
U	
Umbra	ظل محض
Undulatory Theory	موجی نظریہ
Unukalhay	عنق الحیۃ
Uranus	یورینس
Ursa Major	دب اکبر
V	
Vastar	وسطار
Vega	نسر واقع الزبان الشمالی
Vela	شراع، بادبان

Venus	زہرہ، ناہید
Vernal Equinox	اعتدال ربیع
Vertex	راس
Vertical circle	انتصابی دائرہ
Volans	سمکہ طیارہ
Vulpecula	ثعلب
W	
Wasat	وسط
Winter	سرما
Y	
Yed	ید
Z	
Zaurak	زورق
Zawijah	زاویہ
Zenith	راس
Zenith distance	راسی فاصلہ، فاصلہ راس
Zone	منطقہ
Zuben el Genubi	الزبان الجنوبی
Zuben el Hakrabi	الزبان العقربی
Zuben el Chamali	الزبان الشمالی